Teste de Matemática A

2022 / 2023

Teste N.º 4

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r − raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r − raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r − raio da base; g − geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r − raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r − raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,\cos b + \operatorname{sen} b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \operatorname{sen} a\, \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,.\,v)' = u'.\,v + u.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}.\,u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

1. De um grupo de doze cozinheiros profissionais, vão ser escolhidos três, ao acaso, para serem os apresentadores de um conhecido concurso televisivo de culinária. Nesse grupo de doze cozinheiros, há três amigos – o José, a Joana e o João – que gostariam de ser os escolhidos.
Qual é a probabilidade de serem escolhidos, exatamente, esses três amigos?

(A) $\frac{3!}{{}^{12}C_3}$ **(B)** $\frac{1}{{}^{12}C_3}$ **(C)** $\frac{3}{{}^{12}A_3}$ **(D)** $\frac{1}{{}^{12}A_3}$

2. Uma empresa que comercializa telemóveis fez um estudo acerca das marcas de telemóveis que os alunos de uma determinada escola possuem. No âmbito desse estudo, questionaram-se todos os alunos do sexo feminino e todos os alunos do sexo masculino de 12.º ano, verificando-se que todos possuíam um telemóvel. Dos alunos questionados, sabe-se que:

- há tantos alunos do sexo feminino como do sexo masculino;
- 80% dos alunos possuem um telemóvel da marca I;
- $\frac{3}{10}$ dos alunos do sexo masculino não possuem um telemóvel da marca I.

2.1. No final de um dia de aulas, verificou-se que ficou esquecido um telemóvel da marca I pertencente a um aluno de 12.º ano dessa escola.
Qual é a probabilidade de o telemóvel pertencer a um aluno do sexo feminino?
Apresente o resultado sob a forma de percentagem.

2.2. Escolhe-se, ao acaso, um grupo de dois alunos de 12.º ano dessa escola.
Sabe-se que a probabilidade de o grupo escolhido ser constituído por um aluno que possui um telemóvel da marca I e outro que possui um telemóvel de outra marca é igual a $\frac{64}{199}$.
Seja n o número total de alunos de 12.º ano dessa escola. Determine o valor de n.
Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação, sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

3. Para um determinado número real k, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^{2x} - 1} & \text{se} \quad x < 0 \\ (x+1)^2 \ln(x + k^2) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

3.1. Para que valores reais de k existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

(A) $-\frac{1}{e}$ e $\frac{1}{e}$

(B) $-e$ e e

(C) $-\sqrt{e}$ e $\sqrt{e}$

(D) $-\sqrt[4]{e}$ e $\sqrt[4]{e}$

3.2. Considere $k = 1$.

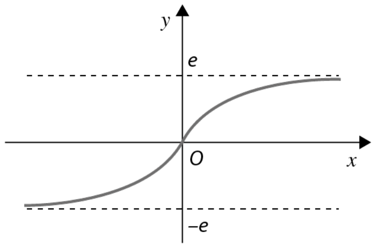
Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, estude, no intervalo $]0, +\infty[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso exista(m), esse(s) extremo(s). Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

3.3. Sem recorrer à calculadora, exceto para efetuar eventuais cálculos numéricos, mostre que existe pelo menos um ponto do gráfico de f, de abcissa compreendida entre $-\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{3}$, no qual a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é paralela ao eixo Ox.

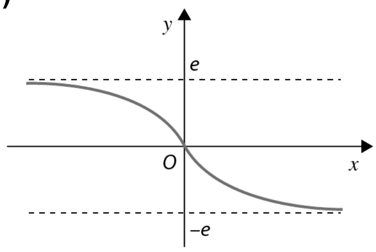
4. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. De uma certa função f, sabe-se que $\lim f(u_n) = +\infty$.

Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função f?

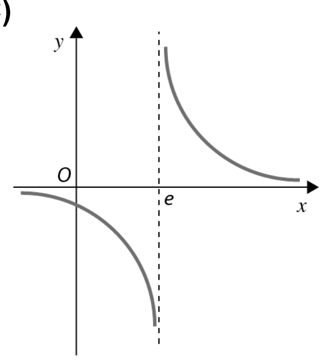
(A)



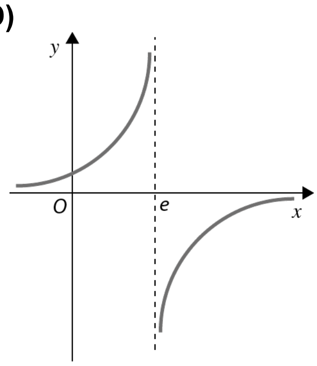
(B)



(C)



(D)



5. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que verificam a condição:

$$e^{-x}(2 + e^{2x}) < 3$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

6. Na Internet, no dia 26 de agosto de 2022, pelas 10 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espetáculo. O último bilhete foi vendido 30 minutos após o início da venda. Admita que, t minutos após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em centenas, é dado, aproximadamente, por $N(t) = 40\log_2(kt + 1), 0 \leq t \leq 30$, em que k é uma constante real positiva.

6.1. Durante a venda, houve um instante t_1 em que o número de bilhetes vendidos foi igual a 6000 unidades. Qual é o valor de k?

(A) $\frac{2^{1,5}-1}{t_1}$ **(B)** $\frac{2^{1,5}+1}{t_1}$

(C) $2^{1,5} + t_1$ **(D)** $2^{1,5} - t_1$

6.2. Considere $k = 5$.

Existe um instante t_2, a partir do qual, passados dois minutos, o número de bilhetes vendidos aumentou 10%.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor desse instante t_2, sabendo-se que existe e é único. Apresente o resultado em minutos e segundos (com os segundos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

7. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{2x} - e^{x} & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 4x - 2\ln(x-1) & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Resolva os itens **7.1.** e **7.2.**, sem recorrer à calculadora.

7.1. Estude a função g quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico, no intervalo $]1, +\infty[$ e, caso existam, escreva as respetivas equações.

7.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $]-\infty, 1[$.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números complexos z e w tais que, para $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$z = e^{i\theta} \quad \text{e} \quad w = 3e^{i(\pi-\theta)}$$

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo $\overline{z} + w$?

(A) Primeiro

(B) Segundo

(C) Terceiro

(D) Quarto

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = -3 - \sqrt{3}i \quad \text{e} \quad z_2 = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Determine o menor valor de n natural para o qual $(z_1 \times z_2)^n$ é um número real positivo.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.**	**Total**
10	18	19	10	18	10	19	10	19	19	19	10	19	**200**