Teste N.º 1 de Matemática A 12.º Ano
Proposta de resolução

1. Opção (A)

$$\overline{(\bar{A} \cap B)} \cap (A \cup B) = \left(\bar{\bar{A}} \cup \bar{B}\right) \cap (A \cup B) = (A \cup \bar{B}) \cap (A \cup B) =$$

$$= A \cup (\bar{B} \cap B) =$$

$$= A \cup \emptyset =$$

$$= A$$

2.

2.1 Opção (C)

$2 \times 5 \times 2! \times 4! = 480$

2.2 Uma vez que o código é constituído por seis algarismos e que representa um número superior a oitocentos mil, existem duas alternativas mutuamente exclusivas: o número deverá começar por 8 ou por 9. Por outro lado, o algarismo que irá ocupar a sexta posição deverá ser 2, 4, 6 ou 8, uma vez que o código deverá representar um número par, mas 2 e 8 terão de estar juntos.

Contabilizemos os códigos cujo algarismo que ocupa a primeira posição é o 8. Nesta situação, 2 tem de ser o algarismo seguinte, podendo o sexto algarismo ser o 4 ou o 6. Há, ainda, três dígitos por escolher, sem repetição dos algarismos já utilizados. Existem, assim, seis opções na escolha do terceiro dígito; para cada uma destas, existem cinco opções na escolha do quarto dígito; e, para cada uma destas, existem quatro opções na escolha do quinto dígito.

Esquematicamente:

$$\frac{\boxed{8}}{1} \times \frac{\boxed{2}}{1} \times \frac{\_\_}{6} \times \frac{\_\_}{5} \times \frac{\_\_}{4} \times \frac{4/6}{2}$$

Contabilizemos, agora, os códigos que começam por 9. Para esta situação, existem duas alternativas mutuamente exclusivas: o código terminar em 2 ou em 8, ou o código terminar com os algarismos 4 ou 6, conforme se observa no esquema seguinte:

$$\frac{\boxed{9}}{1} \times \frac{\_\_}{6} \times \frac{\_\_}{5} \times \frac{\_\_}{4} \times \frac{\_\_}{1} \times \frac{2/8}{2} + \frac{\boxed{9}}{1} \times \frac{\_\_\ \_\_}{3} \times 2! \times \frac{\_\_}{5} \times \frac{\_\_}{4} \times \frac{4/6}{2}$$

Na primeira alternativa, e uma vez que os algarismos 2 e 8 devem dispor-se lado a lado, existem duas opções para os dois últimos dígitos que são o 28 ou o 82. Seguidamente, há seis opções na escolha do terceiro dígito; para cada uma destas, existem cinco opções na escolha do quarto dígito e, para cada uma destas, existem quatro opções na escolha do quinto dígito.

Na segunda alternativa, o código terminar com os algarismos 4 ou 6, existem três opções na escolha do posicionamento dos algarismos 2 e 8, lado a lado, e, para cada uma destas formas, existem 2! modos distintos de eles se disporem entre si. Há, ainda, dois dígitos por escolher, sem repetição dos algarismos já utilizados. Há, assim, cinco opções na escolha de um dos dígitos em falta e, para cada uma destas, quatro opções na escolha do último dígito em falta.

Assim, de acordo com as condições do enunciado, o número de códigos existentes são $240+240+240=720$.

3. $12 \times {}^{11}C_2 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_5 = 498\,960$

4. Número de casos possíveis: ${}^{52}A_4$

Número de casos favoráveis: existem duas alternativas mutuamente exclusivas que devem ser tidas em consideração: a primeira carta é um às de paus ou a primeira carta é um às que não é de paus.

