Teste de Matemática A

2017 / 2018

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(r\, e^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u'\ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a\ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a}\ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\ (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty\ (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Considere o desenvolvimento de $\left(2x\cos\alpha - \frac{\text{sen}\,\alpha}{x}\right)^4$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$.

O termo independente de x, neste desenvolvimento é, para qualquer α, igual a:

(A) $-6\,\text{sen}^2(2\alpha)$

(B) $6\,\text{sen}^2(2\alpha)$

(C) $\text{sen}^4(\alpha)$

(D) $-\text{sen}^4(\alpha)$

2. Um saco contém 9 bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9. Retiraram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Considere os acontecimentos:

A: "o número da primeira bola retirada é ímpar."

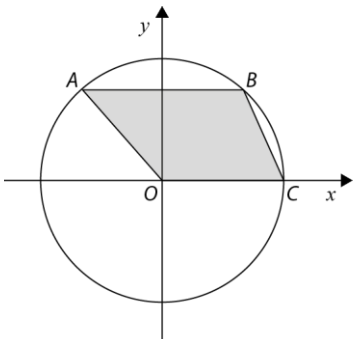
B: "o número da segunda bola retirada é par."

Determine o valor da probabilidade $P(\bar{A}|B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro na origem e raio 2.

Sabe-se que:



- o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto B pertence à circunferência e é tal que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox;
- o ponto C tem coordenadas $(2,0)$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COA, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[OCBA]$, representado a sombreado, em função de α?

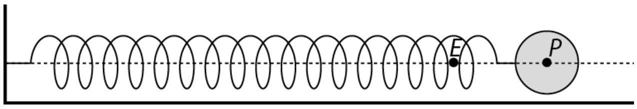
(A) $2\text{sen}\,\alpha - 2\text{sen}\,(2\alpha)$

(B) $\frac{\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,(2\alpha)}{2}$

(C) $2\text{sen}\,\alpha + 2\text{sen}\,(2\alpha)$

(D) $\frac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,(2\alpha)}{2}$

4. Uma esfera encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.



Na figura, o ponto E é um ponto fixo, sendo o ponto de equilíbrio da mola. O ponto P representa o centro da esfera e desloca-se sobre a semirreta com origem na extremidade fixa da mola e que contém o ponto E. Admita que não existe qualquer resistência ao movimento.

Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto E é dada por:

$$d(t) = \frac{5}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{5\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo $(t \in \mathbb{R}_0^+)$.

Resolva a alínea **4.1.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Prove que se trata de um oscilador harmónico. Indique a amplitude, o período, a frequência do movimento, bem como o respetivo ângulo de fase.

4.2. Sejam A e B dois pontos do gráfico de d, de abcissas a e b, respetivamente, tais que:

- $a \in]0, \pi[$
- $b - a = 8$

Determine a abcissa do ponto A, para a qual a área do triângulo $[OAB]$, sendo O a origem do referencial, é igual a 9.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^-$. Sabe-se que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x + \cos(2018x) + f(x)}{-2x} = 2$.

Qual das equações seguintes pode definir uma assíntota ao gráfico da função f?

(A) $y = 4x$

(B) $y = 2x$

(C) $y = -2x$

(D) $y = -4x$

6. Para estudar as etapas do desenvolvimento de um certo tipo de fungos, estudou-se em laboratório uma colónia desses fungos. Admita que o número de indivíduos da colónia, t dias após um determinado instante inicial, é dado, aproximadamente, por $P(t) = 1500\,e^{0,3\,t}$, com $t \geq 0$.

6.1. Prove que $\frac{P(t+1)}{P(t)}$ é uma constante. Determine o seu valor arredondado às centésimas e interprete o valor obtido no contexto do problema.

6.2. Para cada número real k, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = P(x+k)$. Para um certo número real k, o gráfico da função f passa no ponto de coordenadas $(-1, 1500e)$. Determine esse valor de k.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	
8	15	8	20	15	8	15	15	**104**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

7. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \begin{cases} n+1 & \text{se} \quad n < 2018 \\ \cos(n\pi) & \text{se} \quad n \geq 2018 \end{cases}$.

