TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

$3 \times 9 \times 9 \times 5 + 4 \times 3 \times 9 \times 5 = 1755$

2.

2.1 Número de casos possíveis: 11×10

Número de casos favoráveis: $6 \times 5 + 5 \times 4$

Uma vez que se pretende que as bolas retiradas sejam da mesma cor, existem duas alternativas mutuamente exclusivas: ambas serem azuis ou ambas serem brancas.

Número de casos favoráveis: $6 \times 5 + 5 \times 4$

A probabilidade pedida é igual a $\frac{6 \times 5 + 5 \times 4}{11 \times 10} = \frac{5}{11}$

2.2 Opção (B)

${}^{11}C_6 \times 5! = 5540$

${}^{11}C_6$ corresponde ao número de formas distintas de posicionar as cinco bolas ímpares em 11 posições possíveis. Para cada uma destas formas existe uma única possibilidade para as mesmas se disporem por ordem decrescente, e para cada uma destas existem $5!$ modos distintos para as restantes cinco bolas pares permutarem entre si nos cinco lugares sobrantes.

3. Opção (A)

${}^{15}C_{12} \times {}^{12}A_2 \times {}^{10}C_4$

4. $\frac{{}^{n+1}A_5}{(6n+6) \times {}^{n}C_5} = \frac{(n+1)!}{n!} - 4$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1-5)!}}{(6n+6) \times \frac{n!}{(n-5)! \times 5!}} = \frac{(n+1) \times n!}{n!} - 4$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{(n+1)!}{(n-4)!}}{(6n+6) \times \frac{n!}{(n-5)! \times 5!}} = n + 1 - 4$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)! \times (n-5)! \times 5!}{(6n+6) \times n! \times (n-4)!} = n + 1 - 4$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)! \times (n-5)! \times 5!}{6 \times (n+1) \times n! \times (n-4)!} = n - 3$

$\Leftrightarrow \frac{(n-5)! \times 5!}{6 \times (n-4)!} = n - 3$

$\Leftrightarrow \frac{(n-5)! \times 5!}{6 \times (n-4)(n-5)!} = n - 3$

$\Leftrightarrow \frac{5!}{6\times(n-4)} = n-3$

$\Leftrightarrow \frac{120}{6\times(n-4)} = n-3$

$\Leftrightarrow \frac{20}{n-4} = n-3$

$\Leftrightarrow 20 = (n-3)\times(n-4),\ (n \neq 4)$

$\Leftrightarrow n^2 - 4n - 3n + 12 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 7n - 8 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\times1\times(-8)}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow n = 8 \quad \vee \quad n = -1$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 8$.

5.

5.1 3! × 8! × 14!

5.2 ${}^{3}C_1 \times {}^{8}C_3 \times {}^{6}C_5 \times {}^{6}C_2 = 15120$

5.3 Seja n, $n \in \mathbb{N}$, o número de elementos do sexo feminino da comitiva.

$\frac{n\times(80-n)}{{}^{80}C_2} = \frac{75}{158}$

$\Leftrightarrow \frac{80n-\ ^{2}}{3160} = \frac{75}{158}$

$\Leftrightarrow 80n - n^2 = \frac{75\times3160}{158}$

$\Leftrightarrow -n^2 + 80n = 1500$

$\Leftrightarrow -n^2 + 80n - 1500 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{-80\pm\sqrt{(-8\ \ )^2-4\times(-1)\times(-1500)}}{2\times(-1)}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-80\pm\sqrt{400}}{-2}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-80}{-2} \quad \vee \quad n = \frac{-80+2}{-2}$

$\Leftrightarrow n = 30 \quad \vee \quad n = 50$

Como o número de elementos do sexo feminino é maior do que o número de elementos do sexo masculino, o número elementos do sexo feminino que integra a comitiva da seleção nacional é 50.

6. Opção (D)

$1 + n + {}^{n}C_2 = 29 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 29$

$\Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n = 58$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 56 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-5\ )}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-1-15}{2} \quad \vee \quad n = \frac{-1+15}{2}$

$\Leftrightarrow n = -8 \quad \vee \quad n = 7$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 7$.

