

Prova-Modelo de Exame de Matemática A 2025 – 12.º ano
Proposta de resolução

1. Opção (D)

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Se $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, então $\lim(x_n) = e$ e $\lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow e} \ln(e^2 - x) = \ln(e^2 - e) \neq -\infty$.

$$\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n$$

Se $x_n = \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n$, então $\lim(x_n) = \sqrt{e}$ e $\lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{e}} \ln(e^2 - x) = \ln(e^2 - \sqrt{e}) \neq -\infty$.

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n$$

Se $x_n = \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n$, então $\lim(x_n) = e^{-1}$ e $\lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow e^{-1}} \ln(e^2 - x) = \ln\left(e^2 - \frac{1}{e}\right) \neq -\infty$.

$$\left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

Se $x_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$, então $\lim(x_n) = (e^2)^-$ e $\lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow (e^2)^-} \ln(e^2 - x) = \ln(e^2 - (e^2)^-) = \ln(0^+) = -\infty$.

2.

2.1. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ existe se $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{1-x} - 2x + 1}{x - 1} =$$

Considerando a mudança de variável $1 - x = y \Leftrightarrow x = 1 - y$, $x \rightarrow 1^- \Rightarrow y \rightarrow 0^+$:

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^{y-2(1-y)+1}}{-y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^{y-2+2y+1}}{-y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^{y-1+2y}}{-y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^y - 1}{-y} - 2 \right) =$$

$$= - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} - 2 =$$

$$= -1 - 2 =$$

$$= -3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\ln\left(1 + e^{\frac{1}{x-1}}\right) - \frac{1}{x-1} \right) =$$

Considerando a mudança de variável $\frac{1}{x-1} = y$, $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty$:

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^y) - y) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^y) - \ln(e^y)) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{1+e^y}{e^y}\right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{1}{e^y} + 1 \right) \right) = \\
&= \ln \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^y} + 1 \right) \right) = \\
&= \ln(1) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$, então não existe $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

2.2. Em $]-\infty, 1[$: $h(x) = \frac{e^{1-x}-2x+1}{x-1} + \frac{2e^{1-x}+2x-1}{x-1} = \frac{3e^{1-x}}{x-1}$

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(3e^{1-x})'(x-1) - 3e^{1-x} \times (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-3e^{1-x}(x-1) - 3e^{1-x}}{(x-1)^2} = \\
&= \frac{-3e^{1-x}(x-1+1)}{(x-1)^2} = \\
&= \frac{-3e^{1-x} \times x}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3e^{1-x} \times x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -3e^{1-x} \times x = 0 \quad \wedge \quad (x-1)^2 \neq 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\underbrace{-3e^{1-x} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee x = 0 \right) \wedge \underbrace{x \neq 1}_{\text{condição universal em }]-\infty, 1[} \\
&\Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

x	$-\infty$	0		1
$-3e^{1-x}$	—	—	—	
x	—	0	+	
$(x-1)^2$	+	+	+	
Sinal de h'	+	0	—	
Variação de h		$h(0)$ Máx.		

h é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, 1[$;

$$h(0) = \frac{3e}{-1} = -3e$$

$-3e$ é máximo relativo em $x = 0$.

3. Introduzindo os valores da esperança de vida à nascença – homens (x) numa das listas da calculadora e os valores da esperança de vida à nascença - mulheres (y) noutra lista da calculadora, obtêm-se os seguintes valores:

- mediana da variável x : 75,3
- 1.º quartil da variável x : 72,4
- 3.º quartil da variável x : 77,4

Assim:

I – c) 75,3

II – b) 5

$$77,4 - 72,4 = 5$$

III – a) 6,9%

$$\frac{83,7-78,3}{78,3} \times 100 \approx 6,9$$

IV – a) $y = 0,771x + 23,422$

4. O número de casos possíveis é igual a 6^5 .

O número de casos favoráveis é igual a:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{6}{1} \times \frac{6}{1} \times \frac{2}{1} + \frac{5}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{6}{1} \times \frac{6}{1} \times \frac{4}{1} + \frac{5}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{1} \times \frac{6}{2} \\ & \frac{6}{4} \times \frac{6}{1} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{2}{1} \times 3 + \frac{6}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{1} \times \frac{6}{1} \times \frac{4}{1} \times {}^3C_2 + \frac{6}{4} \times \frac{6}{1} \times \frac{6}{1} \times \frac{6}{5} \times \frac{2}{1} \times {}^3C_2 \\ & = 2 + 2 + 20 + 300 + 60 + 60 = \\ & = 444 \end{aligned}$$

A probabilidade pedida é igual a $\frac{444}{6^5} \approx 0,06$.

