TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1.

1.1. O número de casos possíveis pode ser dado por: ${}^{52}A_5$

O número de casos favoráveis pode ser dado por: ${}^{13}C_4 \times {}^{39}C_1 \times 5!$

Logo, a probabilidade é igual a $\frac{{}^{13}C_4 \times {}^{39}C_1 \times 5!}{{}^{52}A_5} = \frac{3\,346\,200}{311\,875\,200} = \frac{143}{13\,328} \approx 0{,}01$.

1.2. Opção (B)

$$\underbrace{\underline{A} \quad \underline{F} \quad \underline{F} \quad \underline{F} \quad \underline{A}}$$

$$4 \times 12 \times 11 \times 10 \times 3 \qquad = {}^{4}A_2 \times {}^{12}A_3 = 12 \times 1320 = 15\,840$$

2.

2.1. Consideremos os acontecimentos:

M: “ser do sexo masculino”

S: “ir para uma estância de esqui nas férias de Natal”

Sabemos que:

- $P(M) = \frac{1}{3}$
- $P(M \cap S) = \frac{1}{4}$
- $P(M|S) = \frac{3}{7}$

Pretendemos determinar $P(\overline{M} \cap \overline{S})$.

$$P(M|S) = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4}}{P(S)} = \frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{7}} = P(S)$$

$$\Leftrightarrow P(S) = \frac{7}{12}$$

Organizando toda a informação numa tabela:

	M	$\overline{M}$	**Total**
S	$\frac{1}{4}$		$\frac{7}{12}$
$\overline{S}$			$\frac{5}{12}$
Total	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$$P(\overline{M}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(\overline{S}) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

$P(\overline{S} \cap M) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

	M	$\overline{M}$	**Total**
S	$\frac{1}{4}$		$\frac{7}{12}$
$\overline{S}$	$\frac{1}{12}$		$\frac{5}{12}$
Total	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$P(\overline{S} \cap \overline{M}) = \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

	M	$\overline{M}$	**Total**
S	$\frac{1}{4}$		$\frac{7}{12}$
$\overline{S}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$
Total	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{1}{3}$.

2.2. Uma vez que um terço dos alunos é do sexo masculino, se n for o número total de alunos da turma, então $\frac{1}{3}n$ é o número de rapazes da turma. Assim:

$$\frac{\frac{1}{3}n \times \frac{2}{3}n}{{}^{n}C_2} = \frac{32}{69} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{9}n^2}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{32}{69} \Leftrightarrow \frac{4n^2}{9n(n-1)} = \frac{32}{69}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n}{9(n-1)} = \frac{32}{69}$$

$$\Leftrightarrow 276n = 288n - 288$$

$$\Leftrightarrow -12n = -288$$

$$\Leftrightarrow n = 24$$

Como o número total de alunos da turma é igual a 24, então $\frac{2}{3} \times 24 = 16$ é o número de raparigas da turma.

3. Opção (C)

$2^n = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$

Sabemos tratar-se da linha de ordem $n = 12$, logo existem 13 elementos.

O número de casos possíveis é dado por ${}^{13}C_2$.

O número de casos favoráveis é dado por 6×1, pois, dos 13 elementos, existem 6 conjuntos de dois elementos iguais (${}^{12}C_0 = {}^{12}C_{12}, {}^{12}C_1 = {}^{12}C_{11}, {}^{12}C_2 = {}^{12}C_{10}, \ldots, {}^{12}C_5 = {}^{12}C_7$).

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{6}{{}^{13}C_2} = \frac{6}{78} = \frac{1}{13}$.

4.

4.1. $f(x) = \sqrt{1-x} - x$

No domínio considerado, tem-se que:

$$f'(x) = \left(\sqrt{1-x} - x\right)' = \left((1-x)^{\frac{1}{2}}\right)' - x' = \frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-1} \times (1-x)' - 1 =$$

$$= -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1\right)' = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (1-x)^{-\frac{1}{2}-1} \times (1-x)' - 0 =$$

$$= \frac{1}{4} \times (1-x)^{-\frac{3}{2}} \times (-1) =$$

$$= -\frac{1}{4} \times (1-x)^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{(1-x)^3}}$$

Como $f''(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 1[$, conclui-se que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.

