TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1.

1.1. Consideremos os acontecimentos:

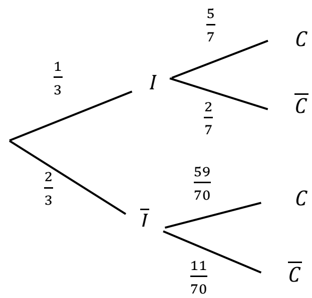
I: “o turista é de nacionalidade italiana.”

C: “o turista considera Cristiano Ronaldo o melhor jogador do mundo.”

Sabemos que:

- $P(I) = \frac{1}{3}$
- $P(C|I) = \frac{5}{7}$
- $P(\overline{C}|\overline{I}) = \frac{11}{70}$

Colocando estes dados num diagrama de árvore, obtém-se:



$$P(I \cap C) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{21}$$

$$P(I \cap \overline{C}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$$

$$P(\overline{I} \cap C) = \frac{2}{3} \times \frac{59}{70} = \frac{59}{105}$$

$$P(\overline{I} \cap \overline{C}) = \frac{2}{3} \times \frac{11}{70} = \frac{11}{105}$$

$$P(C) = \frac{5}{21} + \frac{59}{105} = \frac{4}{5}$$

Pretende-se determinar $P(I \cup C)$.

$$P(I \cup C) = P(I) + P(C) - P(I \cap C) = \frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \frac{5}{21} = \frac{94}{105}$$

1.2. Opção (D)

Número de casos possíveis: $\underbrace{\overset{T_1}{8} \times \overset{T_2}{8} \times \overset{T_3}{8} \times \overset{\dots}{\dots} \times \overset{T_n}{8}}_{n \text{ turistas}} = 8^n$

Número de casos favoráveis: 8 casos

A probabilidade pretendida é $\frac{8}{8^n} = 8^{1-n}$.

1.3. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ significa “a probabilidade de o segundo objeto retirado ser um íman, sabendo que o primeiro objeto retirado foi um *pin*”.

Como $P(B|A) = 0{,}5$, isto significa que no momento da segunda extração se encontravam no saco igual número de ímanes e de *pins*, ou seja, seis de cada tipo, já que na primeira extração se retirou um *pin* e lá permaneceram os seis ímanes. Pode concluir-se, então, que inicialmente se encontravam no saco sete *pins*.

2. Para $n > 2$:

$$^{n}A_2 + \frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2} = \frac{10}{9} + {^{n}C_{n-1}} \times {^{n-1}C_1} \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n-1)!\,(n+1)\times n!}{n!\times n!} = \frac{10}{9} + {^{n}C_1} \times (n-1)$$

$$\Leftrightarrow n \times (n-1) + \frac{(n-1)!\,(n+1)}{n!} = \frac{10}{9} + n \times (n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)!\,(n+1)}{n\times(n-1)!} = \frac{10}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} = \frac{10}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9n + 9 = 10n$$

$$\Leftrightarrow n = 9$$

$\text{C. S.} = \{9\}$

3. Opção (D)

$$2P(B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 2P(B) + P(\overline{A \cup B}) = 2P(B) + 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 2P(B) + 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$$

$$= P(B) + 1 - \tfrac{4}{3}P(B) + \tfrac{1}{3}P(B) =$$

$$= -\tfrac{1}{3}P(B) + 1 + \tfrac{1}{3}P(B) =$$

$$= 1$$

Cálculo auxiliar

$$P(A|B) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \tfrac{1}{3}P(B)$$

4. Opção (A)

$$^{n}C_0 + {^{n}C_1} + {^{n}C_2} = 352 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 352$$

$$\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n\times(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 352$$

$$\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n\times(n-1)}{2} = 352$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n = 704$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 702 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-702)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = 26 \vee n = -27$$

Logo, $n = 26$.

A soma de todos os elementos desta linha é igual a $2^{26} = 67\,108\,864$.

O elemento central desta linha é $^{26}C_{13} = 10\,400\,600$.

Assim, a diferença entre a soma de todos os elementos dessa linha e o elemento central dessa linha é $67\,108\,864 - 10\,400\,600 = 56\,708\,264$.

5. O termo geral do desenvolvimento de $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{x^2}\right)^{10}$ é:

$$^{10}C_k \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{10-k} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = {}^{10}C_k \times 2^{k-10} \times x^{5-\frac{k}{2}} \times (-1)^k \times x^{-2k} =$$

$$= {}^{10}C_k \times 2^{k-10} \times (-1)^k \times x^{5-\frac{5}{2}k},\ k \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$$

Como pretendemos determinar o termo independente:

$$5-\frac{5}{2}k = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}k = -5$$

$$\Leftrightarrow k = 2$$

Assim, o termo independente é:

$$^{10}C_2 \times 2^{2-10} \times (-1)^2 = 45 \times \frac{1}{256} \times 1 =$$

$$= \frac{45}{256}$$

6. $P(A \cup B) + P(\overline{A} \cup B) - P(\overline{A}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) - P(\overline{A}) =$

$$= P(A) + P(B) + P(B) - P(A \cap B) - (P(B) - P(A \cap B)) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(B) - P(A \cap B) - P(B) + P(A \cap B) =$$

$= P(A) + P(B)$ c.q.d.

7.

7.1. Opção (B)

O número de casos possíveis é igual a $^{12}C_2$.

O número de casos favoráveis é igual ao número de diagonais dos 4 hexágonos:

$4 \times \left({}^6C_2 - 6\right)$

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{4\times\left({}^6C_2 - 6\right)}{^{12}C_2} = \frac{6}{11}$.

7.2.

a) A face hexagonal numerada está numerada com o número primo 2 e a face triangular numerada está numerada com o número 1. Assim, restam-nos os números primos 3, 5 e 7 para distribuir pelas três faces hexagonais restantes, o que pode ser feito de 3! maneiras distintas. Por cada uma destas maneiras existem 3! modos distintas de numerar as três faces triangulares, ainda não numeradas, com os números 4, 6 e 8.

Assim, 3! × 3! = 36 é o número pedido.

b) Existem três casos mutuamente exclusivos:

1.º caso: zero números pares nas três faces triangulares restantes:

$$\underbrace{3!}_{\text{faces triangulares}} \times \underbrace{3!}_{\text{faces hexagonais}}$$

2.º caso: um número par nas três faces triangulares restantes:

$$\underbrace{{}^{3}C_1 \times {}^{3}C_2 \times 3!}_{\text{faces triangulares}} \times \underbrace{3!}_{\text{faces hexagonais}}$$

3.º caso: dois números pares nas três faces triangulares restantes:

$$\underbrace{{}^{3}C_2 \times {}^{3}C_1 \times 3!}_{\text{faces triangulares}} \times \underbrace{3!}_{\text{faces hexagonais}}$$

Logo, o número pedido é igual a:

$$3! \times 3! + {}^{3}C_2 \times {}^{3}C_1 \times 3! \times 3! \times 2 = 684$$

7.3. Opção (A)

O número de casos possíveis é igual a n^8.

${}^{8}C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher as duas faces, de entre as oito faces que vão ficar com a mesma cor. Por cada uma destas maneiras existem n cores distintas para pintar as duas faces que vão ficar com a mesma cor.

Escolhidas essas duas faces e a cor, restam $n-1$ cores distintas para colorir as seis faces restantes, logo ${}^{n-1}A_6$ é o número de modos distintos de pintar as seis faces restantes com cores diferentes entre si.

Assim, o número de casos favoráveis é dado por ${}^{8}C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6$.

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{8}C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6}{n^8}$.