Prova-Modelo de Exame de Matemática A 2024 – 12.º ano

Proposta de resolução

1. Opção (C)

$$\lim u_n = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^-$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to e^-} f(x) = \lim_{x \to e^-} \ln(e-x) = \ln(0^+) = -\infty$$

2.

2.1. Consideremos os acontecimentos F e V definidos por:

F: "O aluno gosta de futebol."

V: "O aluno refere que não irá ver o jogo."

Sabemos que:

- $P(F) = 75\% = \frac{3}{4}$
- $P(\overline{V}) = \frac{3}{10}$
- $P(F|\overline{V}) = \frac{1}{3}$

Pretende-se determinar $P(V \cap \overline{F})$.

Organizando os dados numa tabela, tem-se:

	V	$\overline{V}$	
F	$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{4}$
$\overline{F}$	$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{4}$
	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Cálculos auxiliares

- $P(F|\overline{V}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(F\cap\overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(F \cap \overline{V}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10}$

  $\Leftrightarrow P(F \cap \overline{V}) = \frac{1}{10}$
- $P(F \cap V) = \frac{3}{4} - \frac{1}{10} = \frac{13}{20}$
- $P(V \cap \overline{F}) = \frac{7}{10} - \frac{13}{20} = \frac{1}{20}$

Assim, $P(V \cap \overline{F}) = \frac{1}{20}$.

2.2. Opção (B)

Número de casos possíveis: 12!

Número de casos favoráveis: 3! × 10!

$$\underbrace{G \quad C \quad T}_{3!} \times \qquad \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad} \times 10!$$

A probabilidade pretendida é, então, $\frac{3!\times 10!}{12!} = \frac{1}{22}$.

2.3. Sendo n o número de jogadores com idade superior ou igual a 30 anos, $52-n$ é, então, o número de jogadores com idade inferior a 30 anos.

Sabe-se que existem 731 maneiras de escolher esses dois jogadores, de modo que ambos tenham idade superior ou igual a 30 anos ou ambos tenham idade inferior a 30 anos.

Assim:

$$ {}^{n}C_2 + {}^{52-n}C_2 = 731 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(52-n)!}{2!(52-n-2)!} = 731 $$

$$ \Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)\times(n-2)!}{2!(n-2)!} + \frac{(52-n)\times(51-n)\times(50-n)!}{2!(50-n)!} = 731 $$

$$ \Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)}{2} + \frac{(52-n)\times(51-n)}{2} = 731 $$

$$ \Leftrightarrow n^2 - n + 2652 - 52n - 51n + n^2 = 1462 $$

$$ \Leftrightarrow 2n^2 - 104n + 1190 = 0 $$

$$ \Leftrightarrow n = \frac{-(-104)\pm\sqrt{(-104)^2-4\times2\times1190}}{2\times2} $$

$$ \Leftrightarrow n = \frac{104\pm\sqrt{1296}}{4} $$

$$ \Leftrightarrow n = \frac{104-36}{4} \quad \vee \quad n = \frac{104+36}{4} $$

$$ \Leftrightarrow n = 17 \quad \vee \quad n = 35 $$

Assim, $n = 17$, uma vez que existem menos jogadores com idade superior ou igual a 30 anos.

3.

3.1. Opção (D)

As coordenadas do ponto A são (4, 0, 0), uma vez que as coordenadas deste ponto são da forma $(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}$. Como $A \in ABC$, tem-se que:

$30x + 24 \times 0 + 11 \times 0 = 120 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

Como a reta tem de ser perpendicular ao plano ABC, então um vetor diretor da reta tem de ser colinear com um vetor normal ao plano.

Seja $\vec{n}$ um vetor colinear ao plano $\vec{n}(30, 24, 11)$.

Nas opções (A) e (B), apesar de se encontrarem definidas retas que contêm o ponto A, os respetivos vetores diretores não são colineares com $\vec{n}(30, 24, 11)$.