Assim, $1 \times {}^{50}A_2 \times 12 + 3 \times {}^{50}A_2 \times 13$.

$$P = \frac{1 \times {}^{50}A_2 \times 12 + 3 \times {}^{50}A_2 \times 13}{{}^{52}A_4} = \frac{29\,400 + 95\,550}{6\,497\,400} =$$

$$= \frac{124\,950}{6\,497\,400} =$$

$$= \frac{1}{52}$$

5. $$4! \times \frac{(n-3)!+(n-4)!}{(n-2)(n-4)!} + \frac{{}^{n+2}A_6}{{}^{n+1}C_4 \times 3!} = 24 \times \frac{(n-3)(n-4)!+(n-4)!}{(n-2)(n-4)!} + \frac{\frac{(n+2)!}{(n+2-6)!}}{\frac{(n+1)! \times 3!}{(n+1-4)! \times 4!}} =$$

$$= 24 \times \frac{(n-4)! \times \big((n-3)+1\big)}{(n-2)(n-4)!} + \frac{\frac{(n+2)!}{(n-4)!}}{\frac{(n+1)! \times 3!}{(n-3)! \times 4 \times 3!}} =$$

$$= 24 \times \frac{n-3+1}{n-2} + \frac{(n+2)!(n-3)! \times 4}{(n-4)! \times (n+1)!} =$$

$$= 24 \times \frac{n-2}{n-2} + \frac{(n+2) \times (n+1)!(n-3) \times (n-4)! \times 4}{(n-4)! \times (n+1)!} =$$

$$= 24 \times 1 + (n+2)(n-3) \times 4 =$$

$$= 24 + \ (n^2 - 3n + 2n - 6) \times 4 =$$

$$= 24 + (n^2 - n - 6) \times 4 =$$

$$= 24 + 4n^2 - 4n - 24 =$$

$$= 4n^2 - 4n =$$

$$= 4n\,(n-1)$$

6. Opção (B)

$8192 = 2^{13}$

$n = 13$ e $n + 1 = 14$

O número de elementos da linha seguinte é 15, pelo que o maior elemento desta linha é aquele que ocupa a 8.ª posição: ${}^{14}C_7 = 3432$

Cálculo auxiliar

8192	2
4096	2
2048	2
1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	2

7.

7.1 Número de casos possíveis: $5^8 = 390\,625$

Número de casos favoráveis: ${}^{6}C_2 \times 4 \times 4 \times 3! = 1440$

Existem ${}^{6}C_2$ formas distintas de serem escolhidas duas, de entre as seis faces retangulares, para serem coloridas com a cor azul. Para cada uma destas, existem 4 opções na escolha da face retangular que será colorida com a mesma cor das bases e, para cada uma destas opções, existem 4 opções de cor. Para todas estas maneiras, existem $3!$ modos distintos de colorir, sem repetição, as restantes faces com as três cores ainda disponíveis.

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{6}C_2 \times 4 \times 4 \times 3!}{5^8} = \frac{1440}{390\,625} \approx 0{,}004$.

7.2 Opção (D)

Número de casos possíveis: ${}^{12}C_3 = 220$

Número de casos favoráveis: ${}^{6}C_3 \times 2 = 40$

$$P = \frac{{}^{6}C_3 \times 2}{{}^{12}C_3} = \frac{40}{220} = \frac{2}{11}$$

8. ${}^{n}C_4 - {}^{n-1}C_8 = {}^{n-1}C_7 \Leftrightarrow {}^{n}C_4 = {}^{n-1}C_7 + {}^{n-1}C_8 \Leftrightarrow {}^{n}C_4 = {}^{n}C_8$

Logo, $n - 4 = 8 \Leftrightarrow n = 12$.

$$a = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x^{-\frac{1}{2}} \qquad b = -x\sqrt{x} = -x \times x^{\frac{1}{2}} = -x^{\frac{3}{2}}$$

