Teste N.º 2

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Expoente[12] | Daniela Raposo e Luzia Gomes

Com colaboração de Daniela Breda

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\, \cos b + \operatorname{sen} b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \operatorname{sen} a\, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

1. Considere um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. Lança-se esse dado quatro vezes seguidas e regista-se o número da face que ficou voltada para cima, em cada lançamento.

Qual é a probabilidade de, em exatamente três desses lançamentos, se obter, na face voltada para cima, um divisor de 5?

(A) $\frac{2}{81}$ **(B)** $\frac{4}{27}$ **(C)** $\frac{8}{81}$ **(D)** $\frac{16}{27}$

2. Um grupo de 18 amigos, entre os quais se encontram a Ana e o Marcos, participou numa palestra sobre direitos humanos.

Quando os 18 amigos chegaram ao auditório, estavam seis lugares consecutivos livres na primeira fila, oito lugares na segunda fila e seis lugares na terceira fila.

Indique uma expressão que permita determinar, de acordo com os lugares disponíveis, de quantas maneiras diferentes se podem sentar os 18 amigos, de modo que as duas primeiras filas fiquem completas e que a Ana e o Marcos se sentem lado a lado, na terceira fila.

3. Considere uma estante com uma prateleira onde se encontram m livros de Matemática, p de Português e quatro de Física, todos diferentes. O número de maneiras de dispor todos os livros na prateleira, lado a lado, de modo que os livros de Matemática fiquem juntos, é igual a:

(A) $m! \times p! \times 4!$ **(B)** $m! \times p! \times 4! \times 3!$

(C) $m! \times (p+4)!$ **(D)** $m! \times (p+5)!$

4. Uma caixa contém canetas de várias cores, indistinguíveis ao tato, das quais algumas são azuis.

4.1 Extraem-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas canetas da caixa.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: "A primeira caneta extraída é azul."

B: "A segunda caneta extraída não é azul."

Sabe-se que $4\,P(A) = 5\,P(A \cap \overline{B})$.

Justifique que, inicialmente, existia um número ímpar de canetas azuis na caixa.

4.2 Considere que se alterou a constituição inicial da caixa e que existem agora 50 canetas indistinguíveis ao tato. Sabe-se que 32% destas canetas são azuis. Retiram-se, ao acaso, seis canetas da caixa.

Determine a probabilidade de o conjunto formado por essas seis canetas conter, pelo menos, duas canetas azuis. Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

5. Considere a linha n do triângulo de Pascal constituída por 15 elementos.

Qual é o valor do quarto elemento da linha anterior?

(A) 286 **(B)** 364 **(C)** 455 **(D)** 715

6. Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos possíveis e não certos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = 6\, P(\overline{A \cup B})$
- $4\, P(A) = 9\, P(\overline{B}\,)$

Determine o valor de $P(B|A)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

7. Sejam E um conjunto finito, não vazio, e P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$.

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(E)$ dois acontecimentos possíveis.

Mostre que:

$$\frac{P(B)}{P(A)} + P\big((A \cup B)|\,\overline{A}\,\big) \times \frac{P(A)-1}{P(A)} = P(B|A)$$

8. Num clube desportivo, pratica-se andebol e futebol.

Relativamente aos atletas deste clube, sabe-se que:

- cada atleta pratica exatamente uma das duas modalidades;
- 65% dos atletas praticam andebol.

Para hastear a bandeira para a comemoração do centenário do clube, vão ser selecionados, aleatoriamente, dois dos seus atletas. Sabe-se que a probabilidade de se selecionar dois atletas que praticam modalidades distintas é $\frac{39}{85}$. Determine o número de atletas do clube que praticam andebol.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- resolver a equação apresentada, sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

9. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{4n+5}{n+1}$.

Seja f a função, de domínio $]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$, definida por $f(x) = -\sqrt{x^2-16}$.

Qual é o valor de $\lim \frac{2}{f(u_n)}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 4 **(C)** 0 **(D)** $-\infty$

10. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4} - 2x & \text{se } x < 4 \\ k & \text{se } x = 4 \\ \frac{3x^2-8x-16}{4x-x^2} & \text{se } x > 4 \end{cases} \quad \text{onde } k \in \mathbb{R}.$$

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

10.1 Mostre que não existe nenhum valor real k para o qual a função f seja contínua em $x = 4$.

10.2 O gráfico da função f tem uma assíntota horizontal, quando $x \to +\infty$, e uma assíntota oblíqua, quando $x \to -\infty$.

Determine uma equação de cada uma dessas assíntotas.

11. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 5$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5-2x}{f(x)}$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 5

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.**	**4.1**	**4.2**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.1**	**10.2**	**11.**	**TOTAL**
10	20	10	18	18	10	18	20	20	10	18	18	10	**200**