Prova-Modelo de Exame

Matemática A

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

12.º Ano de Escolaridade

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r \quad (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2} \quad (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g \quad (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2 \quad (r - \text{raio})$

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\, \pi\, r^3 \quad (r - \text{raio})$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a\ \cos b + \text{sen}\, b\ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \text{sen}\, a\ \text{sen}\, b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\, u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u'\, \text{sen}\, u$

$(\text{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\, \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

* **1.** Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Seja f a função, de domínio $]-\infty, e[$, definida por $f(x) = \ln(e-x)$.

$\lim f(u_n)$ é igual a:

(A) 1 **(B)** e **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

2. Um dos jogos do Campeonato Europeu de Futebol de 2024, que decorre na Alemanha, está marcado para dia 26 de junho e contará com a participação das seleções nacionais de Portugal e da Geórgia.

* **2.1.** Numa escola da cidade de Gelsenkirchen, onde irá decorrer o jogo, fez-se um inquérito e concluiu-se que:

- 75% dos alunos gostam de futebol;
- $\frac{3}{10}$ dos alunos referem que não irão ver o jogo;
- um terço dos alunos que referem não ir ver o jogo gostam de futebol.

Determine a probabilidade de um aluno que participou no inquérito, escolhido ao acaso, referir a intenção de ir ver o jogo e não gostar de futebol.
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

* **2.2.** Em campo, a equipa portuguesa é constituída por onze jogadores, um dos quais é o guarda-redes e outro é o capitão de equipa.
Colocando-se, ao acaso, todos estes elementos e o seu treinador em fila, qual é a probabilidade de o guarda-redes, o capitão de equipa e o treinador ficarem juntos?

(A) $\frac{1}{11}$ **(B)** $\frac{1}{22}$ **(C)** $\frac{1}{110}$ **(D)** $\frac{1}{220}$

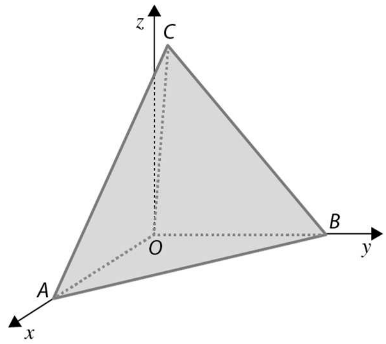
2.3. Cada seleção convocou 26 jogadores para o Campeonato Europeu de Futebol de 2024.
Considere que, dos 52 jogadores convocados pelos selecionadores de Portugal e da Geórgia, n têm idade superior ou igual a 30 anos. Sabe-se ainda que existem mais jogadores com idade inferior a 30 anos do que com idade superior ou igual a 30 anos.
Pretende-se escolher, ao acaso, dois dos 52 convocados para participarem numa entrevista para um canal televisivo. Sabe-se que existem 731 maneiras de escolher esses dois jogadores, de modo que ambos tenham idade superior ou igual a 30 anos ou que ambos tenham idade inferior a 30 anos. Determine o valor de n.
Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- resolver a equação apresentada, sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

3. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide triangular $[OABC]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem aos semieixos positivos Ox e Oy, respetivamente;
- o plano ABC é definido por $30x + 24y + 11z = 120$;
- a reta definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (1, 2, 4) + k\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -3\right), k \in \mathbb{R}$ é paralela à reta OC.



* **3.1.** Qual das seguintes equações vetoriais define a reta perpendicular ao plano ABC e que passa no ponto A?

(A) $(x, y, z) = (4, 0, 0) + k(0, -11, 24), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (4, 0, 0) + k(-11, 0, 30), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (-34, -24, -11) + k(-30, -24, -11), k \in \mathbb{R}$

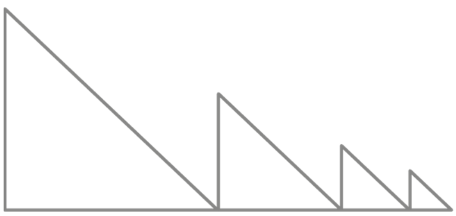
(D) $(x, y, z) = (34, 24, 11) + k\left(15, 12, \frac{11}{2}\right), k \in \mathbb{R}$

Resolva os itens **3.2.** e **3.3.** sem recorrer à calculadora.

