Proposta de teste de avaliação [novembro – 2018]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado de cada caderno.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

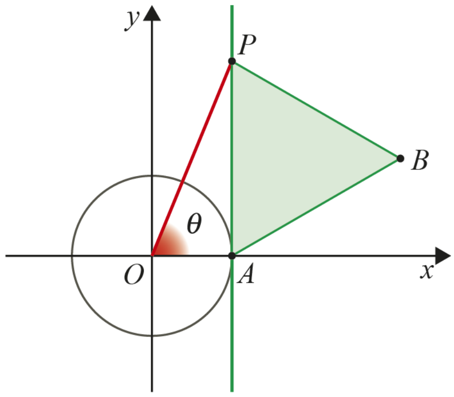
1. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica de centro O e raio 1.

Sabe-se que:

. o triângulo $[ABP]$ é equilátero e o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;

. o reta AP é paralela a Oy e P pertence ao 1.º quadrante;

. a amplitude, em radianos, do ângulo AOP é θ, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



1.1. Determina o valor exato da medida da área do triângulo $[ABP]$ se $\theta = \frac{\pi}{4}$.

1.2. Para um determinado número real θ, o perímetro do triângulo $[ABP]$ é 38.

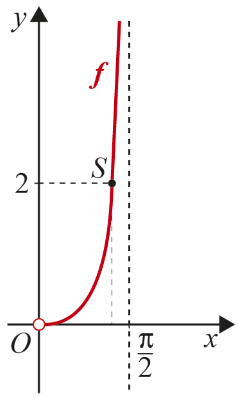
O valor de θ arredondado às centésimas é:

(A) $85,49$ **(B)** $1,54$ **(C)** $1,49$ **(D)** $88,49$

1.3. Considerando $\theta = \frac{\pi}{3}$, a abcissa do ponto B é:

(A) $\frac{5}{2}$ **(B)** $\sqrt{7}$ **(C)** $2\sqrt{3}$ **(D)** $2,75$

1.4. Na figura, num referencial o.n. Oxy, encontra-se parte do gráfico da função f, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, em que $f(\theta)$ representa a área do triângulo $[ABP]$.



O ponto S pertence ao gráfico de f e tem ordenada 2.

Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina a abcissa do ponto S.

Na tua resolução deves apresentar:

. a expressão de $f(\theta)$;

. o valor da abcissa de S arredondado às milésimas.

2. A equação $2-\sin x=\sqrt{7}$ num dado intervalo tem três soluções.

Esse intervalo pode ser:

(A) $\left[\frac{\pi}{2},\ 2\pi\right]$ **(B)** $\left[\frac{7\pi}{6},\ \pi\right]$ **(C)** $\left[-\frac{\pi}{4},\ 2\pi\right]$ **(D)** $\left[-\frac{\pi}{6},\ 2\pi\right]$

FIM (Caderno 1)

Cotações						Total
Questões – Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**2.**	
Pontos	15	12	12	25	12	**76**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora.)

3. Qual é o valor de $\arctan\left(\sqrt{3}\right)-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$?

(A) 0 **(B)** $\frac{\pi}{6}$ **(C)** π **(D)** $-\frac{\pi}{3}$

4. Considera a equação $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(3x\right)=\frac{3}{4}$.

Qual dos seguintes valores é solução da equação?

(A) $-\frac{\pi}{2}$ **(B)** $\frac{\pi}{3}$ **(C)** $-\pi$ **(D)** $\frac{\pi}{6}$

5. Seja *f* a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, definida por:

$$f\left(x\right)=\tan\left(x\right)\sin\left(x\right)+\sqrt{3}\sin\left(x\right)$$

Determina os zeros de *f*.

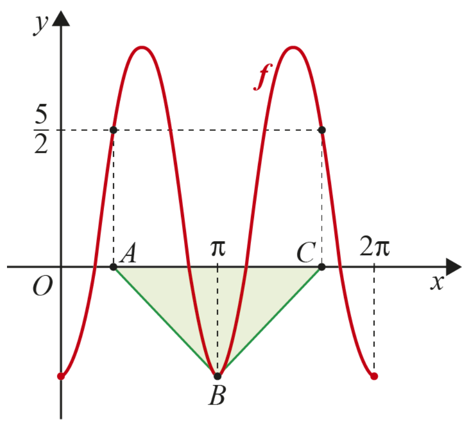
6. Na figura, num referencial o.n. *Oxy*, está representada a função *f*, de domínio $\left[0, 2\pi\right]$, definida por:

$$f\left(x\right)=1-3\cos\left(2x\right)$$

Em relação aos vértices do triângulo [*ABC*], sabe-se que:

. os vértices *A* e *C* pertencem ao eixo *Ox* e as abcissas são, respetivamente, a menor e a maior das soluções da equação $f\left(x\right)=\frac{5}{2}$;

. o vértice *B* é o ponto do gráfico de *f* com abcissa π.



6.1. Mostra que $\overline{AC}=\frac{4\pi}{3}$.

6.2. Determina a medida da área do triângulo [*ABC*], atendendo ao resultado apresentado em **6.1.**

7. Na figura, num referencial o.n. Oxy, está representada a circunferência trigonométrica de centro O e raio 1.

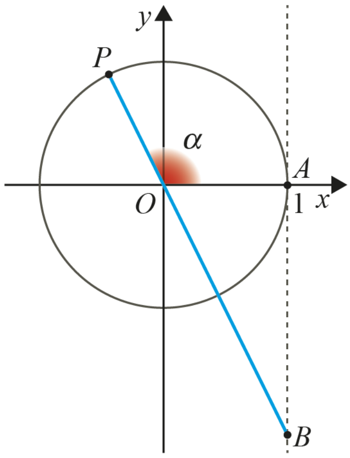
Sabe-se que:

. o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;

. o ponto P é do 2.º quadrante e pertence à circunferência;

. o ponto B é a interseção da reta OP com a reta que passa em A e é paralela a Oy;

. a amplitude, em radianos, do ângulo AOP é representada por α, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.



