TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (C)

Número de casos possíveis: 6^4

Número de casos favoráveis: $2 \times 2 \times 2 \times 4 \times 4 = 128$

Os divisores de 5, nas três faces voltadas para cima, podem ser 1 ou 5. O número da face voltada para cima, que não é divisor de 5, pode ser 2, 3, 4 ou 6.

Assim, existem duas possibilidades para cada uma das vezes que a face que fica voltada para cima é um divisor de 5 e, para cada uma destas, existem quatro possibilidades para a face que não é um divisor de 5, que pode ocorrer no primeiro lançamento, segundo, terceiro ou quarto.

Deste modo, o valor da probabilidade pedida é $\frac{128}{6^4} = \frac{8}{81}$.

2. $5 \times 2! \times {}^{16}A_{14} \times {}^{4}A_2$

Existem 5 alternativas distintas para que a Ana e o Marcos se sentem lado a lado, na terceira fila, e, para cada uma destas, existem $2!$ maneiras para os dois amigos se disporem entre si. Para cada uma destas formas, existem ${}^{16}A_{14}$ maneiras diferentes de escolher, ordenadamente, 14 amigos, de entre os 16 restantes que irão ocupar os 14 lugares ainda disponíveis das duas primeiras filhas e, para cada uma destas formas, existem, ${}^{4}A_2$ modos distintos de escolher, ordenadamente, dois lugares, de entre os quatro lugares ainda disponíveis na terceira fila, para sentar os dois amigos restantes.

3. Opção (D)

Existem $m!$ formas distintas de os m livros de Matemática, estando juntos, se disporem. Para cada uma destas, existem $(p+4)!$ modos distintos de os livros de Português e de Física se disporem e, para cada uma destas, existem $p+4+1$, isto é, $p+5$ formas diferentes de dispor todos os livros, mantendo os de Matemática juntos. Assim, existem $m! \times (p+4)! \times (p+5) = m! \times (p+5)!$ modos distintos de dispor todos os livros na prateleira, lado a lado, de modo que os livros de Matemática fiquem juntos.

4.

4.1 $4\,P(A) = 5\,P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow P(\bar{B}|A) = \frac{4}{5}$

Seja a o número de canetas azuis existentes na caixa e seja c o número de canetas de outras cores, que não azul, existentes na caixa.

Desta forma, inicialmente existiam $a + c$ canetas na caixa.

Como a probabilidade apresentada corresponde à probabilidade de a segunda caneta extraída ser azul, sabendo que a primeira caneta extraída foi azul, o número de casos favoráveis é $a-1$ e o número de casos possíveis é $a-1+c$. Assim:

$P(\bar{B}|A)=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{a-1}{a-1+c}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow 5a-5=4a-4+4c \Leftrightarrow a=4c+1$

Como $4c$ representa, necessariamente, um número par, então $4c+1$ corresponde a um número ímpar. Como $a=4c+1$, significa que, inicialmente, existia um número ímpar de canetas na caixa.

4.2 $0{,}32\times 50=16$, logo 16 canetas são azuis e 34 canetas $(50-16=34)$ não são azuis.

Pretende-se obter a probabilidade de, ao serem retiradas seis canetas da caixa, o conjunto formado por essas seis canetas conter, pelo menos, duas canetas azuis.

Comecemos por calcular a probabilidade do acontecimento contrário, isto é, a probabilidade de, ao serem retiradas seis canetas da caixa, o conjunto formado por essas seis canetas conter, no máximo, uma caneta azul. O número de casos possíveis é ${}^{50}C_6$.

No que diz respeito ao número de casos favoráveis, como se pretende que o conjunto formado pelas seis canetas contenha, no máximo, uma caneta azul, tal significa que existem duas alternativas mutuamente exclusivas: nenhuma das canetas extraídas é azul, ou exatamente uma caneta retirada é azul e exatamente cinco canetas não são azuis.

Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{34}C_6 + 16\times {}^{34}C_5$.

Desta forma, a probabilidade pedida é igual a $1-\frac{{}^{34}C_6 + 16\times {}^{34}C_5}{{}^{50}C_6}\approx 0{,}64$.