Na opção (C), encontra-se definida uma reta com vetor diretor colinear com $\vec{n}(30{,}24{,}11)$, mas o ponto $A(4, 0, 0)$ não pertence a essa reta:

$$ (4,0,0) = (-34,-24,-11) + k(-30,-24,-11) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -34 - 30k \\ 0 = -24 - 24k \\ 0 = -11 - 11k \end{cases} $$

$$ \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{38}{30} \\ k = -1 \\ k = -1 \end{cases} \quad \text{Condição impossível} $$

Na opção (D), encontra-se definida uma reta de vetor diretor de coordenadas $\left(15, 12, \frac{11}{2}\right)$ que é colinear com o vetor de coordenadas (30, 24, 11) e que contém o ponto $A(4, 0, 0)$:

$$ (4,0,0) = (34,24,11) + k\left(15,12,\frac{11}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 34 + 15k \\ 0 = 24 + 12k \\ 0 = 11 + \frac{11}{2}k \end{cases} $$

$$ \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{30}{15} \\ k = -\frac{24}{12} \\ -\frac{11}{2}k = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases} $$

3.2. O ponto C é o ponto de interseção da reta OC com o plano ABC.

Reta OC: $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -3\right), k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico: $\left(-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}, -3k\right), k \in \mathbb{R}$

$ABC: 30x + 24y + 11z = 120$

$$30 \times \left(-\frac{k}{2}\right) + 24 \times \left(-\frac{k}{2}\right) + 11 \times (-3k) = 120$$

$$\Leftrightarrow -15k - 12k - 33k = 120$$

$$\Leftrightarrow -60k = 120$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

As coordenadas de C são $\left(-\frac{-2}{2}, -\frac{-2}{2}, -3 \times (-2)\right) = (1, 1, 6)$.

Como se pretende que a superfície esférica de centro em C seja tangente ao plano xOy, então o seu raio é a cota do ponto C, isto é, 6. Assim, a equação reduzida da superfície esférica pretendida é $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 36$.

3.3. $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB} = \frac{2\sqrt{41}}{3} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AP}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\alpha = \frac{2\sqrt{41}}{3}$

$$\Leftrightarrow 2 \times \sqrt{41} \times \cos\alpha = \frac{2\sqrt{41}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$$

Cálculos auxiliares

- Coordenadas do ponto B: $B(0, y, 0), y \in \mathbb{R}^+$

  $B \in ABC: 30 \times 0 + 24y + 11 \times 0 = 120 \Leftrightarrow 24y = 120$

  $\Leftrightarrow y = 5$

  $B(0,5,0)$
- $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 5, 0) - (4, 0, 0) = (-4, 5, 0)$
- $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{41}$

Pretende-se o valor de $\cos(2\alpha)$:

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \text{sen}^2\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{8}{9}$$

Assim:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{8}{9} =$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{8}{9} =$$

$$= -\frac{7}{9}$$

4. Seja (a_n) a sucessão que representa a área do triângulo de ordem n.

Tem-se que:

- $a_1 = \frac{3\times 3}{2} = \frac{9}{2}$
- $a_2 = \frac{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{8}$
- $a_3 = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{32}$
- …

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e primeiro termo $\frac{9}{2}$.

Assim, a soma das áreas de n triângulos pode ser dada por $S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \times \frac{9}{2}$.

Sendo que $n \to +\infty$, tem-se:

$$\text{Lim}\, S_n = \lim \left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \times \frac{9}{2} \right) =$$

$$= \frac{1-0}{\frac{3}{4}} \times \frac{9}{2} =$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{9}{2} =$$

$$= 6$$

5.

5.1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe se $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

- $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}(kx)}{e^{x+2}-e^2} =$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}(kx)}{e^2(e^x-1)} =$$

$$= \frac{1}{e^2} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\text{sen}(kx)}{kx}\times k}{\frac{e^x-1}{x}} =$$

$$= \frac{k}{e^2} \times \frac{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}(kx)}{kx}}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}} =$$

Considerando a mudança de variável $kx = y$, $x \to 0^- \Rightarrow y \to 0^-$:

$$= \frac{k}{e^2} \times \frac{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\text{sen}y}{y}}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}} =$$

$$= \frac{k}{e^2} \times \frac{1}{1} =$$

$$= \frac{k}{e^2}$$

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 \ln x + 1) =$$
- $$= 1 + \lim_{x\to 0^+} (x^2 \ln x) =$$

Considerando a mudança de variável $\frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$, $x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$:

$$= 1 + \lim_{y\to +\infty} \left(\frac{1}{y^2} \times \ln\left(\frac{1}{y}\right) \right) =$$

$$= 1 + \lim_{y\to +\infty} \left(\frac{\ln(y^{-1})}{y} \times \frac{1}{y} \right) =$$

$$= 1 + \lim_{y\to +\infty} \left(-\frac{\ln y}{y} \times \frac{1}{y} \right) =$$

$$= 1 - \lim_{y\to +\infty} \frac{\ln y}{y} \times \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{y} =$$

$$= 1 - 0 \times 0 =$$

$$= 1$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe se $\frac{k}{e^2} = 1$, ou seja, $k = e^2$.

