# TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

**1. Opção (C)**

Se ao número de códigos constituídos utilizando exatamente duas vogais “a” retirarmos o número de códigos constituídos por exatamente duas vogais “a” e três vogais “e”, obtemos o número de códigos distintos que é possível constituir utilizando exatamente duas vogais “a” e, no máximo, duas vogais “e”.

Assim, ${}^{5}C_2 \times 4 \times 4 \times 4 - {}^{5}C_2 = 640 - 10 = 630$.

**2. Opção (B)**

Existem duas alternativas para que o ás fique numa das extremidades. Para cada uma destas opções, existem 9! maneiras diferentes de permutar as nove cartas que não são figuras (as cartas do 2 até ao 10) e, para cada uma destas, existem ${}^{10}A_3$ modos distintos de escolher, ordenadamente, três posições, de entre 10, para dispor as figuras.

__ C __ C __ C __ C __ C __ C __ C __ C __ C __

**3.** Número total de canetas: $5 + 3 = 8$

Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_1 \times {}^{3}C_1 + {}^{5}C_2 = 25$

Número de casos possíveis: ${}^{8}C_2 = 28$

$$p = \frac{25}{28} \approx 0{,}8929$$

A probabilidade, sob a forma de percentagem, com arredondamento às décimas, de a Inês oferecer à irmã pelo menos uma caneta azul é $89{,}3\%$.

**4.** $$\frac{{}^{\frac{2n}{5}}C_2}{{}^{n}C_2} = \frac{22}{145} \Leftrightarrow \frac{\frac{\left(\frac{2n}{5}\right)!}{\left(\frac{2n}{5}-2\right)! \times 2!}}{\frac{n!}{(n-2)! \times 2!}} = \frac{22}{145} \Leftrightarrow \frac{\frac{\frac{2n}{5} \times \left(\frac{2n}{5}-1\right)\left(\frac{2n}{5}-2\right)!}{\left(\frac{2n}{5}-2\right)! \times 2!}}{\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2!}} = \frac{22}{145}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2n}{5} \times \left(\frac{2n}{5}-1\right)}{n(n-1)} = \frac{22}{145}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{n \neq 0} \frac{\frac{2}{5} \times \left(\frac{2n}{5}-1\right)}{n-1} = \frac{22}{145}$$

$$\Leftrightarrow 58 \times \left(\frac{2n}{5} - 1\right) = 22n - 22$$

$$\Leftrightarrow \frac{116n}{5} - 58 = 22n - 22$$

$$\Leftrightarrow 116n - 290 = 110n - 110$$

$$\Leftrightarrow 6n = 180$$

$$\Leftrightarrow n = 30$$

Portanto, o número de elementos que integram a equipa mobilizada para restaurar os serviços é $30$.

**5.** $0{,}6 \times 25 = 15 \rightarrow$ número de rapazes

$25 - 15 = 10 \rightarrow$ número de raparigas

$\frac{2}{5} \times 15 = 6 \rightarrow$ número de rapazes com menos de 30 anos

$15 - 6 = 9 \rightarrow$ número de rapazes com 30 anos ou mais

$\frac{3}{5} \times 10 = 6 \rightarrow$ número de raparigas com 30 anos ou mais

$10 - 6 = 4 \rightarrow$ número de raparigas com menos de 30 anos

Número de casos favoráveis: $8 \times {}^{15}C_3 = 3640$

Número de casos possíveis: ${}^{25}C_6 = 177\,100$

$$p = \frac{3640}{177\,100} \approx 0{,}021$$

A probabilidade pedida, na forma de dízima, arredondado às milésimas, é $0{,}021$.

**6.** $5P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 2 + 5P(A \cap B) \Leftrightarrow 5P(\overline{A \cap B}) = 2 + 5P(A \cap B)$

$$\Leftrightarrow 5\big(1 - P(A \cap B)\big) = 2 + 5P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow 5 - 5P(A \cap B) = 2 + 5P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow 10P(A \cap B) = 3$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

$$P\big((\overline{A \cup B}) \cup A\big) = P\big((\bar{A} \cap \bar{B}) \cup A\big) =$$

$$= P\big((\bar{A} \cup A) \cap (\bar{B} \cup A)\big) =$$

$$= P\big(U \cap (\bar{B} \cup A)\big) =$$

$$= P(\bar{B} \cup A)$$

$$P(\bar{B} \cup A) = P(\bar{B}) + \underbrace{P(A) - P(\bar{B} \cap A)}_{P(A \cap B)} =$$

$$= 1 - P(B) + P(A \cap B) =$$

$$= 1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{10} =$$

$$= \frac{7}{10}$$

**7. Opção (D)**

$$\lim(u_n) = \lim \frac{2-5n}{n+3} = \lim\left(-5 + \frac{17}{n+3}\right) =$$

$$= -5 + \frac{17}{+\infty} =$$

$$= -5 + 0^+ =$$

$$= -5^+$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to -5^+} \frac{1}{2x+10} =$$
$$= \frac{1}{2\times(-5^+)+10} =$$
$$= \frac{1}{0^+} =$$
$$= +\infty$$

**8.**

**8.1** $f$ é contínua em $x = -2$ se existir $\lim_{x\to -2} f(x)$, isto é, se $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$.