Termo geral do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{x}\right)^{12}$, com $x > 0$:

$${}^{12}C_k \times \left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)^{12-k} \times \left(-x^{\frac{3}{2}}\right)^k,\ k \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$$

$${}^{12}C_k \times 2^{12-k}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{12-k} \times (-1)^k \times \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^k = {}^{12}C_k \times 2^{12-k} \times x^{\frac{-12+k}{2}} \times (-1)^k \times x^{\frac{3k}{2}} =$$

$$= {}^{12}C_k \times 2^{12-k} \times (-1)^k \times x^{\frac{-12+4k}{2}} =$$

$$= {}^{12}C_k \times 2^{12-k} \times (-1)^k \times x^{-6+2k}$$

$-6 + 2k = 8 \Leftrightarrow 2k = 14 \Leftrightarrow k = 7$

$a = {}^{12}C_7 \times 2^{12-7} \times (-1)^7 = 792 \times 32 \times (-1) = -25\,344$

9. Opção (B)

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$

$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$

$= 1 - (P(A) + P(\bar{A} \cap B)) =$

$= 1 - 0{,}15 - 0{,}4 =$

$= 0{,}45$

10.

10.1 Consideremos os seguintes acontecimentos:

C: "Ser candidato à função de comercial."

G: "Ser candidato à função de gestor de recursos humanos."

L: "Ser licenciado."

Sabe-se que:

- $P(C) = 56\% = 0{,}56$
- $P(L) = 3P(\bar{L})$
- $P(L|G) = \frac{10}{11}$

$P(L|G) = \frac{10}{11} \Leftrightarrow \frac{P(L\cap G)}{1-0{,}56} = \frac{10}{11}$

$\Leftrightarrow P(L \cap G) = \frac{10}{11} \times 0{,}44$

$\Leftrightarrow P(L \cap G) = 0{,}4$

$P(L) = 3P(\bar{L}) \Leftrightarrow P(L) = 3 \times \left(1 - P(L)\right)$

$\Leftrightarrow P(L) = 3 - 3P(L)$

$\Leftrightarrow 4P(L) = 3$

$\Leftrightarrow P(L) = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow P(L) = 0{,}75$

Organizando os dados numa tabela:

	C	G	**Total**
L		$0{,}4$	$0{,}75$
$\bar{L}$			
Total	$0{,}56$	$0{,}44$	1

$P(\overline{L}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

$P(L \cap C) = 0{,}75 - 0{,}4 = 0{,}35$

$P(\overline{L} \cap C) = 0{,}56 - 0{,}35 = 0{,}21$

	C	G	**Total**
L	$0{,}35$	$0{,}4$	$0{,}75$
$\overline{L}$	$0{,}21$		$0{,}25$
Total	$0{,}56$	$0{,}44$	1

$P(C|\overline{L}) = \frac{P(C \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{0{,}21}{0{,}25} = 0{,}84 = 84\%$

10.2 No primeiro dia de entrevistas estiveram presentes 150 candidatos, dos quais 56% se candidataram à função de comercial. Ora, $0{,}56 \times 150 = 84$ e $150 - 84 = 66$, pelo que 84 dos presentes são candidatos à função de comercial e 66 são candidatos à função de gestor de recursos humanos.

Pretende-se constituir uma equipa de oito elementos, assumindo cada um deles uma função distinta, em que, pelo menos, sete destes elementos são candidatos à função de comercial. Desta forma, existem duas alternativas mutuamente exclusivas: a equipa é formada por exatamente 7 elementos candidatos à função de comercial ou por 8.

Para a primeira alternativa, ${}^{84}C_7$ corresponde ao número de formas diferentes que é possível escolher 7 candidatos à função de comercial para integrar a equipa, e, para cada uma destas, existem 66 opções distintas de ser escolhido um elemento candidato à função de gestor de recursos humanos e, para cada uma destas formas, existem $8!$ maneiras diferentes de serem distribuídas as tarefas distintas entre eles.

Para a segunda alternativa, existem ${}^{84}A_8$ maneiras diferentes de serem escolhidos ordenadamente 8 candidatos à função de comercial.

Assim, a expressão ${}^{84}C_7 \times 66 \times 8! + {}^{84}A_8$ permite determinar o número de equipas formada por 8 elementos, todos com tarefas distintas, que é possível criar, constituída por, pelo menos, sete elementos que são candidatos à função de comercial.