5.2. Em $]0, +\infty[$:

$f'(x) = (x^2 \ln x + 1)' =$

$\quad = (x^2 \ln x)' + 1' =$

$\quad = 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} =$

$\quad = 2x\ln x + x =$

$\quad = x(2\ln x + 1)$

$f'(x) = 0$

$x(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad 2\ln x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\notin \mathrm{IR}^+} \quad \vee \quad \ln x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
x		$+$	$+$	$+$
$2\ln x + 1$		$-$	0	$+$
Sinal de f'		$-$	0	$+$
Variação de f		$\searrow$	$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ mín.	$\nearrow$

Cálculo auxiliar

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) + 1 =$

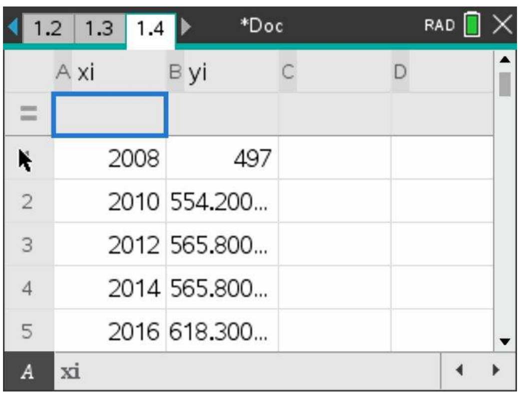
$\quad = \frac{1}{e} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$

$\quad = -\frac{1}{2e} + 1$

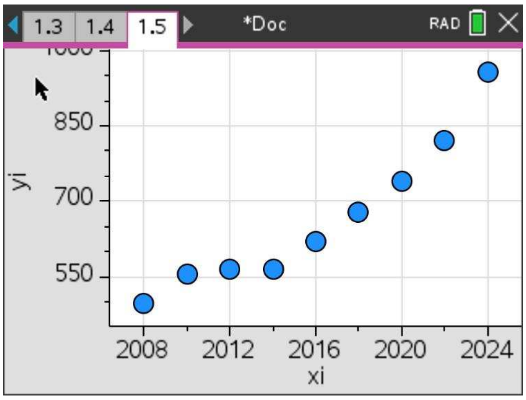
f é estritamente decrescente em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e é estritamente crescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$;

$1 - \frac{1}{2e}$ é mínimo relativo em $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

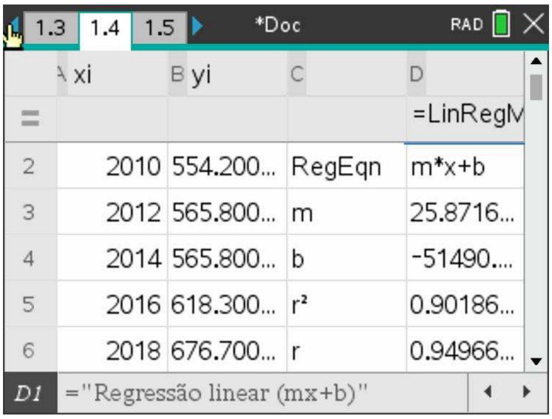
6. Inserimos os valores das variáveis em duas listas na calculadora, como se vê na figura abaixo:



Representamos a respetiva nuvem de pontos:



Determinamos os valores de a, de b e de r:



	A xi	B yi	C	D
=				=LinRegM
2	2010	554.200...	RegEqn	m*x+b
3	2012	565.800...	m	25.8716...
4	2014	565.800...	b	-51490....
5	2016	618.300...	r²	0.90186...
6	2018	676.700...	r	0.94966...

D1 ="Regressão linear (mx+b)"

Assim:

I – **a)**

II – **c)**

III – **a)**

IV – **b)**, pois $y = 25{,}87 \times 2023 - 51490{,}86 \approx 844{,}15$.

7. g é contínua em $\mathbb{R}$, logo o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais: $y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$

- $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e + e^x) - x + xe^{-x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln\left(e^x\left(\frac{e}{e^x} + 1\right)\right)}{x} - 1 + e^{-x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln(e^x) + \ln\left(\frac{e}{e^x} + 1\right)}{x} - 1 + e^{-x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x + \ln\left(\frac{e}{e^x} + 1\right)}{x} - 1 + e^{-x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[1 + \frac{\ln\left(\frac{e}{e^x} + 1\right)}{x} - 1 + e^{-x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln\left(\frac{e}{e^x}+1\right)}{x} + e^{-x} \right] =$$

$$= \frac{0}{+\infty} + 0 =$$

$$= 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [\ln(e + e^x) - x + xe^{-x}] = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln(e + e^x) - x + \frac{x}{e^x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} [\ln(e + e^x) - ln(e^x)] + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(\frac{e + e^x}{e^x}\right) \right] + \frac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(\frac{e}{e^x} + 1\right) \right] + \frac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}} =$$

$$= \ln(1) + \frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0 + 0 =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to +\infty$.