- $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{7\sqrt{x^2-3}-7}{2x+4} =$

$$= \lim_{x\to -2^-} \frac{7\left(\sqrt{x^2-3}-1\right)}{2x+4} =$$
$$= 7\lim_{x\to -2^-} \frac{\left(\sqrt{x^2-3}-1\right)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{(2x+4)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)} =$$
$$= 7\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4}{(2x+4)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)} =$$
$$= \frac{7}{2}\lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)} =$$
$$= \frac{7}{2}\lim_{x\to -2^-} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3}+1} =$$
$$= \frac{7}{2} \times \frac{-2-2}{\sqrt{(-2)^2-3}+1} =$$
$$= \frac{7}{2} \times \frac{-4}{2} =$$
$$= -7$$

- $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{-2x^3-x^2+6x}{x^2+6x+8}$

$$= \lim_{x\to -2^+} \frac{-x(2x^2+x-6)}{x^2+6x+8} =$$
$$= \lim_{x\to -2^+} \frac{-x(x+2)(2x-3)}{(x+2)(x+4)} =$$
$$= \lim_{x\to -2^+} \frac{-x(2x-3)}{x+4} =$$
$$= \frac{-(-2)(2\times(-2)-3)}{-2+4} =$$
$$= -7$$

**Cálculos auxiliares**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | $-6$ |
| $-2$ | | $-4$ | 6 |
| | 2 | $-3$ | 0 |

$2x^2 + x - 6 = (x+2)(2x-3)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 6 | 8 |
| $-2$ | | $-2$ | $-8$ |
| | 1 | 4 | 0 |

$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$

- $f(-2) = -7$

Como $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) = -7$, conclui-se que $f$ é contínua em $x = -2$.

**8.2 Opção (A)**

$$f(-1)=\frac{-2(-1)^3-(-1)^2+6(-1)}{(-1)^2+6(-1)+8}=$$
$$=\frac{2-1-6}{1-6+8}=$$
$$=-\frac{5}{3}$$

$$f'(x)=\frac{(-6x^2-2x+6)(x^2+6x+8)-(-2x^3-x^2+6x)(2x+6)}{(x^2+6x+8)^2}$$

$$f'(-1)=\frac{(-6(-1)^2-2(-1)+6)((-1)^2+6(-1)+8)-\left(-2(-1)^3-(-1)^2+6(-1)\right)(2(-1)+6)}{((-1)^2+6(-1)+8)^2}=$$
$$=\frac{(-6+2+6)(1-6+8)-(2-1-6)(-2+6)}{(1-6+8)^2}=$$
$$=\frac{6+20}{3^2}=$$
$$=\frac{26}{9}$$

O declive da reta tangente ao gráfico de $f$, em $x=-1$, é $\frac{26}{9}$. Assim:

$-\frac{5}{3}=\frac{26}{9}\times(-1)+b \Leftrightarrow b=\frac{11}{9}$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $-1$ é $y=\frac{26}{9}x+\frac{11}{9}$.

**8.3** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)\times(6x-5)}{3x^2+x}=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)\times(6x-5)}{x(3x+1)}=2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-5}{3x+1}=2$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(6-\frac{5}{x}\right)}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}=2$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{6-\frac{5}{x}}{3+\frac{1}{x}}=2$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\times\frac{6}{3}=2$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=1$$

Daqui se conclui que o declive da reta $r$ é $1$, pelo que, para que a reta secante ao gráfico de $f$ nos pontos de abcissas $a$ e $2$ seja perpendicular à reta $r$, é necessário que o seu declive seja igual a $-1$. Assim:

$$\frac{f(a)-f(2)}{a-2}=-1 \Leftrightarrow \frac{\frac{-2a^3-a^2+6a}{a^2+6a+8}-\frac{-2\times2^3-2^2+6\times2}{2^2+6\times2+8}}{a-2}=-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{-2a^3-a^2+6a}{a^2+6a+8}+\frac{1}{3}}{a-2}=-1$$