Considere as seguintes proposições:

(I) *A sucessão (u_n) é crescente.*

(II) *A sucessão (u_n) é limitada.*

Acerca das proposições anteriores, podemos concluir que:

(A) são ambas verdadeiras.

(B) são ambas falsas.

(C) apenas (I) é verdadeira.

(D) apenas (II) é verdadeira.

8. Para cada real k, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(6x)}{x^3+3x} - k^2 & \text{se} \quad x < 0 \\ -7 & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{\sqrt{x}+2x}{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

8.1. Determine os valores reais de k de modo que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) > f(0)$.

8.2. Estude, no intervalo $]0, +\infty[$, o gráfico da função f quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais, e, caso existam, escreva as suas equações.

9. Considere o seguinte problema, proposto por um amigo aos irmãos Joana e João:

"Vou mudar o pin do meu telemóvel. Preciso para isso de escolher um código com quatro algarismos, escolhidos entre os algarismos de 0 a 9, mas pretendia que todos os algarismos fossem diferentes e que o pin representasse um número maior que 2000.

Quantos pins existem nestas condições?"

A Joana e o João responderam corretamente, mas de forma diferente:

Joana: ${}^{10}A_4 - 2 \times {}^{9}A_3$

João: $8 \times {}^{9}C_3 \times 3!$

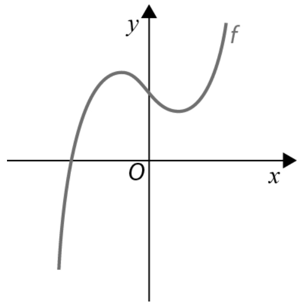
Elabore uma composição na qual explique o raciocínio de cada um dos irmãos.

10. Seja g a função definida, em $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, por $g(x) = \frac{x}{2} + (1-\cos x)^2$.

10.1. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$.

10.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

11. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f.



Considere que:

- a função f tem um único máximo relativo para $x = -1$;
- a função f tem um único mínimo relativo para $x = 1$;
- o ponto de abcissa 0 é o único ponto de inflexão do gráfico de f.

Sejam f' e f'' a primeira e a segunda derivadas da função f, respetivamente.

Qual é o conjunto-solução da condição $f'(x) \times f''(x) \leq 0$?

(A) $[-1, 0] \cup [1, +\infty[$

(B) $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

(C) $]-\infty, -1] \cup [0, 1]$

(D) $]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
7.	**8.1.**	**8.2.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.**	
8	20	15	15	15	15	8	**96**

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

O termo geral deste desenvolvimento é da forma:

$$^4C_k\ (2x\cos\alpha)^{4-k} \times \left(-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{x}\right)^k = {}^4C_k \times 2^{4-k} \times x^{4-k} \times (\cos\alpha)^{4-k} \times (-1)^k \times (\operatorname{sen}\alpha)^k \times x^{-k} =$$

$$= {}^4C_k \times 2^{4-k} \times (-1)^k \times x^{4-2k} \times (\cos\alpha)^{4-k} \times (\operatorname{sen}\alpha)^k =$$

A expressão ${}^4C_k \times 2^{4-k} \times (-1)^k \times x^{4-2k} \times (\cos\alpha)^{4-k} \times (\operatorname{sen}\alpha)^k$ não depende da variável x se e só se $4 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

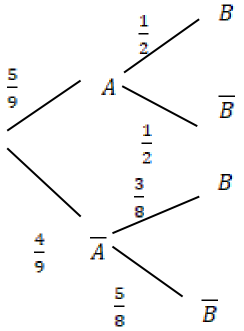
O termo independente de x é, portanto:

$$^4C_2 \times 2^{4-2} \times (-1)^2 \times (\cos\alpha)^2 \times (\operatorname{sen}\alpha)^2 = 6 \times 4 \times \cos^2\alpha \times \operatorname{sen}^2\alpha =$$

$$= 6 \times (2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2 =$$

$$= 6\operatorname{sen}^2(2\alpha)$$

2.



