Teste N.º 2

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

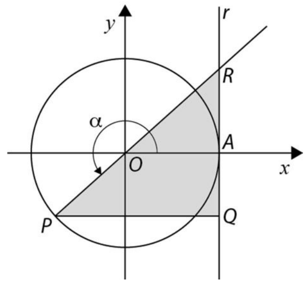
Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica e a reta r.

Sabe-se que:



- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto P está no terceiro quadrante e pertence à circunferência;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto A;
- o ponto Q pertence à reta r e é tal que o segmento de reta $[PQ]$ é paralelo ao eixo Ox;
- o ponto R é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\dot{P}O$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP, com $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

1.1. Mostre que a área do triângulo $[PQR]$ é dada, em função de α, por $A(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} \times (\cos\alpha - 1)^2$.

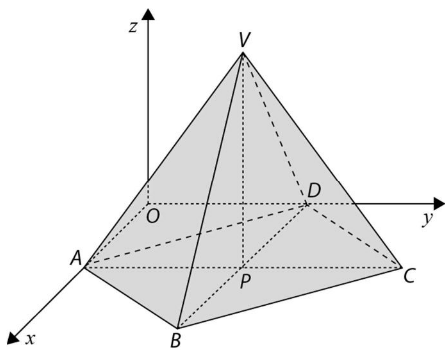
1.2. Recorrendo à calculadora gráfica, determine o(s) valor(es) de α para os quais a área do triângulo $[PQR]$ é igual ao comprimento do arco AP.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema, apresentando as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) para a sua resolução com aproximação às centésimas.

2. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$, cuja base está contida no plano xOy e cujo vértice V tem cota positiva.

O ponto P é o centro da base da pirâmide.

Admita que:



- uma equação da reta AD é $(x, y, z) = (2, -1, 0) + k(-1, -1, 0), k \in \mathbb{R}$;
- uma equação do plano BCV é $7x + 7y + 3z + 63 = 0$;
- o ponto P tem coordenadas $(3,3,0)$.

2.1. Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto A e que é paralelo a BCV.

2.2. Determine o volume da pirâmide $[ABCDV]$.

2.3. O plano BCV é tangente, num ponto T, a uma superfície esférica centrada na origem do referencial.

Determine o valor exato da área dessa superfície esférica.

3. Seja f a função, de domínio D e contradomínio $[1, +\infty[$, definida por $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$.

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto D?

(A) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

(B) $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$

(C) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$

(D) $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

4. Sabendo que β é um ângulo agudo e que $\frac{\cos \beta}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{9}{20}$, determine o valor exato de $\operatorname{sen} \beta$.

5. Considere, num referencial o.n. Oxy, uma reta r de inclinação α.

Sabe-se que $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Qual pode ser a equação reduzida da reta r ?

(A) $y = -2x$

(B) $y = 2x$

(C) $y = -3x$

(D) $y = 3x$

FIM DO CADERNO 1

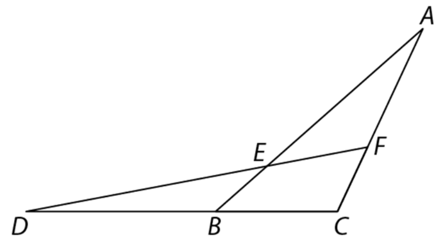
COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.**	**4.**	**5.**	
20	20	15	15	20	8	20	8	**126**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. Considere os triângulos $[ABC]$ e $[CDF]$ da figura.



Sabe-se que:

- $\overline{AE} = 5$
- $\overline{EB} = 2$
- $\overline{DB} = 6$
- $\overline{BC} = 4$
- $\overline{CF} = 2$

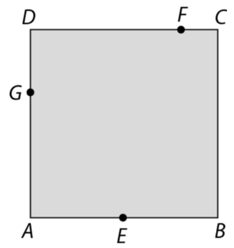
O valor de $\overline{FA}$ é igual a:

(A) $2{,}5$ **(B)** 3 **(C)** $3{,}5$ **(D)** 4

7. Determine, recorrendo a intervalos de números reais, os valores de k para os quais se tem:

$$\cos x = 1 - k^2 \ \wedge \ x \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right[$$

8. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado igual a 6.



Admita que:

- o ponto E é o ponto médio do segmento $[AB]$;
- o ponto F pertence ao segmento $[CD]$;
- o ponto G pertence ao segmento $[DA]$;
- o trapézio $[EBCF]$ tem área igual a 12;
- $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{GD}$.

Determine o valor exato de $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{EF}$.