- $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(e + e^x) - x + xe^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\ln(e + e^x)}{x} - 1 + e^{-x} \right) =$$

$$= \frac{\ln(e)}{-\infty} - 1 + e^{+\infty} =$$

$$= 0 - 1 + (+\infty) =$$

$$= +\infty$$

Como o valor obtido não é um número real, o gráfico de g não admite assíntota não vertical quando $x \to -\infty$.

Assim, o gráfico de g admite apenas uma assíntota de equação $y = 0$.

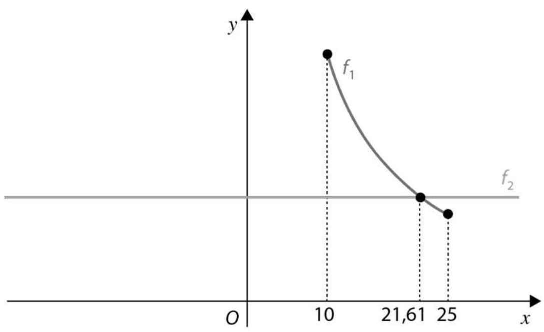
8. Pretendemos determinar o valor n_1 tal que $P(2n_1) = P(n_1) - 350$ e $10 \leq n_1 \leq 25$

Ou seja, pretendemos determinar a solução da equação $P(n) - P(2n) = 350$ em $[10,25]$.

Usando x como variável independente:

$$f_1(x) = \frac{200\,000 \times 0{,}003 \times (1{,}003)^{12x}}{(1{,}003)^{12x} - 1} - \frac{200\,000 \times 0{,}003 \times (1{,}003)^{24x}}{(1{,}003)^{24x} - 1}$$

$$f_2(x) = 350$$



$$P(21{,}61) = \frac{200\,000 \times 0{,}003 \times (1{,}003)^{12 \times 21{,}61}}{(1{,}003)^{12 \times 21{,}61} - 1} =$$

$$= 1110{,}86$$

A prestação será de 1110,86 euros.

9. $D = \{x \in \mathbb{R}: 12e^x - 16 > 0\} = \left]\ln\left(\frac{4}{3}\right), +\infty\right[$

Cálculo auxiliar
$12e^x - 16 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{4}{3} \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

Em $\left]\ln\left(\frac{4}{3}\right), +\infty\right[$:

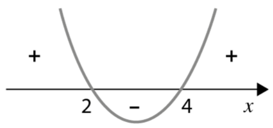
$$\begin{aligned}\ln(12e^x - 16) \leq 2x + \ln(2) &\Leftrightarrow \ln(12e^x - 16) \leq \ln(e^{2x}) + \ln(2)\\ &\Leftrightarrow \ln(12e^x - 16) \leq \ln(2 \times e^{2x})\\ &\Leftrightarrow 12e^x - 16 \leq 2 \times e^{2x}\\ &\Leftrightarrow -2e^{2x} + 12e^x - 16 \leq 0\\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 8 \geq 0\end{aligned}$$

Consideremos a mudança de variável $e^x = y$:

$$y^2 - 6y + 8 \geq 0$$

Cálculos auxiliares

- $y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 8}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow y = 4 \ \vee \ y = 2$



$$y^2 - 6y + 8 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 2 \ \vee \ y \geq 4$$

Substituindo y por e^x:

$e^x \leq 2 \ \vee \ e^x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq \ln(2) \ \vee \ x \geq \ln(4)$

C.S. $= \left]\ln\left(\frac{4}{3}\right), \ln(2)\right] \cup [\ln(4), +\infty[$

Cálculo auxiliar
$\frac{4}{3} < 2 \quad \ln\left(\frac{4}{3}\right) < \ln(2)$

10. Como $D_{g'} = \mathbb{R}$, g é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Se g é diferenciável em $\mathbb{R}$, então g é contínua em $\mathbb{R}$. Em particular, g é contínua em $x = 0$, ou seja, $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$. Como a reta de equação $y = -4x + 8$ é tangente ao gráfico de g em $x = 0$, então $g(0) = -4 \times 0 + 8 = 8$, logo $\lim_{x \to 0} g(x) = 8$.

