Teste N.º 1 de Matemática A • 12.º Ano
Proposta de resolução

1. Opção (D)

$$2 \times 3 \times 3! \times 7! = 181\,440$$

2. $5 \times 4^2 \times {}^9A_3 = 40\,320$

3. Opção (A)

Existem duas alternativas mutuamente exclusivas que devem ser tidas em consideração: a primeira carta é um ás de paus ou a primeira carta é um ás que não é de paus.

Assim, $1 \times 12 \times {}^{50}A_2 + 3 \times 13 \times {}^{50}A_2$.

4. A primeira parcela, $3 \times 8 \times {}^7C_4 \times 4!$, corresponde ao número de formas distintas de, cumprindo os requisitos do enunciado, serem utilizadas exatamente cinco cores para pintar o cubo. Uma vez que duas faces que tenham uma aresta em comum são pintadas com cores diferentes, existem 3 formas de se escolher as faces opostas que serão pintadas com a mesma cor e, para cada uma destas, existem 8 opções na escolha da cor e, para cada uma destas, existem 7C_4 maneiras de serem escolhidas quatro das sete cores restantes, sendo que, para cada uma destas, existem $4!$ modos distintos de pintar as restantes quatro faces ainda não pintadas.

A segunda parcela, 8A_6 , corresponde ao número de maneiras de pintar as faces do cubo, com seis das oito cores disponíveis, permutando as cores pelas faces.

5. Uma vez que $0,4n$ bolas são brancas, então $0,6n$ bolas são pretas.

Sabe-se que a probabilidade de serem extraídas duas bolas da mesma cor é $\frac{33}{65}$, pelo que:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{0,4n}C_2 + {}^{0,6n}C_2}{{}^nC_2} = \frac{33}{65} &\Leftrightarrow \frac{\frac{(0,4n)!}{(0,4n-2)! \times 2!} + \frac{(0,6n)!}{(0,6n-2)! \times 2!}}{\frac{n!}{(n-2)! \times 2!}} = \frac{33}{65} \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{0,4n(0,4n-1)(0,4n-2)!}{(0,4n-2)! \times 2!} + \frac{0,6n(0,6n-1)(0,6n-2)!}{(0,6n-2)! \times 2!}}{\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2!}} = \frac{33}{65} \\ &\Leftrightarrow \frac{0,4n(0,4n-1) + 0,6n(0,6n-1)}{n(n-1)} = \frac{33}{65} \\ &\Leftrightarrow \frac{0,4(0,4n-1) + 0,6(0,6n-1)}{n-1} = \frac{33}{65} \\ &\quad n > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{0,16n - 0,4 + 0,36n - 0,6}{n-1} = \frac{33}{65} \\ &\Leftrightarrow \frac{0,52n - 1}{n-1} = \frac{33}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \underbrace{65}_{n>1}(0,52n - 1) &= 33(n - 1) \\ \Leftrightarrow 33,8n - 65 &= 33n - 33 \\ \Leftrightarrow 0,8n &= 32 \\ \Leftrightarrow n &= 40 \end{aligned}$$

O valor de n é 40.

6. Opção (B)

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,85 &\Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0,85 \\ &\Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0,85 \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,15 \\ P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) &\Leftrightarrow P(B) = 0,15 + 0,55 \\ &\Leftrightarrow P(B) = 0,7 \\ P(\bar{B}) = 1 - P(B) &\Leftrightarrow P(\bar{B}) = 1 - 0,7 \\ &\Leftrightarrow P(\bar{B}) = 0,3 \end{aligned}$$

7. Sejam F e Q os acontecimentos:

F : "O aluno frequenta a disciplina de Física."

Q : "O aluno frequenta a disciplina de Química."

Tem-se que:

- $P(F) = 3P(Q)$
- $P(F \cup Q) = 4P(F \cap Q)$

Assim:

$$\begin{aligned} P(F \cup Q) = 4P(F \cap Q) &\Leftrightarrow P(F) + P(Q) - P(F \cap Q) = 4P(F \cap Q) \\ &\Leftrightarrow 3P(Q) + P(Q) = 5P(F \cap Q) \\ &\Leftrightarrow 4P(Q) = 5P(F \cap Q) \\ &\Leftrightarrow \frac{P(F \cap Q)}{P(Q)} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Pretende-se determinar a probabilidade de, selecionando, ao acaso, um aluno do 12.º ano, esse aluno não frequentar a disciplina de Física, sabendo que frequenta a disciplina de Química, isto é, $P(\bar{F}|Q)$.

$$\begin{aligned} P(\bar{F}|Q) = \frac{P(\bar{F} \cap Q)}{P(Q)} &\Leftrightarrow P(\bar{F}|Q) = \frac{P(Q) - P(F \cap Q)}{P(Q)} \Leftrightarrow P(\bar{F}|Q) = 1 - \frac{P(F \cap Q)}{P(Q)} \\ &\Leftrightarrow P(\bar{F}|Q) = 1 - \frac{4}{5} \\ &\Leftrightarrow P(\bar{F}|Q) = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

A probabilidade pedida é $\frac{1}{5}$.