* **3.2.** Determine a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto C e que é tangente ao plano xOy.

3.3. Seja P um ponto do espaço, do qual se sabe que dista 2 unidades do ponto A e que é tal que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2\sqrt{41}}{3}$. Sendo $\alpha = P\hat{A}B$, determine o valor exato de $\cos(2\alpha)$.

4. Uma composição geométrica é constituída por uma sucessão de triângulos retângulos e isósceles, em que, à exceção do primeiro, a medida de cada um dos catetos do triângulo é metade da medida dos catetos do triângulo anterior. Considere que a medida dos catetos do primeiro triângulo é 3. Na figura representam-se os primeiros quatro triângulos dessa composição.



Seja S_n a soma das áreas de n triângulos assim construídos.

Determine o valor de $\lim\, S_n$.

5. Considere, para um certo número real positivo k, a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{e^{x+2}-e^2} & \text{se} \quad x<0\\ x^2\ln x+1 & \text{se} \quad x>0\end{cases}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** sem recorrer à calculadora.

* **5.1.** Determine o valor de k, de modo que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

* **5.2.** Estude, em $]0,+\infty[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia da função f.

* **6.** Registou-se o salário mínimo, em euros, de um trabalhador, em Portugal, entre 2008 e 2024.

Na tabela abaixo, onde se encontram alguns desses registos, x designa o ano e y designa o correspondente salário mínimo, em euros, de um trabalhador.

Ano (x)	2008	2010	2012	2014	2016	2018	2020	2022	2024
Salário mínimo, em euros (y)	497	554,2	565,8	565,8	618,3	676,7	740,8	822,5	956,7

Considere válido um modelo de regressão linear, $y=ax+b$ (em que a e b são números reais), obtido a partir dos dados apresentados na tabela.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

O diagrama de dispersão, relativo aos dados apresentados na tabela, leva a concluir que a associação linear entre as variáveis é__**I**__.

A equação da reta de regressão, com os valores de a e de b arredondados às centésimas, é_**II**_.

O coeficiente de correlação linear das variáveis x e y, com aproximação às centésimas, é __**III**__.

Com base neste modelo, uma estimativa do salário mínimo, em euros, em 2023, é aproximadamente__**IV**__ euros.

I	**II**	**III**	**IV**
a) forte e positiva	**a)** $y=0{,}03x-1992{,}77$	**a)** $r\approx 0{,}95$	**a)** $890{,}15$
b) forte e negativa	**b)** $y=21{,}41x-42\,508{,}85$	**b)** $r\approx -0{,}9$	**b)** $844{,}15$
c) fraca e positiva	**c)** $y=25{,}87x-51\,490{,}86$	**c)** $r\approx 0{,}15$	**c)** $802{,}15$

7. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \ln(e + e^x) - x + xe^{-x}$$

Estude a função g quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico e, caso exista(m), escreva a(s) respetiva(s) equação(ões).

* **8.** Para adquirir a sua primeira casa, um casal pretende pedir um empréstimo a um banco e pagar prestações mensais iguais.

O banco propõe que o valor da prestação mensal a pagar, P, em euros, em função do prazo do empréstimo, n, em anos, seja dado pela expressão:

$$P(n) = \frac{200\,000 \times 0{,}003 \times (1{,}003)^{12n}}{(1{,}003)^{12n} - 1}\text{, com } 10 \leq n \leq 50$$

Seja n_1 o prazo inicial do empréstimo que o casal decidiu fazer.

Sabe-se que, no caso de esse prazo duplicar, a prestação mensal diminuirá 350 euros.