7.1. Determina a ordenada de B no caso de a abcissa de P ser $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Apresenta o resultado na forma de fração com denominador racional.

7.2. Seja f a função, de domínio $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, definida por $f(x) = \sqrt{2 - 2\cos x}$.

Designando por d a distância entre os pontos A e P, mostra que $d = f(\alpha)$.

FIM (Caderno 2)

Cotações								Total
Questões – Caderno 2	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	
Pontos	12	12	20	25	15	20	20	**124**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;
r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1.1 Se $\theta = \frac{\pi}{4}$, então $\overline{AP} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

O triângulo $[ABP]$ é um triângulo equilátero de lado 1.

Seja h a altura do triângulo.

$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}$, pelo que $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, a medida da área do triângulo é dada por: $\frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Resposta: $\frac{\sqrt{3}}{4}$ u.a.

1.2 Se o perímetro é 38, então $\overline{AP} = \tan(\theta) = \frac{38}{3}$.

$\arctan\left(\frac{38}{3}\right) \approx 1,49$

Resposta: **(C)** $1,49$

1.3. Se $\theta = \frac{\pi}{3}$, então $\overline{AP} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Seja h a altura do triângulo.

$h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{9}{4}$, pelo que $h = \frac{3}{2}$.

Assim, a abcissa de B é dada por $1 + \frac{3}{2}$, ou seja, é igual a $\frac{5}{2}$.

Resposta: **(A)** $\frac{5}{2}$

1.4. $\overline{AP} = \tan(\theta)$

Seja h a altura do triângulo.

$$h^2 + \left(\frac{\tan(\theta)}{2}\right)^2 = \tan^2(\theta) \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}\tan^2(\theta)$$

Daqui resulta que $h = \frac{3}{2}\tan(\theta)$.

A área do triângulo é dada pela expressão $\frac{\tan(\theta) \times \frac{3}{2}\tan(\theta)}{2}$, ou seja, $\frac{3}{4}\tan^2(\theta)$.

Assim, $f(\theta) = \frac{3}{4}\tan^2(\theta)$.

A abcissa de S é a solução da equação $f(x) = 2$.

Recorrendo à calculadora gráfica e resolvendo a equação graficamente, obtém-se, para abcissa do ponto S, arredondado às milésimas, 1,021.

2. $2 - \sin x = \sqrt{7} \Leftrightarrow \sin x = 2 - \sqrt{7}$

Repara que:

. $2 - \sqrt{7} \approx -0{,}646$

. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -0{,}5$; $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}707$ e $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

A equação dada, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$, tem três soluções e, nos restantes, tem duas.

Resposta: **(C)** $\left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$

FIM (Caderno 1)

CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora.)

3. $\arctan\left(\sqrt{3}\right)-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

Resposta: (D) $-\frac{\pi}{3}$

4. $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin(3x)=\frac{3}{4}$

Se $\frac{\pi}{3}$ for solução da equação, então $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin(\pi)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-0=\frac{3}{4}$.

Conclui-se que $\frac{\pi}{3}$ é solução da equação.

Resposta: (B) $\frac{\pi}{3}$

5. $f(x)=0 \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan(x)\sin(x)+\sqrt{3}\sin(x)=0 \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(x)\left(\tan(x)+\sqrt{3}\right)=0 \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sin(x)=0 \vee \tan(x)=-\sqrt{3}\right) \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x=k\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right) \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-\frac{\pi}{3} \vee x=\frac{2\pi}{3}$

Resposta: $\left\{-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}\right\}$

6.1. $f(x)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 1-3\cos(2x)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \cos(2x)=-\frac{1}{2}$

$\cos(2x)=-\frac{1}{2} \wedge x\in[0,\ 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee 2x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right) \wedge x\in[0,\ 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x=\frac{\pi}{3}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right) \wedge x\in[0,\ 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3} \vee x=\frac{2\pi}{3} \vee x=\frac{4\pi}{3} \vee x=\frac{5\pi}{3}$

Assim, tem-se: $A\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ e $C\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$.

$\overline{AC}=\left|\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right|=\frac{4\pi}{3}$, como queríamos demonstrar.

6.2. Área do triângulo [*ABC*] é dada por: $\frac{\overline{AC}\times|f(\pi)|}{2}$.

$\frac{\overline{AC}\times|f(\pi)|}{2}=\frac{\frac{4\pi}{3}\times|-2|}{2}=\frac{4\pi}{3}$

Resposta: $\frac{4\pi}{3}$

7.1. Sabe-se que $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ e $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\frac{5}{9}} \Leftrightarrow \tan^2\alpha=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \tan\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

Como o ponto *P* pertence ao 2.º quadrante, conclui-se que $\tan\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

A ordenada do ponto *B* é $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Resposta: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

7.2. As coordenadas do ponto P são: $\left(\cos\alpha, \sin\alpha\right)$.

$d = \overline{PA} = \sqrt{\left(\cos\alpha - 1\right)^2 + \left(\sin\alpha - 0\right)^2}$

$d = \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1 + \sin^2\alpha}$

$d = \sqrt{1 + 1 - 2\cos\alpha} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha}$

Assim, conclui-se que $d = f\left(\alpha\right)$.

FIM (Caderno 2)