9. Fixado um referencial ortonormado do plano, considere os pontos $A(2,1)$ e $B(0,1)$ e o vetor $\vec{v}(3k^2 - 3k, k-2)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Os valores reais de k para os quais o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ é obtuso são:

(A) $]0,1[\cup \{2\}$

(B) $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

(C) $[0,1]$

(D) $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\backslash \{2\}$

10. Seja a um número real.

Fixado um referencial ortonormado do espaço, considere a reta r e o plano α definidos, respetivamente, por:

$r: x = 2 + (a^2 - a)k \ \wedge \ y = -1 + (a^2 - 2)k \ \wedge \ z = 3 + (a-1)k, k \in \mathbb{R}$

$\alpha: (x, y, z) = \left(1, \pi, \sqrt{13}\right) + t(0, -1, 2) + s(-1, 0, 2), t, s \in \mathbb{R}$

Sabe-se que a reta r é perpendicular ao plano α.

Qual é o valor de a?

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 2

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item					
Cotação (em pontos)					
6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	
8	25	25	8	8	**74**

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Sabe-se que:

- $P(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$, com $\cos\alpha < 0$ e $\text{sen}\alpha < 0$
- $Q(1, \text{sen}\alpha)$
- $R(1, \text{tg}\alpha)$, com $\text{tg}\alpha > 0$

Logo:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{PQ}\times\overline{QR}}{2} = \frac{(1-\cos\alpha)(-\text{sen}\alpha+\text{tg}\alpha)}{2} = \frac{-\text{sen}\alpha+\text{tg}\alpha+\text{sen}\alpha\cos\alpha-\text{sen}\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\text{tg}\alpha+\text{sen}\alpha\cos\alpha-2\text{sen}\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\text{sen}\alpha}{2\cos\alpha} + \frac{\text{sen}\alpha\cos\alpha}{2} - \frac{2\text{sen}\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\text{sen}\alpha}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \cos\alpha - 2\right) =$$

$$= \frac{\text{sen}\alpha}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha-2\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right) =$$

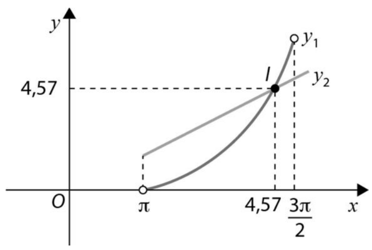
$$= \frac{\text{sen}\alpha}{2\cos\alpha} \times (\cos\alpha - 1)^2 =$$

$$= \frac{\text{tg}\alpha}{2} \times (\cos\alpha - 1)^2$$

1.2. O comprimento do arco AP é dado por $\alpha \times 1 = \alpha$.

$y_1 = \frac{\text{tg}\alpha}{2} \times (\cos\alpha - 1)^2$

$y_2 = \alpha$



$I(4{,}57; 4{,}57)$

A área do triângulo $[PQR]$ é igual ao comprimento do arco AP quando $\alpha \approx 4{,}57$.

2.

2.1. Comecemos por determinar as coordenadas de A:

$$(a,0,0) = (2,-1,0) + k(-1,-1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2-k \\ 0 = -1-k \\ 0 = 0k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2-(-1) \\ k = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ k = -1 \end{cases}$$

Logo, $A(3, 0, 0)$.

Uma equação cartesiana do plano que passa em A e é paralelo a BCV pode ser

$7(x-3)+7y+3z=0$, isto é, $7x+7y+3z-21=0$.

2.2. Como $[ABCD]$ é um quadrado e $P(3,3,0)$, então $D(0,3,0)$.

$\overline{AD}^2 = 3^2+3^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 18$

Como $[ABCDV]$ é uma pirâmide regular, então VP é uma reta paralela ao eixo Oz e $V(3,3,c)$ e, como V pertence ao plano BCV, vem que:

$$7\times 3+7\times 3+3c+63=0 \Leftrightarrow 3c=21$$
$$\Leftrightarrow c=7$$

Então:

$V_{[ABCDV]} = \frac{1}{3}\times 18 \times 7 = 42$ unidades de volume

2.3. A reta OT pode ser definida por:

$$(x,y,z)=(0,0,0)+k(7,7,3), k\in\mathbb{R}$$

Assim, um ponto genérico de OT é do tipo $(7k, 7k, 3k)$, com $k\in\mathbb{R}$.

