TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (C)

$$\underbrace{{}^{12}C_3 \times {}^{12}C_1}_{\substack{\text{número de comissões}\\\text{com 3 raparigas e 1 rapaz}}} + \underbrace{{}^{12}C_3 \times {}^{12}C_1}_{\substack{\text{número de comissões}\\\text{com 3 rapazes e 1 rapariga}}} + \underbrace{{}^{12}C_2 \times {}^{12}C_2}_{\substack{\text{número de comissões}\\\text{com 2 rapazes e 2 raparigas}}} = {}^{12}C_3 \times 12 \times 2 + \left({}^{12}C_2\right)^2$$

1.2. 24! é o número total de maneiras de colocar todos os elementos da turma lado a lado.

2! × 23! é o número de maneiras de os gémeos ficarem juntos.

$$\underbrace{\_\_\ \_\_}_{2!}\quad \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \ldots\ \_\_}_{\text{os 22 elementos da turma que não são os gémeos}} \times\ 23!$$

Assim, o número de maneiras de todos se colocarem lado a lado para tirar uma fotografia, sem que os gémeos fiquem juntos, é 24! – 2! × 23!.

2. Opção (B)

Consideremos a linha n do triângulo de Pascal.

Sabe-se que ${}^{n}C_{n-2} = 990$, logo ${}^{n}C_2 = 990$.

Assim:

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 990 \Leftrightarrow \frac{n \times (n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 990$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 1980 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1980)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = 45 \vee n = -44$$

$n = 45$

${}^{45}C_0 = {}^{45}C_{45} = 1$

${}^{45}C_1 = {}^{45}C_{44} = 45$

${}^{45}C_2 = {}^{45}C_{43} = 990$

${}^{45}C_3 = {}^{45}C_{42} = 14\,190$

${}^{45}C_4 = 148\,995 > 20\,000$

Tem-se, então, oito elementos da linha $n = 45$ que são inferiores a 20 000.

3.

$\underline{9}\ \underline{1}\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \underline{0}$ ou $\underline{9}\ \underline{1}\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \underline{5}$

$1 \times 1 \quad \times\ {}^6C_3 \quad \times 1 \quad + \quad 1 \times 1 \quad \times\ {}^6C_3\ \times\ {}^3C_2 \quad \times 8$

${}^6C_3$ é o número de maneiras de escolher três posições, das seis disponíveis, para colocar os três algarismos 1 que faltam.
Por cada uma destas maneiras, só existe uma forma de colocar os três algarismos 5.

${}^6C_3$ é o número de maneiras de escolher três posições, das seis disponíveis, para colocar os três algarismos 1 que faltam.
${}^3C_2$ é o número de maneiras de escolher duas posições, das três disponíveis, para colocar os dois algarismos 5 que faltam.
8 é o número de opções (2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 0) para colocar na posição que sobra.

${}^6C_3\ +\ {}^6C_3\ \times\ {}^3C_2\ \times 8 = 20 + 480 = 500$

Assim, existem 500 números de telefone nas condições pretendidas.

4. Opção (D)

Número total de alunos: $10 + n + m$

Número de casos possíveis: $(10 + n + m)!$

Número de casos favoráveis: $n! \times m! \times 12!$

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{10 \text{ alunos}} \quad \underbrace{\_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}_{\substack{n \text{ alunos} \\ n!}} \quad \underbrace{\_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}_{\substack{m \text{ alunos} \\ m!}} \quad \times (10 + 1 + 1)!$$

(12! é o número de maneiras de permutar os 10 alunos que preferem o clube A, o bloco de alunos que preferem o clube B e o bloco de alunos que preferem o clube C, todos entre si.)

5. ${}^nA_2\ + 1 \times n \times 2 = 156 \Leftrightarrow n(n-1) + 2n = 156$

$\Leftrightarrow n^2 - n + 2n - 156 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-156)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow n = 12\ \vee\ n = -13 \notin \mathrm{IN}$

Assim, $n = 12$.

6.

6.1. Opção (D)

Número de casos possíveis: 9!

Número de casos favoráveis: 4! × 6!

$$\underbrace{\underline{2}\ \underline{3}\ \underline{5}\ \underline{7}}_{4!} \times \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{6!}$$

A probabilidade pretendida é $\frac{4!\times 6!}{9!} = \frac{17\,280}{362\,880} = \frac{1}{21}$.

6.2. ${}^4C_2 \times 8 \times {}^2C_1 \times 4! \times 5! = 276\,480$

- ${}^4C_2$ é o número de maneiras de escolher duas das quatro linhas horizontais onde vão ser colocadas as peças pretas;
- 8 é o número de maneiras de escolher, de entre os oito lugares das duas filas escolhidas para ficar com as sete peças pretas, o único lugar que não ficará ocupado por peças pretas;
- ${}^2C_1$ é o número de maneiras de escolher uma das duas filas restantes para se colocarem os cartões com um número par inscrito;
- 4! é o número de maneiras de permutar os quatro cartões com um número par inscrito na fila escolhida;
- 5! é o número de maneiras de permutar os cinco cartões com um número ímpar inscrito nos cinco lugares que restam.

