TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1.

1.1. Consideremos os seguintes acontecimentos:

R: "Participar na viagem de barco rabelo no rio Douro."

B: "Participar na visita ao Palácio da Bolsa."

Sabe-se que:

- $P(R) = 0{,}5$
- $P(\overline{B}|R) = 0{,}1$
- $P(\overline{B} \cap \overline{R}) = 0{,}2$

Pretende-se determinar $P(\overline{R}|B)$, ou seja, $\frac{P(\overline{R} \cap B)}{P(B)}$.

$$P(\overline{B}|R) = 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B} \cap R)}{0{,}5} = 0{,}1 \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap R) = 0{,}1 \times 0{,}5 \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap R) = 0{,}05$$

Organizando os dados numa tabela:

	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{\overline{R}}$	**Total**
$\boldsymbol{B}$	0,45	0,3	0,75
$\boldsymbol{\overline{B}}$	0,05	0,2	0,25
Total	0,5	0,5	1

$P(\overline{R}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$P(\overline{B}) = 0{,}05 + 0{,}2 = 0{,}25$

$P(B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P(\overline{R} \cap B) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$

Deste modo, $P(\overline{R}|B) = \frac{P(\overline{R} \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}75} = 0{,}4$. A probabilidade pedida é igual a 40%.

1.2. O número de hóspedes que não participaram na visita ao Palácio da Bolsa nem participaram na viagem de barco rabelo no rio Douro é dado por $0{,}2n$. Assim:

$$\frac{{}^{0{,}2n}C_2}{{}^{n}C_2} = \frac{3}{95} \Leftrightarrow \frac{\frac{0{,}2n \times (0{,}2n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{3}{95} \Leftrightarrow \frac{0{,}2 \times (0{,}2n-1)}{n-1} = \frac{3}{95}$$

$$\Leftrightarrow 95 \times 0{,}2 \times (0{,}2n - 1) = 3n - 3$$

$$\Leftrightarrow 19(0{,}2n - 1) = 3n - 3$$

$$\Leftrightarrow 3{,}8n - 3n = -3 + 19$$

$$\Leftrightarrow 0{,}8n = 16$$

$$\Leftrightarrow n = 20$$

O número total de hóspedes desse hotel é igual a 20.

2. Opção (A)

$$P(A|B) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B) = \tfrac{5}{6}P(B)$$

$$\underset{(1)}{\Leftrightarrow} \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{6}P(B)$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{6}{20} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \tfrac{3}{10}$$

Cálculo auxiliar

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 3P(A\cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A\cap B}) = 3P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A\cap B) = 3P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B) = \tfrac{1}{4} \quad \textbf{(1)}$$

Assim:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A\cap B) = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{12}{40} - \frac{10}{40} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

3.

3.1. P(“serem escolhidos pelo menos dois antigos professores”) =

$= 1 - P$(“não ser escolhido nenhum antigo professor ou ser escolhido apenas um antigo professor”)

$$= 1 - \frac{{}^{10}C_0 \times {}^{45}C_6 + {}^{10}C_1 \times {}^{45}C_5}{{}^{55}C_6} \approx 0{,}298$$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 30%.

3.2. Opção (D)

- ${}^{40}C_{20}$ é o número de maneiras de escolher o conjunto de 20 alunos, entre 40, que se vai posicionar na 1.ª fila de trás;
- $20!$ é o número de maneiras dos 20 alunos de cada conjunto se posicionar nessa fila de trás;
- $20!$ é o número de maneiras dos restantes 20 alunos se posicionarem na outra fila de trás;
- $10!$ é o número de maneiras dos 10 professores se posicionarem na fila respetiva;
- $5!$ é o número de maneiras dos 5 funcionários se posicionarem na fila respetiva.

3.3. No contexto da situação $P(A|\bar{B})$, significa a probabilidade de, ao escolher 5 dos 55 participantes no encontro, exatamente 3 dos participantes escolhidos serem antigos professores, sabendo que nenhum dos participantes escolhidos é antigo aluno.