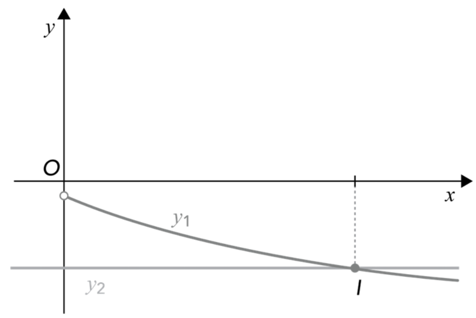
Utilizando $x$ como variável independente:

$\frac{\frac{-2x^3-x^2+6x}{x^2+6x+8}+\frac{1}{3}}{x-2}=-1$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$y_1=\frac{\frac{-2x^3-x^2+6x}{x^2+6x+8}+\frac{1}{3}}{x-2}, x>0$

$y_2=-1$




A abcissa do ponto *I*, com arredondamento às centésimas, é $3{,}33$, o que corresponde ao valor de $a$.

**9.** $f$ é contínua em $]1,+\infty[$, pelo que apenas a reta de equação $x=1$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de $f$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^4-1}}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}\sqrt{(x+1)(x^2+1)}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{(x+1)(x^2+1)}}{\sqrt{x-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(1^++1)((1^+)^2+1)}}{\sqrt{1^+-1}}=$$

$$=\frac{2}{0^+}=$$

$$=+\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, a reta de equação $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico de $f$ .

Como $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, no caso de existir assíntota oblíqua ao gráfico de $f$, a equação da assíntota oblíqua será dada por $y=x+b$.

Para determinar o valor de $b$, temos de calcular $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-x)$.

Assim:

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4-1}}{x-1}-x\right)=$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^4-1}-(x^2-x)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^4-1}-(x^2-x)\right)\left(\sqrt{x^4-1}+(x^2-x)\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^4-1}+(x^2-x)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4-1-(x^2-x)^2}{(x-1)(\sqrt{x^4-1}+x^2-x)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4-1-x^4+2x^3-x^2}{(x-1)(\sqrt{x^4-1}+x^2-x)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3-x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^4-1}+x^2-x)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3-x^2-1}{(x-1)\left(x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}+x^2-x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3-x^2-1}{(x-1)\left(x^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}+1-\frac{1}{x}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}+1-\frac{1}{x}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}+1-\frac{1}{x}\right)\right)} =$$

$$= \frac{2-0-0}{(1-0)\left((\sqrt{1-0}+1-0)\right)} =$$

$$= \frac{2}{2} =$$

$$= 1$$

Conclui-se, assim, que a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $f$.

Uma vez que o domínio de $f$ é $]1, +\infty[$, não poderá existir outra assíntota oblíqua ao seu gráfico.

**10. Opção (D)**

$$\lim_{x\to -2} \frac{h(-2) - h(x)}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2} \frac{h(-2) - h(x)}{(x+2)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{h(x)-h(-2)}{x+2} \times \lim_{x\to -2} \frac{-1}{x-1} =$$

$$= h'(-2) \times \left(\frac{1}{3}\right) =$$

$$= -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= -1$$

**Cálculo auxiliar**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $1$ | $1$ | $-2$ |
| $-2$ | | $-2$ | $2$ |
| | $1$ | $-1$ | $0$ |

$2x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

**11.** Sabe-se que $a \in \mathbb{R}^+, D_h = [0, a]$ e $D'_h = [0, a]$.

Pretende-se provar que existe, pelo menos, um instante $c \in [0, a]$ tal que $h(c) = a - c$.

Caso $h(0) = a$ ou $h(a) = 0$, tem-se que os pontos de abcissas $0$ ou $a$ satisfazem o pretendido.

A condição $h(c) = a - c$ é equivalente a $h(c) - a + c = 0$.

Seja $g$ a função definida por $g(x) = h(x) + x - a$ tal que $h(0) \neq a$ e $h(a) \neq 0$.

$g$ é contínua em $[0, a]$, por se tratar da soma entre duas funções contínuas neste intervalo.

$g(0) = h(0) + 0 - a = h(0) - a < 0$, pois $D'_h = [0, a]$ e $h(0) \neq a$.

$g(a) = h(a) + a - a = h(a) > 0$, pois $D'_h = [0, a]$ e $h(a) \neq 0$.

Daqui se conclui que $g(0) < 0 < g(a)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in ]0, a[: g(c) = 0$, isto é, existe pelo menos um instante $c \in ]0, a[: h(c) + c - a = 0$, ou seja, $h(c) = a - c$.

Em ambos os casos, provámos que existe pelo menos um instante $c \in [0, a]$ para o qual $h(c) = a - c$.