7. Opção (B)

- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}2 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0{,}2 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}2$
  $\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}8$
- $P(A \cup B) = 0{,}8 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8$
  $\Leftrightarrow 0{,}5 + 0{,}55 - P(A \cap B) = 0{,}8$
  $\Leftrightarrow 0{,}25 = P(A \cap B)$

$$P\left(\overline{B} \middle| (A \cup B)\right) = \frac{P\left(\overline{B} \cap (A \cup B)\right)}{P(A \cup B)} = \frac{P\left((\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap B)\right)}{P(A \cup B)} =$$

$$= \frac{P\left((A \cap \overline{B}) \cup \emptyset\right)}{P(A \cup B)} =$$

$$= \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A \cup B)} =$$

$$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A \cup B)} =$$

$$= \frac{0{,}5 - 0{,}25}{0{,}8} =$$

$$= \frac{0,25}{0,8} =$$

$$= \frac{5}{16}$$

8. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: “ser rapaz”

B: “estar inscrito em Biologia”

Sabemos que:

- $P(A) = 0,4$
- $P(\overline{A}) = 0,6$
- $P\left(B\middle|\overline{A}\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P\left(B \cap \overline{A}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{6}{10}$

  $\Leftrightarrow P\left(B \cap \overline{A}\right) = \frac{2}{5}$
- $P(A|B) = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)} = \frac{3}{7}$

  $\Leftrightarrow 7P(A \cap B) = 3(P(A \cap B) + 0,4)$

  $\Leftrightarrow 7P(A \cap B) = 3P(A \cap B) + 1,2$

  $\Leftrightarrow 4P(A \cap B) = 1,2$

  $\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,3$

Organizando os dados numa tabela:

	B	$\overline{B}$	**Total**
A	0,3	?	0,4
$\overline{A}$	$\frac{2}{5}$		0,6
Total			1

$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,4 - 0,3 = 0,1; 10\%$

Logo, a probabilidade pedida é igual a 10%.

9. $P\left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) - P\left(\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (A \cup B)\right) = P\left(\overline{A} \cup B\right) - P\left(\left(\overline{A \cup B}\right) \cup (A \cup B)\right) =$

$$= P(\bar{A}) + P(B) - P\left(\overline{A} \cap B\right) - P(E) =$$

$$= 1 - P(A) + P(B) - P\left(\overline{A} \cap B\right) - 1 =$$

$$= -P(A) + P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) =$$

$$= -P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) =$$

$$= -P(A) + P(A \cap B) =$$

$$= P(A)\left(-1 + \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\right) =$$

$$= P(A)(P(B|A) - 1) \qquad \text{c.q.d.}$$

10. O termo geral deste desenvolvimento é:

$$^8C_k \ \left(\sqrt{x}\right)^{8-k} \times \left(\frac{2a}{x}\right)^k = \ ^8C_k \ x^{4-\frac{k}{2}} \times 2^k \times a^k \times x^{-k} =$$

$$= \ ^8C_k \ x^{4-\frac{3k}{2}} \times 2^k \times a^k$$

$$= \ ^8C_k \ 2^k \times a^k \times x^{4-\frac{3k}{2}}, \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$4 - \frac{3k}{2} = 1 \Leftrightarrow 3 = \frac{3k}{2} \Leftrightarrow k = 2$$

O coeficiente do termo em x é $^8C_2 \ \times 2^2 \times a^2$. Logo:

$$^8C_2 \ \times 4a^2 = 1008 \Leftrightarrow 112a^2 = 1008 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 3$$

Como $a \in \mathrm{IR}^-$, então $a = -3$.

11. Sabemos que existem sete pontos distintos assinalados na reta r e n pontos distintos assinalados na reta s.

$^{7+n}C_3$ é o número de maneiras de escolher quaisquer três pontos (sem que a ordem interesse) de entre os $7 + n$ pontos assinalados nas duas retas. Logo, o número de casos possíveis é $^{7+n}C_3$.

Existem duas hipóteses mutuamente exclusivas para definir um triângulo com os três pontos escolhidos: ou se escolhe um ponto da reta r e dois pontos da reta s ou se escolhem dois pontos da reta r e um ponto da reta s.

Para o primeiro caso, existem 7 modos distintos de escolher um ponto da reta r e, por cada uma destes modos, existem $^nC_2$ maneiras distintas de escolher dois pontos da reta s (sem que a ordem interesse).

Para o segundo caso, existem $^7C_2$ modos distintos de escolher dois pontos da reta r (sem que a ordem interesse) e, por cada um destes modos, existem n maneiras distintas de escolher um ponto da reta s.

Logo, o número de casos favoráveis é $7 \times \ ^nC_2 \ + \ ^7C_2 \ \times n$.

Segundo a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis e em número finito. Logo, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{7 \times \ ^nC_2 \ + \ ^7C_2 \ \times n}{^{7+n}C_3}$$