Ora, se nenhum dos participantes escolhidos é um antigo aluno, existem ${}^{15}C_5$ maneiras de escolher 5 pessoas de entre os 10 antigos professores e os 5 antigos funcionários, sendo então ${}^{15}C_5$ o número de casos possíveis.

O número de casos favoráveis corresponde ao número de maneiras de escolher 3 antigos professores de entre os 10 existentes e 2 antigos funcionários de entre os 5 existentes, o que pode ser feito de ${}^{10}C_3 \times {}^{5}C_2$ maneiras diferentes (${}^{10}C_3$ é o número de formas de escolher 3 antigos professores, e por cada uma destas, existem ${}^{5}C_2$ formas de escolher 2 antigos funcionários).

Segundo a regra de Laplace, num espaço amostral finito e onde os acontecimentos elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, pelo que a probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^{10}C_3 \times {}^{5}C_2}{{}^{15}C_5} = \frac{1200}{3003} = \frac{400}{1001}$$

4. **Opção (C)**

Seja n a linha do triângulo de Pascal com 2024 elementos. Sabe-se que n = 2023, portanto o primeiro, o segundo, o penúltimo e o último elementos desta linha são: 1, 2023, 2023 e 1, respetivamente.

Todos os restantes elementos desta linha são superiores a 2023.

Assim, escolhendo ao acaso dois elementos desta linha, para que o seu produto seja 2023, apenas existem 4 casos (${}^{2}C_1 \times {}^{2}C_1$), num total de ${}^{2024}C_2$ casos possíveis.

A probabilidade pedida é, então, $\frac{4}{{}^{2024}C_2} = \frac{1}{511\,819}$.

5. **<u>1.º processo de resolução</u>**

$5P(A \cap B) = P(A) \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow P(B|A) = \dfrac{1}{5}$

No contexto do problema, $P(B|A)$ representa a probabilidade de o segundo cromo retirado ser da seleção brasileira, sabendo que o primeiro cromo retirado foi da seleção portuguesa.

Ora, depois da primeira extração ficaram, então, na mochila $x + y - 1$ cromos no total, sendo $x - 1$ cromos da seleção portuguesa e y cromos da seleção brasileira.

Como $P(B|A) = \frac{1}{5}$, então $\frac{y}{x+y-1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5y = x + y - 1 \Leftrightarrow x = 4y + 1$

Sendo $y \in \mathbb{N}$ e $4y$ par, então $4y + 1$ é ímpar.

Fica então provado que inicialmente existia um número ímpar de cromos da seleção portuguesa na mochila do Pedro.

<u>2.º processo de resolução</u>

Tem-se que $P(A \cap B) = \frac{x \times y}{(x+y)\times(x+y-1)}$ e $P(A) = \frac{x}{x+y}$.

Assim:

$$5P(A \cap B) = P(A) \Leftrightarrow 5 \times \frac{x \times y}{(x+y) \times (x+y-1)} = \frac{x}{x+y} \Leftrightarrow \frac{y}{x+y-1} = \frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow 5y = x + y - 1$$
$$\Leftrightarrow x = 4y + 1$$

Sendo $y \in \mathbb{N}$ e $4y$ par, então $4y + 1$ é ímpar.

Fica, então, provado que inicialmente existia um número ímpar de cromos da seleção portuguesa na mochila do Pedro.

6. O gráfico da função f e a reta definida por $y = x + 2$ intersetam-se em, pelo menos, um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]a, a+1[$ se e somente se a condição $f(x) = x + 2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]a,\ a+1[$.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - (x+2)$.

1) g é contínua em $\mathbb{R}$ por se tratar da diferença de duas funções contínuas. Em particular, g é contínua em $[a,\ a+1]$.

2) $g(a) = f(a) - (a+2) > 0$, pois $f(a) > a + 2$.

$g(a+1) = f(a+1) - (a+1+2) = f(a+1) - (a+3) < 0$, pois $f(a+1) < a + 3$.

Logo, $g(a+1) < 0 < g(a)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy concluímos que:

$$\exists c \in]a, a+1[:\ g(c) = 0$$

Ou seja:

$$\exists c \in]a, a+1[:\ f(c) - (c+2) = 0$$

Isto é:

$$\exists c \in]a, a+1[:\ f(c) = c + 2$$

Assim, o gráfico da função f e a reta definida por $y = x + 2$ intersetam-se em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]a,\ a+1[$.