Procuremos a interseção da reta OT com o plano BCV (o ponto T):

$$7(7k)+7(7k)+3(3k)+63=0 \Leftrightarrow 49k+49k+9k=-63$$
$$\Leftrightarrow k=-\frac{63}{107}$$

Logo, $T\left(-\frac{441}{107}, -\frac{441}{107,}, -\frac{189}{107}\right)$.

$$\overline{OT} = \sqrt{\left(-\frac{441}{107}\right)^2+\left(-\frac{441}{107}\right)^2+\left(-\frac{189}{107}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{194\,481+194\,481+35\,721}{11\,449}} =$$
$$= \sqrt{\frac{424\,683}{11\,449}}$$
$$= \sqrt{\frac{3969}{107}}$$

$$A = 4\times \pi\times r^2 =$$
$$= 4\pi\left(\overline{OT}\right)^2 =$$
$$= 4\pi\times\frac{3969}{107} =$$
$$= \frac{1\,5876}{107}\pi$$

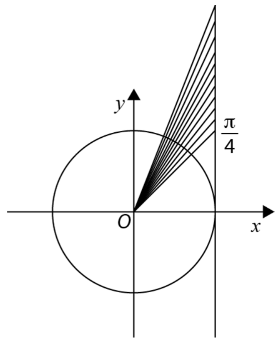
3. Opção (D)

Se $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$:

$1 \leq \text{tg}x \Leftrightarrow -1 \geq -\text{tg}x$

$\Leftrightarrow 0 \geq 1 - \text{tg}x$

$\Leftrightarrow f(x) \leq 0$, o que contradiz o facto de $D'_f = [1, +\infty[$.

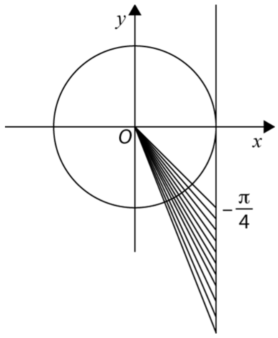


Se $-\frac{\pi}{2} < x \leq -\frac{\pi}{4}$:

$\text{tg}x \leq -1 \Leftrightarrow -\text{tg}x \geq 1$

$\Leftrightarrow 1 - \text{tg}x \geq 2$

$\Leftrightarrow f(x) \geq 2$, o que contradiz o facto de $D'_f = [1, +\infty[$.

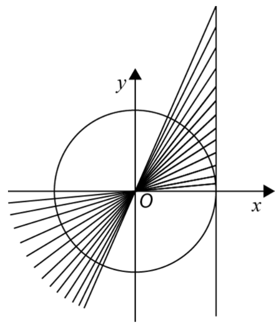


Se $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$:

$\text{tg}x \geq 0 \Leftrightarrow -\text{tg}x \leq 0$

$\Leftrightarrow 1 - \text{tg}x \leq 1$

$\Leftrightarrow f(x) \leq 1$, o que contradiz o facto de $D'_f = [1, +\infty[$.

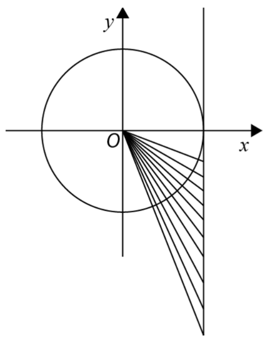


Se $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$:

$\text{tg}x \leq 0 \Leftrightarrow -\text{tg}x \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 - \text{tg}x \geq 1$

$\Leftrightarrow f(x) \geq 1$



4. $\frac{\cos\beta}{\text{tg}\beta} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{\cos\beta}{\frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{\cos^2\beta}{\text{sen}\beta} = \frac{9}{20}$

$\Leftrightarrow 20\cos^2\beta = 9\text{sen}\beta$

$\Leftrightarrow 20(1 - \text{sen}^2\beta) = 9\text{sen}\beta$

$\Leftrightarrow -20\text{sen}^2\beta - 9\text{sen}\beta + 20 = 0$

$\Leftrightarrow \text{sen}\beta = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times (-20) \times 20}}{-40}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\text{sen}\beta = -\frac{5}{4}}_{\text{Condição impossível}} \quad \vee \quad \text{sen}\beta = \frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\beta = \frac{4}{5}$

O valor exato de $\text{sen}\beta$ é igual a $\frac{4}{5}$.

5. Opção (C)

Seja α a inclinação da reta r.

Então, $m_r = \text{tg}\alpha$.

Sabe-se que $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Assim:

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = 10$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = 9$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\alpha = \pm 3$$

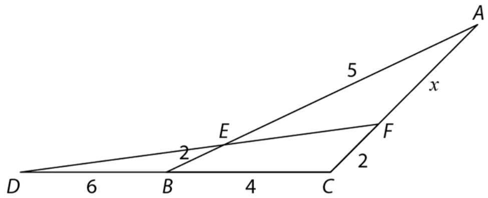
Como α é a inclinação da reta r e $\cos\alpha < 0$, então $\alpha \in \left]90°, 180°\right[$.

Logo, $\text{tg}\alpha < 0$.

Portanto, $\text{tg}\alpha = -3$, ou seja, $m_r = -3$.