$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(\overline{A}) \times P(B|\overline{A})}{P(B\cap A) + P(B\cap \overline{A})} =$$

$$= \frac{P(\overline{A}) \times P(B|\overline{A})}{P(A) \times P(B|A) + P(\overline{A}) \times P(B|\overline{A})} =$$

$$= \frac{\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}}{\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{9}} =$$

$$= \frac{3}{8}$$

3. Opção (A)

$A(2\cos\alpha, 2\operatorname{sen}\alpha)$, com $2\cos\alpha < 0$ e $2\operatorname{sen}\alpha > 0$

$A_{[OCBA]} = \frac{\overline{OC}+\overline{AB}}{2} \times$ ordenada de A

- $\overline{OC} = 2$
- $\overline{AB} = 2 \times |2\cos\alpha| = -4\cos\alpha$
- Ordenada de $A = 2\text{sen}\alpha$

Logo:

$A_{[OCBA]} = \frac{2-4\cos\alpha}{2} \times 2\text{sen}\alpha =$

$= (1 - 2\cos\alpha) \times 2\text{sen}\alpha =$

$= 2\text{sen}\alpha - 2 \times 2\text{sen}\alpha\cos\alpha =$

$= 2\text{sen}\alpha - 2\text{sen}(2\alpha)$

4.

4.1. $d(t) = 5\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) =$

$= 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) =$

$= 5\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{3}\right) =$

$= 5\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) =$

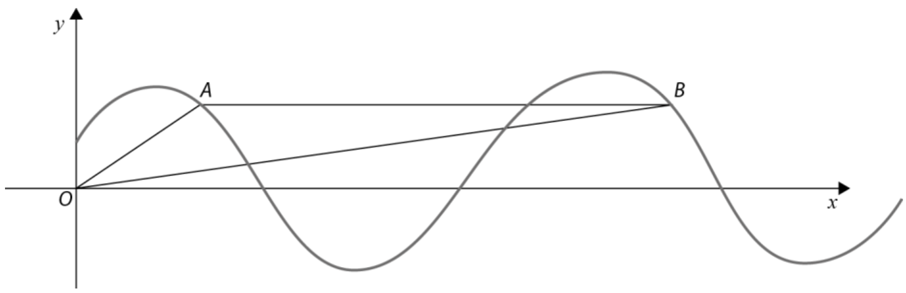
$= 5\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right)$

Como $d(t) = 5\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right)$ e $5 > 0$, $\frac{\pi}{4} > 0$ e $\frac{5\pi}{3} \in [0,2\pi[$, então $d(t)$ é um oscilador harmónico.

A amplitude é igual a 5, o período é igual a $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$, a frequência é igual a $\frac{1}{8}$ e o ângulo de fase é igual a $\frac{5\pi}{3}$.

4.2. Sabemos que $b - a = 8 \Leftrightarrow b = a + 8$ e 8 é o período de d, logo $d(a) = d(b)$.

Tal como a figura abaixo ilustra, para qualquer posição do ponto A, a altura do triângulo $[OAB]$ relativa à base $[AB]$ é dada, em função da abcissa a do ponto A, por $d(a)$.



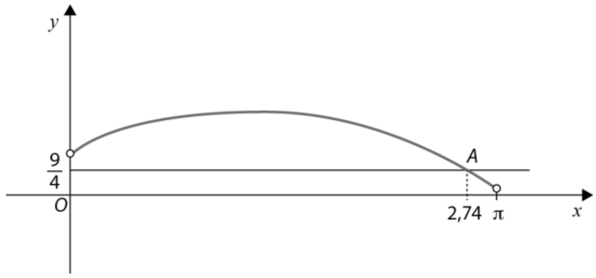
Então, a área do triângulo $[OAB]$ é dada por:

$\frac{\overline{AB} \times d(a)}{2} = 4 \times d(a)$

Daqui vem:

$4 \times d(a) = 9 \Leftrightarrow d(a) = \frac{9}{4}$, com $0 < a < \pi$

Na figura estão representados o gráfico de função definida por $y = d(x)$ e a reta de equação $y = \frac{9}{4}$, bem como o ponto de interseção destas duas linhas no intervalo $]0, \pi[$:



A abcissa do ponto A, para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é 9 é, aproximadamente, 2,74.