7.

7.1. h é contínua em $x = 1$ se $\lim_{x \to 1} h(x)$ existe, ou seja, $\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^+} h(x) = h(1)$.

- $\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{4x^2+x+4}-3x}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{4x^2+x+4-9x^2}{(x-1)(\sqrt{4x^2+x+4}+3x)} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{-5x^2+x+4}{(x-1)(\sqrt{4x^2+x+4}+3x)} =$$

Cálculo auxiliar

$$-5x^2 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-5) \times 4}}{-10}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{-10}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 9}{-10}$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = -\frac{4}{5}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-5(x-1)\left(x+\frac{4}{5}\right)}{(x-1)(\sqrt{4x^2+x+4}+3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-5\left(x+\frac{4}{5}\right)}{(\sqrt{4x^2+x+4}+3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-5x-4}{\sqrt{4x^2+x+4}+3x} =$$

$$= \frac{-9}{3+3} =$$

$$= -\frac{9}{6} =$$

$$= -\frac{3}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x-x^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\cong}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{x(1-x)(1+x)} =$$

$$= -\lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x(1+x)} =$$

$$= -\frac{3}{2}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times(-2)\times 1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1\pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

- $h(1) = -\frac{3}{2}$

Logo, h é contínua em $x = 1$.

7.2. Assíntotas horizontais

- $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-2}{x-x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{x\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \to +\infty$.

- $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+4} - 3x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} - 3x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} - 3x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} - 3x}{x-1}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} + 3x}{x-1} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} + 3\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} + 3}{1-\frac{1}{x}} = -\frac{2+3}{1} = -5$$

A reta de equação $y = -5$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \to -\infty$.

8. Como $D_f = \mathbb{R}^+$ e a reta de equação $y = -2x + 1$ é assíntota ao gráfico da função f, então:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) + 2x] = 1$$

Como D_g é limitado inferiormente, só faz sentido averiguar se existe alguma assíntota horizontal ao gráfico g quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(f(x) + 2x)x^2}{\left(f(x)\right)^2} = \lim_{x \to +\infty} \left[(f(x) + 2x) \times \left(\frac{x}{f(x)}\right)^2\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (f(x) + 2x) \times \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (f(x) + 2x) \times \frac{1}{\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}\right)^2} =$$

$$= 1 \times \frac{1}{(-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}$$

Logo, a reta de equação $y = \frac{1}{4}$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to +\infty$.

9.

9.1. Opção (B)

$y = mx + b$, onde $m = f'(0) = 0 + 0 + 0 + 5$

Como $P\left(0, f(0)\right) = (0, 9)$ pertence à reta, então $y = 5x + 9$ é a equação reduzida da reta pretendida.

Cálculo auxiliar

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x + 9\right)' =$$

$$= \frac{4}{12}x^3 + \frac{3}{3}x^2 + \frac{2}{2}x + 5 =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 5$$

9.2. $k \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(\frac{4}{12}x^4 + \frac{k}{3}x^3 + \frac{k^2}{2}x^2 + 5x + 9\right)' = \frac{1}{3}x^3 + kx^2 + k^2x + 5$

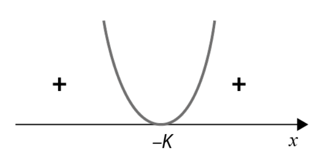
$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + kx^2 + k^2x + 5\right)' = x^2 + 2kx + k^2$

$f''(x) = 0$

$x^2 + 2kx + k^2 = 0 \Leftrightarrow (x + k)^2 = 0 \Leftrightarrow x + k = 0 \Leftrightarrow x = -k$

x	$-\infty$	$-k$	$+\infty$
Sinal de f''	$+$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	∪	$f(-k)$	∪

Cálculo auxiliar



Conclui-se que o gráfico de f apresenta a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$, não apresentando pontos de inflexão.

10. Opção (C)

$$\lim u_n = \lim\left(-\frac{1}{1-2^n}\right) = \lim\frac{1}{2^n-1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$