4.2. Opção (C)

Temos que $\lim_{x \to 0} f(x) = \sqrt{1-0} - 0 = 1$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty$.

Assim:

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$ (a opção (A) é verdadeira.)

e:

$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$ (a opção (B) é verdadeira.)

Também sabemos que:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt{1-(-\infty)} - (-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

e:

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0^-$

Assim, $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$ e não $+\infty$, como é apresentado na opção (C) que é, por isso, falsa.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{0^-}{+\infty} = 0$ (a opção (D) é verdadeira.)

4.3. $h(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{1-x}-x}{x}$ $\qquad D_h =]-\infty, 1[\setminus\{0\}$

- **Assíntotas verticais**

  $\lim_{x \to 1^-} h(x) = \frac{\sqrt{1-1}-1}{1} = -1$

$\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{\sqrt{1-0}-0}{0} = \frac{1}{0}$

Se $x \to 0^+$, $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$.

Se $x \to 0^-$, $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -\infty$.

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de h e é a única assíntota vertical, visto a função h ser contínua em todos os pontos do seu domínio, já que se trata do quociente de funções contínuas.

- **Assíntotas não verticais**

  Como o domínio de h é limitado superiormente, só faz sentido procurar assíntota não vertical quando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1-x}-x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\sqrt{1-x}}{x} - \frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}}{x} - 1 =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{x} - 1 =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{x} - 1 =$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{+\infty} - \frac{1}{-\infty}} - 1 =$$

$$= -\sqrt{0} - 1 =$$

$$= -1$$

A reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \to -\infty$.

5.

5.1. Opção (B)

f é contínua em $x = 0$ se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, isto é, se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

- $f(0) = \cos^2 0 - \text{sen} 0 = 1 - 0 = 1$

- $\lim_{x\to 0^+} (\cos^2 x - \text{sen} x) = 1$

- $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\cos^4 x - 1}{2x} + 2k\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{(\cos^2 x + 1)(\cos^2 x - 1)}{2x} + 2k =$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos^2 x + 1}{2} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos^2 x - 1}{x} + 2k =$$

$$= \frac{1+1}{2} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{-\text{sen}^2 x}{x} + 2k =$$

$$= -1 \times \underbrace{\lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \to 0^-} \text{sen}x + 2k =$$

$$= -1 \times 1 \times \text{sen}0 + 2k =$$

$$= 2k$$

Para que $2k = 1$, tem-se que $k = \frac{1}{2}$.

5.2. Em $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right]$, tem-se que:

$$f'(x) = (\cos^2 x - \text{sen}x)' = 2\cos x \times (\cos x)' - (\text{sen}x)' =$$

$$= 2\cos x \times (-\text{sen}x) - \cos x =$$

$$= -2\text{sen}x \times \cos x - \cos x$$

$f'(x) = 0$

$-2\text{sen}x\cos x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(-2\text{sen}x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \;\lor\; -2\text{sen}x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \;\lor\; \text{sen}x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\lor\; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\lor\; x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Em $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right]$, os zeros de f' são $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{6}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$
Sinal de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0
Variação de f		↘	mín.	↗	Máx.	↘	mín.

Cálculos auxiliares

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$

$f'(\pi) = -2\text{sen}(\pi)\cos(\pi) - \cos(\pi) = 0 - (-1) = 1 > 0$

$f'\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - (-1) = 1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1$

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

f é decrescente em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$. f é crescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right]$.

-1 e 1 são mínimos de f e $\frac{5}{4}$ é máximo.

5.3. Opção (D)

A equação reduzida da reta t é da forma $y = mx + b$, onde $m = f'(\pi)$.

