

Teste N.º 1

**Matemática A**

---

**12.º Ano de Escolaridade**

---

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

---

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:** Semiperímetro  $\times$  Apótema

**Área de um setor circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4 \pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão ( $u_n$ ):

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

## Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

## Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

## Limites notáveis

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )

1. Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos, não disjuntos, de um universo  $U$ .

Qual dos seguintes conjuntos é igual a  $\overline{(A \cap B)} \cap (A \cup B)$ ?

(A)  $A$

(B)  $B$

(C)  $\bar{A}$

(D)  $\bar{B}$

2. Um grupo de sete amigos decidiu realizar um *Interrail* pela Europa.

A Francisca, o Joaquim e o Duarte são três desses amigos.

2.1 Na partida decidiram tirar uma fotografia, dispondo-se, para o efeito, em fila. De quantas formas diferentes se podem dispor os sete amigos em fila, ficando a Francisca e o Joaquim lado a lado e o Duarte numa das extremidades?

(A) 144

(B) 288

(C) 480

(D) 720

2.2 Chegando ao primeiro destino, foi-lhes fornecido um código de seis dígitos para terem acesso ao alojamento onde iriam pernoitar.

Considere todos os códigos de seis algarismos diferentes que é possível formar com os algarismos de 1 a 9.

Determine quantos desses códigos representam um número par, superior a oitocentos mil, com os algarismos 2 e 8 lado a lado.

Um código nestas condições é, por exemplo, 821 456.

3. Na figura está representado um esquema de uma caixa para guardar saquetas de chá com 12 divisórias, numeradas de 1 a 12.

O António tem dez saquetas de chá, das quais uma é de chá preto, duas são de chá de camomila, duas são de chá de erva-cidreira e cinco são de chá verde, só distinguíveis pela cor.



O António pretende guardar as dez saquetas de chá no tabuleiro, não mais do que uma em cada divisória.

De quantas maneiras diferentes é possível dispor as dez saquetas de chá no tabuleiro?

4. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em quatro naipes (espadas, copas, paus e ouros). Em cada naipe há 13 cartas: um ás, três figuras (dama, valete e rei) e mais nove cartas (do 2 ao 10).

Extraem-se, sucessivamente e sem reposição, quatro cartas, dispondo-as numa mesa, lado a lado.

Qual é a probabilidade de a primeira carta ser um ás e de a última carta ser de paus?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Seja  $n$  um número natural superior a cinco.

Mostre que:

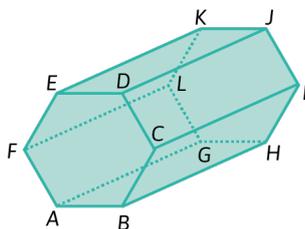
$$4! \times \frac{(n-3)! + (n-4)!}{(n-2)(n-4)!} + \frac{{}^{n+2}A_6}{{}^{n+1}C_4 \times 3!} = 4n(n-1)$$

6. A soma de todos os elementos de uma dada linha do triângulo de Pascal é igual a 8192.

Qual é o maior elemento da linha seguinte?

- (A) 3003                      (B) 3432                      (C) 5005                      (D) 6435

7. Na figura está representado o prisma hexagonal reto  $[ABCDEFGHijkl]$ , de bases  $[ABCDEF]$  e  $[GHIJKL]$ .



7.1 Dispõe-se de cinco cores diferentes, de entre as quais a azul, para colorir as oito faces do prisma. Cada face vai ser colorida com uma única cor. Considere a experiência aleatória que consiste em colorir, ao acaso, as oito faces do prisma, podendo cada face ser colorida com qualquer uma das cinco cores.

Determine a probabilidade de, no final da experiência, o prisma ficar colorido com exatamente duas das oito faces azuis, ambas retangulares, as duas bases serem coloridas com a mesma cor, e as restantes faces serem coloridas com cores diferentes.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

7.2 Seleccionaram-se, ao acaso, três vértices, de entre os doze que constituem o prisma.

Qual é a probabilidade de os vértices seleccionados definirem um plano que contém uma das bases do prisma?

- (A)  $\frac{1}{33}$                       (B)  $\frac{2}{33}$                       (C)  $\frac{1}{11}$                       (D)  $\frac{2}{11}$

8. Considere o desenvolvimento de  $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{x}\right)^n$ , com  $x > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Sabe-se que  ${}^nC_4 - {}^{n-1}C_8 = {}^{n-1}C_7$  e que um dos termos do desenvolvimento de  $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{x}\right)^n$  é da forma  $a \times x^8$ , sendo  $a$  um número real.

Determine, sem efetuar o desenvolvimento do binómio, o valor de  $a$ .

9. Seja  $E$  o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos possíveis ( $A \subset E$  e  $B \subset E$ ).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,15$
- $P(\bar{A} \cap B) = 0,4$

Qual é o valor de  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ?

- (A) 0,15                      (B) 0,45                      (C) 0,55                      (D) 0,65

10. Uma empresa está a realizar o recrutamento de novos colaboradores.

No primeiro dia de entrevistas, apenas estiveram presentes candidatos às funções de comercial e de gestor de recursos humanos.

Sabe-se que:

- 56% dos presentes se candidataram à função de comercial;
- o número de candidatos licenciados é o triplo do número de candidatos não licenciados;
- $\frac{10}{11}$  dos candidatos à função de gestor de recursos humanos eram licenciados.

10.1 Seleciona-se, ao acaso, um dos candidatos não licenciados que participaram no primeiro dia das entrevistas.

Determine a probabilidade de o candidato escolhido se ter candidatado à função de comercial. Apresente o resultado na forma de percentagem.

10.2 No primeiro dia de entrevistas estiveram presentes 150 candidatos.

Com o objetivo de promover a integração e a comunicação entre os candidatos presentes, foi proposta uma dinâmica de acolhimento: foi criada, ao acaso, uma equipa constituída por oito elementos, em que cada um deles assumiria uma função distinta.

Nestas condições, a expressão seguinte permite determinar o número de equipas que é possível criar, constituída por, pelo menos, sete elementos que são candidatos à função de comercial.

$${}^8_7C_7 \times 66 \times 8! + {}^8_8A_8$$

Explique, no contexto descrito, cada parcela desta expressão.

FIM

### COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	2.1	2.2	3.	4.	5.	6.	7.1	7.2	8.	9.	10.1	10.2	TOTAL
10	10	18	18	20	18	10	18	10	18	10	20	20	200