8.

8.1 Consideremos os seguintes acontecimentos:

X: "Ser participante da empresa X."

E: "Ser engenheiro de *back-end*."

$$P(\bar{X} \cup \bar{E}) = \frac{7}{8} \Leftrightarrow P(\overline{X \cap E}) = \frac{7}{8} \Leftrightarrow 1 - P(X \cap E) = \frac{7}{8} \\ \Leftrightarrow P(X \cap E) = \frac{1}{8}$$

Seja n o número total de participantes presentes nesta *meetup*:

$$\frac{12}{n} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow n = 96$$

O número total de participantes presentes nesta *meetup* foi 96.

8.2 Sabe-se que, dos presentes, 36 são da empresa X e, destes, 12 são engenheiros de *back-end*, de onde se conclui que os restantes 24 não são engenheiros de *back-end*.

Começemos por determinar a probabilidade de, selecionando, ao acaso, três participantes, de entre os participantes da empresa X para apresentarem um projeto, nenhum ser engenheiro de *back-end*.

$$p = \frac{{}^{24}C_3}{{}^{36}C_3} = \frac{2024}{7140} = \frac{506}{1785}$$

Desta forma, a probabilidade de, pelo menos, um desses três participantes ser engenheiro de *back-end* é

$$1 - \frac{506}{1785} = \frac{1279}{1785} \approx 0,717.$$

Assim, a probabilidade pedida, na forma de percentagem e arredondada às décimas, é 71,7%.

9. Opção (B)

$$131\,072 = 2^{17}$$

$n = 17$; a linha 17 é constituída por 18 elementos.

O primeiro elemento da linha 17 é 1 e o segundo elemento desta linha é 17.

Recorrendo à calculadora, temos que ${}^{17}C_2 = 136$, ${}^{17}C_3 = 680$, ${}^{17}C_4 = 2380$ e ${}^{17}C_5 = 6188$.

Conclui-se, assim, que os cinco primeiros elementos da linha 17 são inferiores a 5000, e, como, os primeiros cinco elementos são iguais (por ordem inversa) aos últimos cinco, $18 - 5 - 5 = 8$, ou seja, existem oito elementos desta linha que são superiores a 5000.

$$10. \frac{{}^{n+2}C_{n-p} + {}^{n+2}C_{p+1}}{{}^{n+3}C_{n-p+1}} - \frac{{}^{n+3}A_{n-3} \times 6!}{(n+3)!} = \frac{{}^{n+2}C_{n+2-(n-p)} + {}^{n+2}C_{p+1}}{{}^{n+3}C_{n-p+1}} - \frac{{}^{n+3}A_{n-3} \times 6!}{(n+3)!} = \\ = \frac{{}^{n+2}C_{p+2} + {}^{n+2}C_{p+1}}{{}^{n+3}C_{n-p+1}} - \frac{{}^{n+3}A_{n-3} \times 6!}{(n+3)!} = \\ = \frac{{}^{n+3}C_{p+2}}{{}^{n+3}C_{n+3-(n-p+1)}} - \frac{\frac{(n+3)!}{(n+3-(n-3))!} \times 6!}{(n+3)!} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{{}^{n+3}C_{p+2}}{{}^{n+3}C_{p+2}} - \frac{\frac{(n+3)!}{6!} \times 6!}{(n+3)!} = \\
&= 1 - \frac{(n+3)!}{(n+3)!} = \\
&= 1 - 1 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

11. Opção (C)

$$n \times n = 729 \Leftrightarrow n^2 = 729$$

$$n > 0, \text{ logo } n = \sqrt{729} = 27.$$

A linha seguinte é a 28 e o sexto elemento ocorre para $p = 5$.

Assim, a resposta é ${}^{28}C_5 = 98\,280$.

12. Termo geral do desenvolvimento de $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$, com $x > 0$:

$${}^nC_p (\sqrt[3]{x})^{n-p} \left(-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^p = {}^nC_p \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{n-p} \left(-5 \times x^{-\frac{2}{3}}\right)^p$$

Sobre este desenvolvimento, sabe-se que o sexto termo é o termo independente de x , isto é, o termo de ordem 5 é o termo de grau zero.

Assim, o sexto termo é escrito na forma ${}^nC_5 \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{n-5} \left(-5 \times x^{-\frac{2}{3}}\right)^5$.

$$\begin{aligned}
{}^nC_5 \times \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{n-5} \times \left(-5 \times x^{-\frac{2}{3}}\right)^5 &= {}^nC_5 \times x^{\frac{n-5}{3}} \times (-5)^5 \times x^{-\frac{10}{3}} = \\
&= {}^nC_5 \times x^{\frac{n-15}{3}} \times (-5)^5
\end{aligned}$$

Como o sexto termo é o termo independente, tem-se que:

$$\frac{n-15}{3} = 0 \Leftrightarrow n = 15$$

Assim, o termo independente de x é:

$${}^{15}C_5 \times x^0 \times (-5)^5 = 3003 \times (-3125) = -9\,384\,375$$