5. Opção (D)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + \cos(2018x) + f(x)}{-2x} = 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \times \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{\cos(2018x)}{x} + \frac{f(x)}{x} \right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} + \lim_{x \to -\infty} \frac{\cos(2018x)}{x} + \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -4$$

$$\Leftrightarrow \frac{0}{-\infty} + \lim_{x \to -\infty} \left(\cos(2018x) \times \frac{1}{x} \right) + \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -4$$

$\Leftrightarrow 0 + 0 + \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -4$, pois $-1 \leq \cos(2018x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -4$$

Logo, se o gráfico de f admitir assíntota não vertical, o seu declive é igual a -4.

6.

6.1. $\frac{P(t+1)}{P(t)} = \frac{1500e^{0,3(t+1)}}{1500e^{0,3t}} =$

$= \frac{e^{0,3t+0,3}}{e^{0,3t}} =$

$= e^{0,3t+0,3-0,3t} =$

$= e^{0,3}$

$\approx 1,35$

Observe-se que $P(t+1) = 1,35P(t)$, ou seja, $P(t+1) = P(t) + 0,35P(t)$, o que significa que a cada dia que passa o número de indivíduos desta colónia está a crescer à taxa de, aproximadamente, 35%.

6.2. $f(-1) = 1500e \Leftrightarrow P(-1+k) = 1500e$

$\Leftrightarrow 1500e^{0,3(-1+k)} = 1500e$

$\Leftrightarrow e^{0,3(-1+k)} = e$

$\Leftrightarrow 0,3(-1+k) = 1$

$\Leftrightarrow -1 + k = \frac{10}{3}$

$$\Leftrightarrow k = \frac{13}{3}$$

Caderno 2

7. Opção (D)

A proposição (I) é falsa:

Como $u_{2018} = \cos(2018\pi) = 1, u_{2019} = \cos(2019\pi) = -1$ e $u_{2020} = \cos(2020\pi) = 1$, a sucessão (u_n) não é monótona.

A proposição (II) é verdadeira:

- se $n < 2018$, $u_1 \leq u_n \leq u_{2017}$, isto é, $2 \leq u_n \leq 2018$;
- se $n \geq 2018$, $-1 \leq u_n \leq 1$.

Assim, $-1 \leq u_n \leq 2018, \forall n \in \mathbb{N}$.

8.

8.1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) > 0$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(6x)}{x^3+3x} - k^2\right) > -7 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(6x)}{x(x^2+3)} - k^2 > -7$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(6x)}{x} \times \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2+3} - k^2 > -7$$

$$\Leftrightarrow \lim_{6x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(6x)}{6x}\times 6\right) \times \frac{1}{0^2+3} - k^2 > -7$$

$$\Leftrightarrow 6 \times \underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{limite notável}} \times \frac{1}{3} - k^2 > -7$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 1 - k^2 > -7$$

$$\Leftrightarrow 9 - k^2 > 0$$

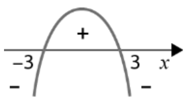
Assim, $9 - k^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < k < 3$.

Os valores reais de k pretendidos são, então, os valores do intervalo $]-3,3[$.

Cálculo auxiliar

$9 - k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 9$

$\Leftrightarrow k = 3 \vee k = -3$



8.2. Em $]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}+2x}{x}$

- Assíntotas verticais

Como f é contínua em $\mathbb{R}^+$, a reta de equação $x = 0$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x}+2x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{x} + 2\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x\times\sqrt{x}} + 2 = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt{x}} + 2 =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} + 2 = \frac{1}{0^+} + 2 =$$

$$= +\infty + 2 =$$

$$= +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f e é única.