Determine, utilizando a calculadora gráfica, o valor da prestação mensal a pagar, considerando o prazo inicial do empréstimo, n_1.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas;
- apresente o valor pedido arredondado às centésimas.

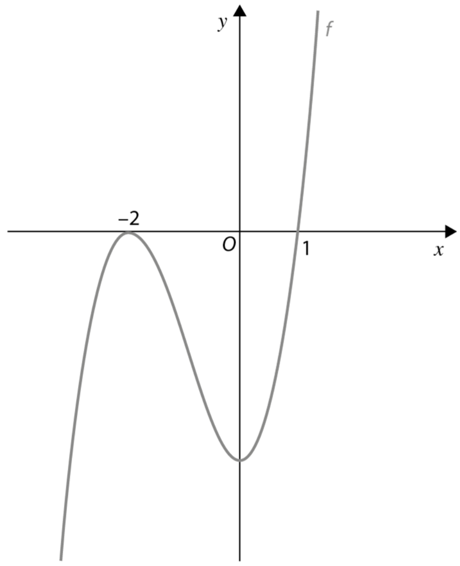
Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

9. Sem recorrer à calculadora, resolva a condição:

$$\ln(12e^x - 16) \leq 2x + \ln(2)$$

Apresente a sua resposta na forma de um intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

10. Na figura está representada, num referencial ortogonal Oxy, parte do gráfico de uma função polinomial f, de grau 3.



Sabe-se que:

- -2 e 1 são os únicos zeros da função f;
- g', primeira derivada de uma certa função g, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $g'(x) = e^{-x} \times f(x)$;
- a reta de equação $y = -4x + 8$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

Considere as seguintes proposições.

I. $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -4$.

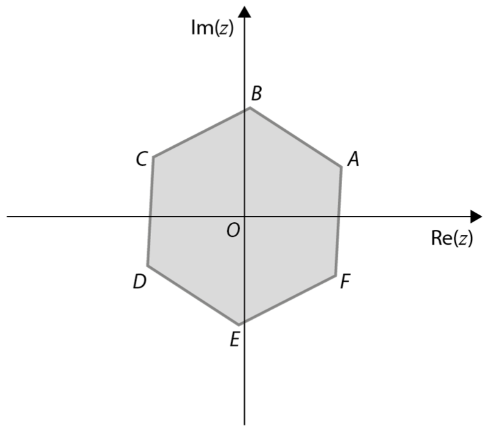
II. $g(-2)$ é um extremo relativo de g.

III. O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$.

Justifique que as proposições **I**, **II** e **III** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

11. Na figura está representado, no plano complexo, um hexágono regular, $[ABCDEF]$, inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial, O.



Os pontos A e C são os afixos dos números complexos z e w, respetivamente. Seja $z = 2 + i$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\frac{w - \overline{w}}{2i} = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$

(B) $\frac{w - \overline{w}}{2i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

(C) $\frac{w + \overline{w}}{2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$

(D) $\frac{w + \overline{w}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = \left(\frac{\sqrt{6}\left(4e^{i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)}{2\,(2+i)^2 - 2i^{-3}}\right)^{12}$.

Determine, em $\mathbb{C}$, as soluções da equação $z^4 = w$.

Apresente os valores pedidos na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

* **13.** Para um determinado valor de $a > 1$, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln a\ x^2$, e a função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $g(x) = \frac{\ln a}{x}$.

Considere ainda:

- o ponto P, ponto de interseção dos gráficos das funções f e g;
- a reta t, tangente ao gráfico da função f no ponto P;
- a reta s, tangente ao gráfico da função g no ponto P.

Mostre que a diferença entre o declive da reta t e o declive da reta s pode ser dado, em função de a, por $\ln(a^3)$.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>2.1.</td><td>2.2.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>5.1.</td><td>5.2.</td><td>6.</td><td>8.</td><td>10.</td><td>11.</td><td>13.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">2.3.</td><td colspan="2">3.3.</td><td colspan="2">4.</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">9.</td><td colspan="2">12.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>