Daqui se conclui que a proposição I é falsa.

Sabemos que $g'(x) = e^{-x} \times f(x)$. Então, tem-se que:

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
e^{-x}	+	+	+	+	+
$f(x)$	–	0	–	0	+
Sinal de g'	–	0	–	0	+
Variação de g	↘		↘	$g(1)$ mín	↗

Concluímos que $g(-2)$ não é um extremo de g, logo a proposição II é falsa.

Verifica-se que:

$g''(x) = (e^{-x})' \times f(x) + e^{-x} \times f'(x) =$

$= -e^{-x} \times f(x) + e^{-x} \times f'(x) =$

$= e^{-x}(f'(x) - f(x))$

$g''(x) \leq 0 \Leftrightarrow e^{-x}(f'(x) - f(x)) \leq 0$

$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow f'(x) \leq f(x)$

Como, em $]-\infty, -2[$, se tem que $f'(x) > 0$ e $f(x) < 0$, então $f'(x) > f(x)$. Logo, o gráfico de g não tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$, isto é, a proposição III é falsa.

11. Opção (D)

$w = z \times e^{i\frac{4\pi}{6}} = (2+i) \times e^{i\frac{2\pi}{3}} =$

$= (2+i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= (2+i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= -1 + \sqrt{3}i - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)i$

$\text{Re}(w) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{Im}(w) = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$

$\frac{w+\overline{w}}{2} = \text{Re}(w) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{w-\overline{w}}{2i} = \text{Im}(w) = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$

12.

Cálculos auxiliares

- $4e^{i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\frac{\pi}{3}\right) + 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

  $= 2 + 2\sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i =$

  $= 3 + \sqrt{3}i =$

  $= \sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{6}}$

- $|3 + \sqrt{3}i| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$

  $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \alpha \in 1.^\circ \text{Q}$

  $\alpha = \frac{\pi}{6}$, por exemplo.

- $2(2+i)^2 - 2i^{-3} = 2\big(4 + 4i + (-1)\big) - 2i^{-3+4} = 2(3+4i) - 2i =$

  $= 6 + 8i - 2i =$

  $= 6 + 6i =$

  $= \sqrt{72}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$w=\left(\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{72}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^{12}=\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{12}=\left(e^{i\left(-\frac{2\pi}{24}\right)}\right)^{12}=$$

$$=e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\times 12\right)}=$$

$$=e^{i(-\pi)}=$$

$$=e^{i\pi}$$

$z^4=w \Leftrightarrow z^4=e^{i\pi}$

Pretendemos determinar as raízes quartas de $e^{i\pi}$ que são do tipo:

$$z_k=\sqrt[4]{1}\times e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k\in\{0,1,2,3\}$$

$k=0 \backsim z_0=1\times e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=1 \backsim z_1=1\times e^{i\frac{3\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=2 \backsim z_2=1\times e^{i\frac{5\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=3 \backsim z_3=1\times e^{i\frac{7\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

C.S. $=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

13. A abcissa do ponto P, ponto de interseção dos gráficos de f e g, é o valor real de x tal que $f(x)=g(x)$.

$\ln a\ x^2=\frac{\ln a}{x} \Leftrightarrow x^2=\frac{\ln a}{x\ \ln a}$ (como $a>1, \ln a\neq 0$)

$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{1}{x}=0$

$\Leftrightarrow \frac{x^3-1}{x}=0$

$\Leftrightarrow x^3-1=0\ \land\ x\neq 0$

$\Leftrightarrow x^3=1\ \land\ x\neq 0$

$\Leftrightarrow x=1\ \land\ x\neq 0$

Coordenadas de P: $\left(1,f(1)\right)=(1,\ln a)$

A reta t é tangente ao gráfico de f no ponto P – seja m_t o seu declive:

$m_t=f'(1)=2\ln a$, pois $f'(x)=(\ln a\ x^2)'=2\ln a\ x$

A reta s é tangente ao gráfico de g no ponto P – seja m_s o seu declive:

$m_s=g'(1)=-\ln a$, pois $g'(x)=\left(\frac{\ln a}{x}\right)'=\ln a\ \times\left(\frac{1}{x}\right)'=\ln a\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{\ln a}{x^2}$

Assim:

$m_t-m_s=2\ln a-(-\ln a)=3\ln a=\ln\left(a^3\right)$