Prova-Modelo de Exame

Matemática A

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

12.º Ano de Escolaridade

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r \quad (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro } \times \text{Apótema}$

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2} \quad (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g \quad (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2 \quad (r - \text{raio})$

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base } \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base } \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \quad (r - \text{raio})$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \;\cos b + \text{sen}\, b \;\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \;\cos b - \text{sen}\, a \;\text{sen}\, b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\, u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \,\text{sen}\, u$

$(\text{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\, \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Seja f a função, de domínio $]-\infty, e^2[$, definida por:

$$f(x) = \ln(e^2 - x)$$

Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim f(x_n) = -\infty$.

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n)?

(A) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

(B) $\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$

(C) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

(D) $\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

2. Considere a função g e a função h, ambas de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, definidas por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{1-x}-2x+1}{x-1} & \text{se} \quad x < 1 \\ \ln\left(1 + e^{\frac{1}{x-1}}\right) - \frac{1}{x-1} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad h(x) = g(x) + \frac{2e^{1-x}+2x-1}{x-1}$$

Resolva os itens **2.1.** e **2.2.** sem recorrer à calculadora.

2.1. Averigue se existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

2.2. Estude a função h quanto a monotonia e quanto a existência de extremo(s) relativo(s), no intervalo $]-\infty, 1[$, e determine esse(s) extremo(s), caso exista(m).
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

3. Na tabela seguinte apresentam-se os dados relativos à esperança de vida à nascença, por sexo, em seis anos pertencentes ao período de 1995 a 2020.

Anos	Esperança de vida à nascença – homens (anos) (x)	Esperança de vida à nascença – mulheres (anos) (y)
1995	71,5	78,4
2000	72,4	79,4
2005	74,4	80,9
2010	76,2	82,2
2015	77,4	83,2
2020	78,3	83,7

Fonte: PORDATA (consultado em junho de 2025).

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela anterior.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana da esperança de vida à nascença dos homens é ___**I**___ anos e a amplitude interquartil é ___**II**___ anos.

Em 2020, a diferença percentual entre a esperança de vida à nascença das mulheres e a esperança de vida à nascença dos homens, com aproximação às décimas, é igual a ___**III**___.

Com base nos dados da tabela, obteve-se um modelo de regressão linear de y sobre x. A equação da reta de regressão, com os valores de a e de b arredondados às milésimas, é ___**IV**___.

I	II	III	IV
a) 72,4	**a)** 4	**a)** 6,9 %	**a)** $y = 0{,}771x + 23{,}422$
b) 75,03	**b)** 5	**b)** 7,2 %	**b)** $y = 1{,}292x - 30{,}009$
c) 75,3	**c)** 6	**c)** 9,1 %	**c)** $y = 1{,}013x + 13{,}402$

4. Considere um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Lança-se esse dado cinco vezes e escrevem-se, da esquerda para a direita, os algarismos saídos, obtendo-se, assim, um número com cinco algarismos.

Determine a probabilidade de esse número ser par, menor do que 53 000, e ter exatamente dois 6. Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

5. Uma companhia de teatro está a preparar um espetáculo.

Enquanto aguardam o início dos ensaios, cinco atores, uma encenadora e dois figurinistas vão sentar-se nas duas primeiras filas de um auditório, tendo cada fila quatro lugares numerados de 1 a 4.

Qual das expressões seguintes representa o número de maneiras diferentes de dispor estas oito pessoas pelos lugares, ficando os dois figurinistas sentados juntos na mesma fila?

(A) $2 \times 3 \times 6!$

(B) $2 \times 2 \times 3 \times 6!$

(C) $2 \times {}^4A_2 \times 6!$

(D) $2 \times {}^4C_2 \times {}^6C_6$

6. Uma empresa tecnológica está a organizar um programa de formação em Inteligência Artificial (IA) para profissionais de diferentes áreas.

Nesse programa, participaram apenas candidatos de uma das duas áreas seguintes: ou da área da saúde ou da área da educação.

Relativamente aos participantes desse programa, sabe-se que:

- o número de mulheres é o dobro do número de profissionais da área da saúde;
- um quarto dos profissionais da área da saúde são mulheres;
- metade dos homens são profissionais da área da educação.

Escolhe-se, ao acaso, um participante desse programa.

Determine a probabilidade de esse participante ser um profissional da área da saúde.

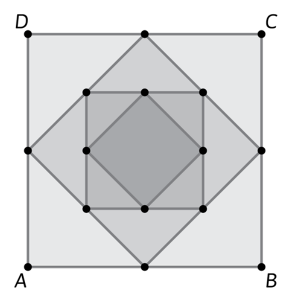
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

7. Considere um quadrado $[ABCD]$, com $\overline{AB} = 4$.

Unindo os pontos médios dos lados desse quadrado, obtém-se um segundo quadrado; unindo os pontos médios dos lados do segundo quadrado, obtém-se um terceiro quadrado. Continuando a proceder deste modo, obtém-se uma sequência de n quadrados, sendo $n > 4$.

Na figura representam-se os primeiros quatro quadrados da sequência.

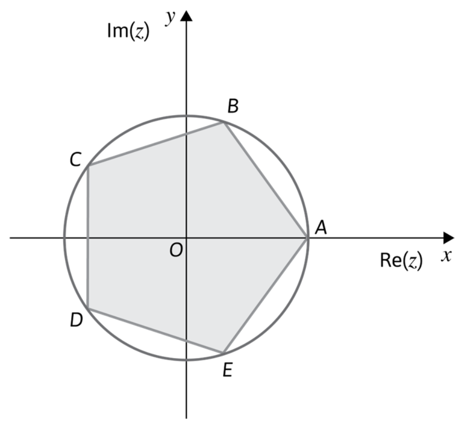
Mostre que a soma das áreas dos n quadrados da sequência é menor do que 32, qualquer que seja o valor de n.