5. Opção (B)

$$\underbrace{2}_{\text{número de maneiras de escolher a fila}} \times \underbrace{2}_{\text{trocas de figurinistas entre si}} \times \underbrace{3}_{\text{modos de estarem juntos na mesma fila}} \times \underbrace{6!}_{\text{permutações das restantes 6 pessoas}}$$

6. Consideremos os seguintes acontecimentos:

F : “ser do sexo feminino”

S : “ser da área da saúde”

Sabe-se que:

- $P(F) = 2P(S)$
- $P(F|S) = \frac{1}{4}$
- $P(\bar{S}|\bar{F}) = \frac{1}{2}$

Então:

$$\begin{aligned} P(F|S) = \frac{1}{4} & \Leftrightarrow \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(F \cap S) = \frac{1}{4}P(S) \\ P(\bar{S}|\bar{F}) = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow \frac{P(\bar{S} \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\bar{S} \cap \bar{F}) = \frac{1}{2}(1 - P(F)) \\ & \Leftrightarrow P(\bar{S} \cap \bar{F}) = \frac{1}{2}(1 - 2P(S)) \\ & \Leftrightarrow P(\bar{S} \cap \bar{F}) = \frac{1}{2} - P(S) \\ & \Leftrightarrow 1 - P(S \cup F) = \frac{1}{2} - P(S) \\ & \Leftrightarrow -P(S \cup F) = -\frac{1}{2} - P(S) \\ & \Leftrightarrow P(S \cup F) = \frac{1}{2} + P(S) \end{aligned}$$

Como $P(S \cup F) = P(S) + P(F) - P(S \cap F)$, então:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + P(S) &= P(S) + 2P(S) - \frac{1}{4}P(S) \Leftrightarrow -\frac{7}{4}P(S) = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow P(S) &= \frac{4}{14} \\ \Leftrightarrow P(S) &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

7. Consideremos a sucessão (a_n) cujos termos são as áreas dos quadrados descritos no enunciado.

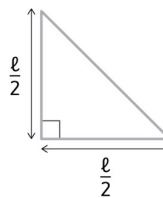
$$a_1 = 4^2 = 16$$

$$a_2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

$$a_3 = 2^2 = 4$$

(...)

Em geral, se $a_n = l^2$:



$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} &= \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{l^2}{2}} = \\ &\stackrel{l>0}{=} \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}l}{2} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{l^2}{2}\end{aligned}$$

Assim, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo 16.

$$\begin{aligned}S_n < 32 &\Leftrightarrow 16 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 32 \Leftrightarrow 16 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} < 32 \\ &\Leftrightarrow 32 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 32 \\ &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 \\ &\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \quad \text{condição universal em } \mathbb{N}\end{aligned}$$

Logo, a soma das áreas dos n quadrados da sequência é menor do que 32, qualquer que seja o valor de n .

8. Opção (B)

Os argumentos de raízes de ordem 5 estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{5}$.

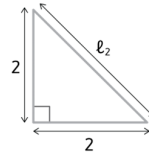
$$z_1 = 1e^{i(0)}$$

$$z_2 = 1 \times e^{i\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

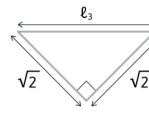
$$z_5 = 1 \times e^{i\left(-\frac{2\pi}{5}\right)} = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}z_2 + z_5 &= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \\ &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares



$$(l_2)^2 = 4 + 4 \Leftrightarrow l_2 = 2\sqrt{2}$$



$$(l_3)^2 = 2 + 2 \Leftrightarrow l_3 = 2$$

$$\begin{aligned}
9. \quad z^3 - 4z \times \bar{z} + 10 - 2i &= 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}e^{i\theta})^3 - 4 \times 2 + 10 - 2i = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{2})^3 e^{i(3\theta)} = -2 + 2i \\
&\Leftrightarrow \sqrt{8}e^{i(3\theta)} = \sqrt{8}e^{i(\frac{3\pi}{4})} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{8} = \sqrt{8}}_{\text{condição universal}} \wedge 3\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Como $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Assim, $z = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$.

Como z é uma das raízes sextas de um certo número complexo w , então $z^6 = w$.

$$\begin{aligned}
w = z^6 &= \left(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}\right)^6 = \\
&= (\sqrt{2})^6 e^{i(\frac{6\pi}{4})} = \\
&= 8e^{i(\frac{3\pi}{2})} = \\
&= -8i
\end{aligned}$$

10.