Caderno 2

6. Opção (B)



Considerando o $\Delta[DBE]$, tem-se que:

$$\frac{\text{sen}(E\hat{D}B)}{2} = \frac{\text{sen}(D\hat{E}B)}{6} \Leftrightarrow \text{sen}(D\hat{E}B) = 3\text{sen}(E\hat{D}B) \quad \textbf{(1)}$$

Considerando o $\Delta[DCF]$, tem-se que:

$$\frac{\text{sen}(F\hat{D}C)}{2} = \frac{\text{sen}(D\hat{F}C)}{10} \Leftrightarrow \text{sen}(D\hat{F}C) = 5\text{sen}(F\hat{D}C) \quad \textbf{(2)}$$

Considerando o $\Delta[AFE]$, tem-se que:

$$\frac{\text{sen}(E\hat{F}A)}{5} = \frac{\text{sen}(A\hat{E}F)}{x} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(180°-D\hat{F}C)}{5} = \frac{\text{sen}(A\hat{E}F)}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen}(D\hat{F}C)}{5} = \frac{\text{sen}(A\hat{E}F)}{x}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\text{sen}(A\hat{E}F)}{\text{sen}(D\hat{F}C)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\text{sen}(D\hat{E}B)}{5\text{sen}(F\hat{D}C)} \quad \text{(por 2)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\times 3\text{sen}(E\hat{D}B)}{5\times\text{sen}(F\hat{D}C)} \quad \text{(por 1)}$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

7. Se $x \in \left]-\frac{\pi}{3}, 0\right]$, então $\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$.

Se $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right[$, então $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leq 1$.

Assim, para $x \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right[$, tem-se $\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$.

Logo:

$$1 - k^2 > \frac{1}{2} \ \wedge \ 1 - k^2 \leq 1 \Leftrightarrow -k^2 > -\frac{1}{2} \ \wedge \ -k^2 \leq 0$$

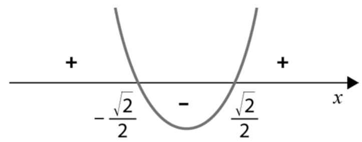
$$\Leftrightarrow k^2 < \frac{1}{2} \ \wedge \ \underbrace{k^2 \geq 0}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow k^2 - \frac{1}{2} < 0$$

Cálculo auxiliar

$$k^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k^2 - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < k < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



C.S. $= \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

8. $\overline{AG} + \overline{GD} = 6 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\overline{GD} + \overline{GD} = 6$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}\overline{GD} = 6$$

$$\Leftrightarrow \overline{GD} = \frac{18}{5}$$

$$\overline{AG} = 6 - \frac{18}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{\overline{EB}+\overline{CF}}{2} \times \overline{CB} = 12 \Leftrightarrow \frac{3+\overline{CF}}{2} \times 6 = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{3+\overline{CF}}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 3 + \overline{CF} = 4$$

$$\Leftrightarrow \overline{CF} = 1$$

$$\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{EF} = \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG}\right).\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}\right) =$$

$$= \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CF} =$$

$$= 3 \times 3 \times \cos(180°) + 0 + 3 \times 1 \times \cos(0°) + 0 + \frac{12}{5} \times 6 \times \cos(0°) + 0 =$$

$$= -9 + 3 + \frac{72}{5} =$$

$$= \frac{42}{5}$$

9. Opção (D)

$\overrightarrow{AB} = (0,1) - (2,1) = (-2,0)$

O ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ é obtuso se e somente se $\overrightarrow{AB}.\vec{v} < 0$ e $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

- $\overrightarrow{AB}.\vec{v} < 0 \Leftrightarrow -2(3k^2 - 3k) + 0(k-2) < 0$

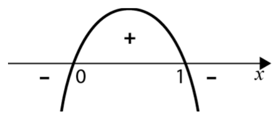
  $\Leftrightarrow -6k^2 + 6k < 0$

  $\Leftrightarrow k < 0 \ \vee \ k > 1$

Cálculo auxiliar

$-6k^2 + 6k = 0 \Leftrightarrow -6k(k-1) = 0$

$\Leftrightarrow k = 0 \ \vee \ k = 1$



- $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ não são colineares se e somente se $k - 2 \neq 0$, ou seja, $k \neq 2$.

  Assim, os valores reais de k para os quais o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ é obtuso são $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\backslash \{2\}$.

10. Opção (D)

Se r é perpendicular ao plano, então:

$$\begin{cases} (a^2 - a, a^2 - 2, a - 1).(0,-1,2) = 0 \\ (a^2 - a, a^2 - 2, a - 1).(-1,0,2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 2 + 2a - 2 = 0 \\ -a^2 + a + 2a - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 2a = 0 \\ -a^2 + 3a - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(-a+2) = 0 \\ a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-1) \times (-2)}}{-2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a = 0 \ \vee \ a = 2) \wedge (a = 1 \ \vee \ a = 2)$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$