${}^{7+2}A_{7-2} = {}^{9}A_5 = 15\,120$

7. $n = 10$; $a = x^2; b = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = x^{-1} \times x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{4}{3}}$

Termo geral do desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$, com $x \neq 0$: ${}^{10}C_k \times (x^2)^{10-k} \times \left(x^{-\frac{4}{3}}\right)^k$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$

${}^{10}C_k \times (x^2)^{10-k} \times \left(x^{-\frac{4}{3}}\right)^k = {}^{10}C_k \times x^{20-2k} \times x^{-\frac{4k}{3}} = {}^{10}C_k \times x^{20-\frac{10k}{3}}$

$$20 - \frac{10k}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

$a = {}^{10}C_6 = 210$

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$210 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$

Como cada divisor do número 210 é do tipo $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$, onde $a \in \{0, 1\}$, $b \in \{0, 1\}$, $c \in \{0, 1\}$ e $d \in \{0, 1\}$, pelo princípio geral da multiplicação o número de divisores de 210 é igual a $2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ $= 16$.

8. Opção (A)

$$\begin{aligned} {}^{n}C_p + {}^{n}C_{n-p} + 2 \times {}^{n}C_{p+1} = 4760 &\Leftrightarrow {}^{n}C_p + {}^{n}C_p + 2 \times {}^{n}C_{p+1} = 6864 \\ &\Leftrightarrow 2 \times {}^{n}C_p + 2 \times {}^{n}C_{p+1} = 6864 \\ &\Leftrightarrow 2 \times \left({}^{n}C_p + {}^{n}C_{p+1}\right) = 6864 \\ &\Leftrightarrow 2 \times \left({}^{n+1}C_{p+1}\right) = 6864 \\ &\Leftrightarrow {}^{n+1}C_{p+1} = 3432 \\ &\Leftrightarrow {}^{n+1}C_{n+1-(p+1)} = 3432 \\ &\Leftrightarrow {}^{n+1}C_{n-p} = 3432 \end{aligned}$$

9. $P\left((A \cup B)|\bar{B}\right) = \frac{P\left((A\cup B)\cap\bar{B}\right)}{P(\bar{B})} =$

$= \frac{P\left((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{B})\right)}{P(\bar{B})} =$

$= \frac{P\left((A\cap\bar{B})\cup\emptyset\right)}{P(\bar{B})} =$

$= \frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} =$

$= \frac{P(A\cap\bar{B})}{1-0,6} =$

$= \frac{P(A)-P(A\cap \mathrm{B})}{1-0,6} =$

$= \frac{0,7-P(A\cap \mathrm{B})}{0,4} =$

$= \frac{0,7-0,42}{0,4} =$

$= \frac{0,28}{0,4} = \frac{7}{10}$

C.A.: $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,58 \Leftrightarrow P(\overline{A \cap \mathrm{B}}) = 0,58$

$\Leftrightarrow 1 - P(A \cap \mathrm{B}) = 0,58$

$\Leftrightarrow P(A \cap \mathrm{B}) = 1 - 0,58$

$\Leftrightarrow P(A \cap \mathrm{B}) = 0,42$

10. Consideremos os seguintes acontecimentos:

E: “Ser peregrino europeu.”

A: “Ser peregrino acolhido por família de acolhimento.”

Sabe-se que:

- $P(E) = \frac{3}{5}$
- $P(A|E) = \frac{3}{10}$
- $P(\bar{A}|\bar{E}) = \frac{3}{4}$

$P(A|E) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap E)}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{10}$

$\Leftrightarrow P(A \cap E) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow P(A \cap E) = \frac{9}{50}$

$P(\bar{A}|\bar{E}) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A}\cap\bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{P(\bar{A}\cap\bar{E})}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{P(\bar{A}\cap\bar{E})}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{E}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{E}) = \frac{3}{10}$

Organizando os dados numa tabela:

	E	$\overline{E}$	**Total**
A	$\frac{9}{50}$		
$\overline{A}$		$\frac{3}{10}$	
Total	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$P(A \cap \bar{E}) = P(\bar{E}) - P(\bar{A} \cap \bar{E}) = \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

$P(A) = \frac{9}{50} + \frac{1}{10} = \frac{7}{25}$

	E	$\overline{E}$	**Total**
A	$\frac{9}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{25}$
$\overline{A}$		$\frac{3}{10}$	
Total	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$P(\bar{E}|A) = \frac{P(A\cap\bar{E})}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{7}{25}} = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$