10.1. Opção (B)

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 &= 9 \wedge x = a, \text{ com } a \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow (a-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 &= 9 \wedge x = a \\
\Leftrightarrow (y-2)^2 + (z+3)^2 &= 9 - (a-1)^2 \wedge x = a
\end{aligned}$$

Para que esta condição defina uma circunferência de perímetro $2\sqrt{5}\pi$, isto é, de raio $\sqrt{5}$ tem que se verificar:

$$9 - (a-1)^2 = (\sqrt{5})^2$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
(a-1)^2 &= 9 - 5 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow a-1 = 2 \vee a-1 = -2 \\
&\Leftrightarrow a = 3 \vee a = -1
\end{aligned}$$

10.2. Seja r a reta perpendicular ao plano α e que passa no centro da superfície esférica.

Sabe-se que o ponto T é o ponto de interseção da reta r com o plano α .

$$r: (x, y, z) = (1, 2, -3) + k\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right), k \in \mathbb{R}$$

Ponto genérico de r : $\left(1 + \frac{k}{2}, 2 + k, -3 + k\right), k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) + (2 + k) + (-3 + k) - 4 &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{k}{4} + 2 + k - 3 + k - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{k}{4} + 2k = 5 - \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{k}{4} + 2k = 5 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned}
\bullet \quad z \times \bar{z} &= (\sqrt{2}e^{i\theta}) \times (\sqrt{2}e^{i(-\theta)}) = \\
&= (\sqrt{2})^2 e^{i(\theta-\theta)} = \\
&= 2e^{i0} = \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad -2 + 2i &= \sqrt{8}e^{i(\frac{3\pi}{4})} \\
|-2 + 2i| &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} \\
\text{tg } \alpha &= \frac{2}{-2} \wedge \alpha \in 2^\circ \text{Q} \\
\alpha &= \frac{3\pi}{4}, \text{ por exemplo.}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow k + 8k = 20 - 2$$

$$\Leftrightarrow 9k = 18$$

$$\Leftrightarrow k = 2$$

Assim, $T\left(1 + \frac{2}{2}, 2 + 2, -3 + 2\right)$, ou seja, $T(2, 4, -1)$.

A distância de T à origem do referencial é:

$$\begin{aligned} d(T, O) &= \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2 + (-1-0)^2} = \\ &= \sqrt{4 + 16 + 1} = \\ &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

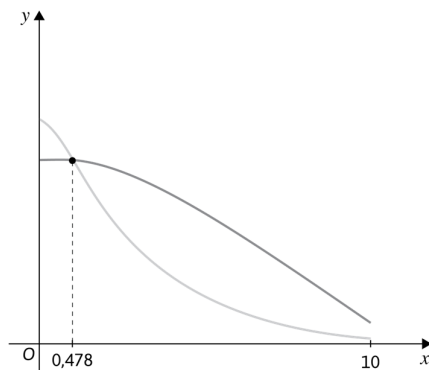
11. Pretende-se determinar a amplitude do intervalo $[a, 4a]$, isto é, $4a - a = 3a$.

Sabemos que a é tal que $B(4a) = B(a) - 10$.

Usando x como variável independente, e recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se, no intervalo $[0, 10]$:

$$f_1(x) = \frac{100}{1 + 0,25e^{0,35 \times 4x}}$$

$$f_2(x) = \frac{100}{1 + 0,25e^{0,35x}} - 10$$



Assim, $a \approx 0,478$ e $3a \approx 1,434$, isto é, 1 minuto e 26 segundos ($0,434 \times 60 \approx 26$).

12.

$$\begin{aligned} 12.1. A_{\text{sombreado}} &= 2 \times A_{\Delta[ABO]} = 2 \times \frac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2} = \\ &= -2 \cos \alpha \times 2 \sin \alpha = \\ &= -2 \times 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= -2 \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$r = 2$ e $\alpha \in 2^\circ \text{Q}$, logo:

$$\overline{OB} = -2 \cos \alpha$$

$$\overline{AB} = 2 \sin \alpha$$

12.2. Como a função g é contínua em $]0, \pi[$, visto tratar-se do quociente entre funções contínuas neste intervalo, então as únicas retas candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de g são as retas de equação $x = 0$ e $x = \pi$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \sin(2x)}{1 - \cos x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-2 \sin(2x)}{x} \times \frac{x}{1 - \cos x} \right) = \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2 \right) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 - \cos x} = \\ &= -2 \times 2 \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin y}{y} \right)}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4 \times 1 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \\
&= -4 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \\
&= -4 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+\cos x}{\sin x} = \\
&= -4 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+\cos x}{\sin x} = \\
&= -4 \times \frac{1}{1} \times \frac{1+\cos 0}{\sin 0^+} = \\
&= -4 \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{0^+} = \\
&= -4 \times (+\infty) = -\infty
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-2\sin(2x)}{1-\cos x} = \\
&= \frac{-2\sin(2\pi)}{1-\cos \pi} = \\
&= \frac{-2 \times 0}{1-(-1)} = \\
&= \frac{0}{2} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $x = \pi$ não é assíntota vertical ao gráfico de g .