Como, para $x > 0$, se tem $f'(x) = -2\text{sen}x\cos x - \cos x$ (determinado na alínea anterior), então $m = f'(\pi) = -2\text{sen}\pi\cos\pi - \cos\pi = 0 - (-1) = 1$.

Assim, $y = x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(\pi, f(\pi)) = (\pi, 1)$ pertence à reta t, então:

Cálculo auxiliar

$f(\pi) = \cos^2\pi - \text{sen}\pi = 1 - 0 = 1$

$1 = \pi + b \Leftrightarrow b = 1 - \pi$

Assim, $y = x + 1 - \pi$ é a equação reduzida da reta t.

A interseção da reta t com o eixo das abcissas é o ponto de coordenadas $(\pi - 1{,}0)$, já que:

$0 = x + 1 - \pi \Leftrightarrow x = \pi - 1$

Assim, a equação reduzida da reta p é da forma $y = mx + b$, onde $m = -\frac{1}{m_t} = -1$.

Logo, $y = -x + b$.

Como o ponto $(\pi - 1{,}0)$ pertence à reta p, então:

$0 = -(\pi - 1) + b \Leftrightarrow b = \pi - 1$

A equação reduzida da reta p é $y = -x + \pi - 1$.

6. Comecemos por determinar o declive da reta AB: $A\left(a, \sqrt{a+1} - 1\right)$ e $B\left(2a, \sqrt{2a+1} - 1\right)$

$$m_{AB} = \frac{\sqrt{2a+1} - 1 - \sqrt{a+1} + 1}{2a - a} = \frac{\sqrt{2a+1} - \sqrt{a+1}}{a}$$

A reta AB será paralela à reta definida por $y = ax$ se e só se $\frac{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a+1}}{a} = a$, o que é equivalente a $\frac{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a+1}}{a} - a = 0$.

Consideremos a função g, de domínio $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, definida por $g(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x} - x$.

- g é contínua em $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas.
- $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+1}-\sqrt{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = 4\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{5}{4}}\right) - \frac{1}{4} \approx 0{,}177$

  $$g(1) = \frac{\sqrt{2+1} - \sqrt{1+1}}{1} - 1 = \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1 \approx -0{,}682$$

  $$g(1) < 0 < g\left(\frac{1}{4}\right)$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists a \in \left]\frac{1}{4}, 1\right[: g(a) = 0$$

isto é:

$$\exists a \in \left]\frac{1}{4}, 1\right[: \frac{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a+1}}{a} - a = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in \left]\frac{1}{4}, 1\right[: \frac{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a+1}}{a} = a$$

7. Sabemos que:

$$d(3\alpha) = d(\alpha) - 0{,}1d(\alpha), \quad 0° < \alpha < 120°$$

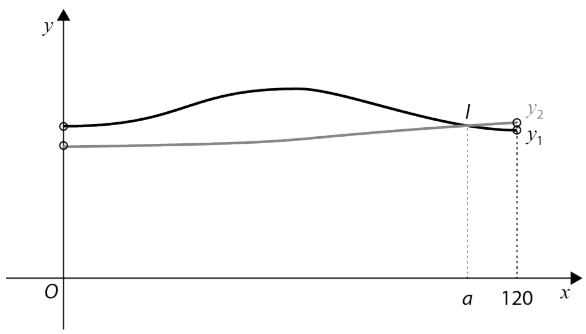
$$\Leftrightarrow d(3\alpha) = 0{,}9d(\alpha), \quad 0° < \alpha < 120°$$

$$\Leftrightarrow \frac{8{,}63}{1+0{,}09\cos(3\alpha)} = 0{,}9 \times \frac{8{,}63}{1+0{,}09\cos(\alpha)}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, e usando x como variável independente, tem-se:

$$y_1 = \frac{8{,}63}{1+0{,}09\cos(3x)}$$

$$y_2 = \frac{0{,}9\times 8{,}63}{1+0{,}09\cos(x)}$$



$I(a, b)$
$a \approx 109{,}7$

O valor de α é, aproximadamente, 109,7°.