5. Opção (A)

Uma vez que a linha do triângulo de Pascal é constituída por 15 elementos, podemos concluir que $n=14$, pelo que o quarto elemento da linha anterior será ${}^{13}C_3=286$.

6. $P(A\cap B)=6P(\overline{A\cup B}) \Leftrightarrow P(A\cap B)=6\big(1-P(A\cup B)\big)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=6-6\,P(A\cup B)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=6-6\big(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\big)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=6-6\,P(A)-6\,P(B)+6\,P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow -6+6\,P(A)+6\,P(B)=5\,P(A\cap B)$ (*)

Por outro lado:

$4\,P(A)=9\,P(\overline{B}) \Leftrightarrow 4\,P(A)=9\big(1-P(B)\big)$

$\Leftrightarrow 4\,P(A)=9-9\,P(B)$

$\Leftrightarrow P(B)=1-\frac{4}{9}P(A)$

Substituindo $P(B)$ por $1-\frac{4}{9}\,P(A)$ em (*), obtém-se:

$$-6+6\,P(A)+6\left(1-\frac{4}{9}P(A)\right)=5\,P(A\cap B)\Leftrightarrow -6+6\,P(A)+6-\frac{24}{9}P(A)=5\,P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{3}P(A)=5P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{15}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$\Leftrightarrow P(B|A\,)=\frac{2}{3}$$

7. $\frac{P(B)}{P(A)}+P\big((A\cup B)|\,\bar{A}\,\big)\times\frac{P(A)-1}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}+\frac{P\big((A\cup B)\cap\bar{A}\big)}{P(\bar{A})}\times\frac{P(A)-1}{P(A)}=$

$$=\frac{P(B)}{P(A)}+\frac{P\big((A\cap\bar{A}\,)\cup(B\cap\bar{A}\,)\big)}{P(\bar{A}\,)}\times\frac{P(A)-1}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B)}{P(A)}+\frac{P\big(\emptyset\cup(B\cap\bar{A}\,)\big)}{P(\bar{A}\,)}\times\frac{P(A)-1}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B)}{P(A)}+\frac{P(B\cap\bar{A}\,)}{P(\bar{A}\,)}\times\frac{P(A)-1}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B)}{P(A)}+\frac{P(B\cap\bar{A}\,)}{P(\bar{A}\,)}\times\frac{-P(\bar{A}\,)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B)}{P(A)}-\frac{P(B\cap\bar{A}\,)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B)-P(B\cap\bar{A}\,)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=$$

$$=P(B|A)$$

Cálculos auxiliares

- $P(A)+P(\bar{A}\,)=1\Leftrightarrow P(A)-1=-P(\bar{A}\,)$
- $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\bar{A}\,)$
  $\Leftrightarrow P(B)-P(B\cap\bar{A}\,)=P(B\cap A)$

8. Seja $n\in\mathbb{N}$ o número de atletas deste clube. Sabe-se que 65% dos atletas praticam andebol, isto é, $0{,}65n$ praticam andebol, pelo que $0{,}35n$ atletas praticam futebol.

Pretende-se selecionar, aleatoriamente, dois desses atletas, o que pode ser feito de ${}^{n}C_2$ formas distintas. Existem $0{,}65n\times0{,}35n$ maneiras diferentes de selecionar dois atletas que praticam modalidades distintas. Assim:

$$\frac{0{,}65n\times0{,}35n}{{}^{n}C_2}=\frac{39}{85}\Leftrightarrow\frac{0{,}2275n^2}{\frac{n!}{(n-2)!\times2!}}=\frac{39}{85}\Leftrightarrow\frac{0{,}2275n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\times2!}}=\frac{39}{85}$$

$$\Leftrightarrow\frac{0{,}2275n^2}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{39}{85}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{n\neq0}\frac{0{,}455n}{n-1}=\frac{39}{85}$$

$$\Leftrightarrow 38{,}675n=39n-39$$

$$\Leftrightarrow 0{,}325n=39$$

$$\Leftrightarrow n=120$$

O número de atletas deste clube é 120.