8. Na figura está representado, no plano complexo, o pentágono $[ABCDE]$, cujos vértices pertencem à circunferência de raio 1 centrada na origem do referencial, sendo o ponto A pertencente ao semieixo real positivo.

Os pontos A, B, C, D e E são os afixos dos números complexos z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5, respetivamente.

Sabe-se que os números complexos z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 são as raízes de ordem 5 de um certo número complexo.



Qual dos seguintes números complexos é igual a $z_2 + z_5$?

(A) $2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) i$

(B) $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

(C) $2\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) i$

(D) $2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

9. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = \sqrt{2}\, e^{i\theta}$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Sabe-se que:

- z é solução da equação $z^3 - 4\, z\, \overline{z} + 10 - 2i = 0$;
- z é uma das raízes sextas de um certo número complexo w.

Determine w na forma algébrica.

10. Considere, fixado um referencial cartesiano do espaço, a superfície esférica de equação:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$$

* **10.1.** Para que valores reais de a a interseção da superfície esférica com o plano definido por $x=a$ é uma circunferência de perímetro $2\sqrt{5}\pi$?

(A) -3 e 3 **(B)** -1 e 3 **(C)** -5 e 2 **(D)** -1 e 5

* **10.2.** Considere o plano α definido por:

$$\frac{1}{2}x+y+z-4=0$$

Sabe-se que a superfície esférica é tangente ao plano α no ponto T.

Determine, sem recorrer à calculadora, a distância do ponto T à origem do referencial.

* **11.** Um grupo de amigos está a testar a duração da bateria de um novo modelo de telemóvel, durante os primeiros 10 minutos de uso intensivo em redes sociais e jogos. A percentagem de bateria restante, $B(t)$, t minutos após o início do uso, é dada por:

$$B(t)=\frac{100}{1+0{,}25e^{0{,}35\,t}}\ ,\quad \text{com } 0\leq t\leq 10$$

No primeiro minuto de utilização, existe um instante a para o qual se verifica que, no intervalo de tempo $[a,4a]$, a percentagem de bateria diminuiu 10 pontos percentuais.

Determine, recorrendo à calculadora, a amplitude desse intervalo.

Apresente o resultado em minutos e em segundos, com os segundos arredondados às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

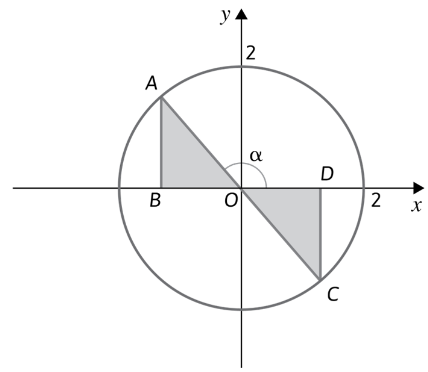
- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a equação.

12. Resolva os itens **12.1.** e **12.2.** sem recorrer à calculadora.

12.1. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, os triângulos $[ABO]$ e $[CDO]$, e a circunferência de centro O e raio 2.

Sabe-se que:

- o segmento de reta $[AC]$ é um diâmetro da circunferência;
- α é a inclinação, em radianos, da reta AC, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$;



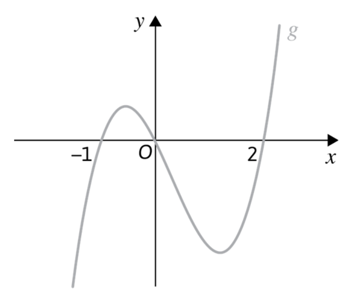
- o ponto B pertence ao semieixo negativo Ox, e o ponto D pertence ao semieixo positivo Ox;
- as retas AB e CD são paralelas ao eixo Oy.

Mostre que a área a sombreado pode ser dada pela função f definida por $f(\alpha) = -2\,\text{sen}(2\alpha)$.

12.2. Considere agora a função g definida, em $]0, \pi[$, por $g(x) = \frac{-2\,\text{sen}(2x)}{1-\cos x}$.

Estude a função g quanto a existência de assíntotas verticais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

* **13.** Considere a função f definida por $f(x) = \ln x$ e a função polinomial g, de grau 3, representada graficamente num referencial ortogonal Oxy, na figura ao lado.



Sabe-se que -1, 0 e 2 são os únicos zeros da função g.

Considere as seguintes proposições.

I. O domínio da função $f \circ g$ é $\mathbb{R}^+$.

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

II. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} \times \lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = -\infty$

III. O teorema de Bolzano-Cauchy permite afirmar que a função $f \times g$ tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

Apenas uma das proposições anteriores é verdadeira.

Indique, justificando, qual das proposições, **I**, **II** ou **III,** é verdadeira.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das outras duas proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

14. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = \ln^2 x - \ln x$$

Determine os valores reais de x para os quais $f(x)$ pertence ao intervalo $[2, 6[$.

Apresente a sua resposta na forma de um intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

15. Para um determinado valor de $k > 0$, considere a função g, de domínio $]-\infty, -k[\, \cup\,]k, +\infty[$, definida por $g(x) = \ln\left(\frac{x-k}{x+k}\right)$.

Seja a um número real maior do que k.

Mostre que o declive da reta secante ao gráfico de g, nos pontos de abcissas a e $-a$, é igual a $\frac{g(a)}{a}$.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>2.1.</td><td>2.2.</td><td>3.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>8.</td><td>10.1.</td><td>10.2.</td><td>11.</td><td>13.</td><td>15.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">4.</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">9.</td><td colspan="2">12.1.</td><td colspan="2">12.2.</td><td colspan="2">14.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>