13. A afirmação I é falsa, pois o domínio da função $f \circ g$ é o conjunto dos valores reais de x tais que:

$$x \in D_g \wedge g(x) \in D_f, \text{ ou seja, } x \in \mathbb{R} \wedge g(x) \in \mathbb{R}^+$$

Por observação do gráfico de g , sabemos que a função g é positiva em $] -1, 0[\cup]2, +\infty[$, ou seja, é este o domínio da função $f \circ g$ e não $\mathbb{R}^+$.

A afirmação II é falsa, pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$, que sabemos ser um número real negativo, pois o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa $x = 0$ é negativo.

Assim, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ e não $-\infty$.

A afirmação III é verdadeira, pois a função $f \times g$ é contínua em $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, visto tratar-se do produto de funções contínuas neste intervalo, e também se verifica que $(f \times g)\left(\frac{3}{2}\right) < 0 < (f \times g)\left(\frac{1}{2}\right)$, pois:

$$(f \times g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \times g\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}_{<0} \times \underbrace{g\left(\frac{1}{2}\right)}_{<0} > 0$$

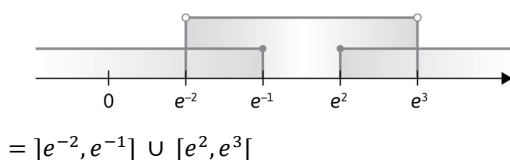
$$(f \times g)\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) \times g\left(\frac{3}{2}\right) = \underbrace{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}_{>0} \times \underbrace{g\left(\frac{3}{2}\right)}_{<0} < 0$$

Assim, ficam reunidas as condições de aplicabilidade do teorema de Bolzano-Cauchy, que permite concluir que a função $f \times g$ tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

14. Pretendem-se os valores de $x \in \mathbb{R}^+$ que verificam $2 \leq f(x) < 6$, isto é, $f(x) \geq 2 \wedge f(x) < 6$.

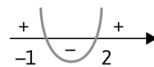
$$\begin{aligned} \ln^2 x - \ln x &\geq 2 \wedge \ln^2 x - \ln x < 6 \\ \Leftrightarrow \ln^2 x - \ln x - 2 &\geq 0 \wedge \ln^2 x - \ln x - 6 < 0 \\ \Leftrightarrow (\ln x \leq -1 \vee \ln x &\geq 2) \wedge (\ln x > -2 \wedge \ln x < 3) \\ \Leftrightarrow (x \leq e^{-1} \vee x &\geq e^2) \wedge (x > e^{-2} \wedge x < e^3) \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = (]-\infty, e^{-1}] \cup [e^2, +\infty[) \cap]e^{-2}, e^3[\cap \mathbb{R}^+ =$$



Cálculo auxiliar 1

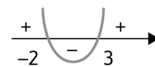
$$\begin{aligned} \ln x &= y \\ y^2 - y - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ \Leftrightarrow y &= 2 \vee y = -1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Assim, } y^2 - y - 2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow y &\leq -1 \vee y \geq 2. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar 2

$$\begin{aligned} \ln x &= y \\ y^2 - y - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ \Leftrightarrow y &= 3 \vee y = -2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Assim, } y^2 - y - 6 &< 0 \\ \Leftrightarrow y &> -2 \wedge y < 3. \end{aligned}$$

15. Seja m o declive da reta secante ao gráfico de g nos pontos de abcissas a e $-a$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{\ln\left(\frac{a-k}{a+k}\right) - \ln\left(\frac{-a-k}{-a+k}\right)}{2a} = \\ &= \frac{\ln\left(\frac{\frac{a-k}{a+k}}{\frac{-a-k}{-a+k}}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{(a-k) \times (-a+k)}{(a+k) \times (-a-k)}\right)}{2a} = \\ &= \frac{\ln\left(\frac{-(a-k) \times (a-k)}{-(a+k) \times (a+k)}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{(a-k)^2}{(a+k)^2}\right)}{2a} = \\ &= \frac{\ln\left(\frac{a-k}{a+k}\right)^2}{2a} = \frac{2\ln\left(\frac{a-k}{a+k}\right)}{2a} = \\ &= \frac{\ln\left(\frac{a-k}{a+k}\right)}{a} = \frac{g(a)}{a}, \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$