$0{,}65 \times 120 = 78$, logo o número de atletas deste clube que pratica andebol é 78.

9. Opção (D)

O termo geral da sucessão $u_n = \frac{4n+5}{n+1}$ pode ser escrito na forma $u_n = 4 + \frac{1}{n+1}$, pelo que

$\lim(u_n) = \lim\left(4 + \frac{1}{n+1}\right) = 4 + \frac{1}{+\infty} = 4^+$. Assim:

$$\lim \frac{2}{f(u_n)} = \frac{2}{\lim f(u_n)} = \frac{2}{\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)} =$$

$$= \frac{2}{\lim\limits_{x\to 4^+}\left(-\sqrt{x^2-16}\right)} =$$

$$= \frac{2}{0^-} =$$

$$= -\infty$$

10.

10.1 f é contínua em $x = 4$ se existir $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, isto é, se $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$.

- $$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}\left(\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4} - 2x\right) = \lim_{x\to 4^-} \frac{\left(\sqrt{x^2+9}-5\right)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x^2+1}+5\right)} - 2\times 4 =$$

$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{x^2+9-25}{(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)} - 8 =$$

$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{x^2-16}{(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)} - 8 =$$

$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)} - 8 =$$

$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{x+4}{\sqrt{x^2+9}+5} - 8 =$$

$$= \frac{8}{10} - 8 =$$

$$= \frac{4}{5} - 8 =$$

$$= -\frac{36}{5}$$

- $$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{3x^2-8x-16}{4x-x^2} = \lim_{x\to 4^+} \frac{(x-4)(3x+4)}{-x(x-4)} =$$

$$= \lim_{x\to 4^+} \frac{3x+4}{-x} =$$

$$= \frac{16}{-4} =$$

$$= -4$$

Cálculo auxiliar

	3	−8	−16
4		12	16
	3	4	0

$3x^2 - 8x - 16 = (x-4)(3x+4)$

Como $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$, não existe nenhum valor real k para o qual a função f seja contínua em $x = 4$.

10.2

- $x \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-8x-16}{4x-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{8}{x}-\frac{16}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{4}{x}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{8}{x}-\frac{16}{x^2}}{\frac{4}{x}-1} =$$

$$= \frac{3-0-0}{0-1} =$$

$$= \frac{3}{-1} =$$

$$= -3$$

Assim, a reta de equação $y=-3$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f, quando $x \to +\infty$.

- $x \longrightarrow -\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4}-2x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x(x-4)} - \frac{2x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}-5}{x(x-4)} - \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-5}{x(x-4)} - 2 =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+\frac{5}{x}\right)}{x(x-4)} - 2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-\left(\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+\frac{5}{x}\right)}{x-4}\right) - 2 =$$

$$= \frac{-\sqrt{1+\frac{9}{+\infty}}-\frac{5}{-\infty}}{-\infty-4} - 2 = \frac{-\sqrt{1+0}-0}{-\infty} - 2 =$$

$$= \frac{-1}{-\infty} - 2 = 0 - 2 =$$

$$= -2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-2)x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4} - 2x + 2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}-5}{x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-5}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+\frac{5}{x}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\left(\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+\frac{5}{x}\right)}{1-\frac{4}{x}} =$$

$$= \frac{-\sqrt{1+\frac{9}{+\infty}}-\frac{5}{-\infty}}{1-\frac{4}{-\infty}} = \frac{-\sqrt{1+0}-0}{1-0} =$$

$$= \frac{-1}{1} = -1$$

Assim, a reta de equação $y=-2x-1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função f, quando $x \to -\infty$.

11. Opção (B)

f tem domínio $\mathbb{R}^+$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 5$, logo a reta de equação $y = 2x + 5$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função f, quando $x \to +\infty$.

Assim, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5 - 2x}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{f(x)} - \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{f(x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{f(x)} - \frac{2}{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}} =$$

$$= \frac{5}{+\infty} - \frac{2}{2} =$$

$$= 0 - 1 =$$

$$= -1$$