- Assíntotas horizontais

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+2x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}+2 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}+2 = \frac{1}{+\infty}+2 =$$

$$= 0+2 = +2$$

A reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f.

9. Pretende-se formar um código pin com quatro algarismos diferentes, escolhidos entre os algarismos de 0 a 9, tal que o pin represente um número maior que 2000.

A Joana resolveu o problema determinando o número de códigos com quatro algarismos diferentes que é possível formar, e, a estes, subtraiu o número de códigos pin que iniciam com 0 e o número de códigos pin que iniciam com 1. Assim, ${}^{10}A_4$ é o número de maneiras distintas de escolher, ordenadamente, 4 algarismos diferentes dos 10 algarismos existentes, isto é, existem ${}^{10}A_4$ pin's com 4 algarismos diferentes. Por outro lado, $2\times {}^{9}A_3$ é o número de maneiras diferentes de contabilizar todos os pins que, nas condições referidas, iniciam pelo algarismo 0 ou 1. Assim, 2 é o número de opções que existem para colocar na posição do primeiro algarismo e, para cada uma destas opções, existem ${}^{9}A_3$ maneiras distintas de escolher ordenadamente 3 algarismos distintos, dos 9 algarismos restantes. Portanto, o número de pins nas condições referidas pode ser dado pela expressão ${}^{10}A_4 - 2\times {}^{9}A_3$.

O João pensou que, para o pin representar um número maior que 2000, pode iniciar com 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Assim, existem 8 hipóteses para o primeiro algarismo do pin. Para cada uma destas hipóteses, existem ${}^{9}C_3$ maneiras de escolher 3 algarismos distintos, dos 9 algarismos restantes, sendo que um já foi utilizado. Para cada uma destas maneiras e por cada hipótese para o primeiro algarismo, existem 3! maneiras de permutar os três últimos algarismos. Assim, $8\times {}^{9}C_3 \times 3!$ é o número de maneiras de determinar o número de pins superiores a 2000 com 4 algarismos distintos.

10.

10.1. $y = mx+b$, onde $m = g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$g'(x) = \left(\frac{x}{2}+(1-\cos x)^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}+2(1-\cos x)\times(1-\cos x)' =$$

$$= \frac{1}{2}+2(1-\cos x)\times \operatorname{sen} x$$

$$m = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}+2\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)\times \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}+2\times(1-0)\times 1 =$$

$= \frac{5}{2}$

Como $P\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + 1\right)$ pertence à reta, vem que:

$\frac{\pi}{4} + 1 = \frac{5}{2} \times \frac{\pi}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow b = 1 - \pi$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$ é $y = \frac{5}{2}x + 1 - \pi$.

10.2. $g''(x) = \left(\frac{1}{2} + 2\mathrm{sen}x(1 - \cos x)\right)' =$

$= 0 + 2[(\mathrm{sen}x)' \times (1 - \cos x) + \mathrm{sen}x(1 - \cos x)'] =$

$= 2(\cos x(1 - \cos x) + \mathrm{sen}x \times \mathrm{sen}x) =$

$= 2(\cos x - \cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x) =$

$= 2(\cos x - \cos(2x)) =$

Determinação dos zeros de g'':

$g''(x) = 0$

$2(\cos x - \cos(2x)) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi \ \vee \ x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -x = 2k\pi \ \vee \ 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi \ \vee \ x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Em $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, os zeros de g'' são 0 e $\frac{2\pi}{3}$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
Sinal de g''	n.d.	$+$	0	$+$	0	$-$	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de g	n.d.	$\cup$	$g(0)$	$\cup$	P.I. $g\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$\cap$	n.d.

$-\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e $g''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{2\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = \sqrt{2} > 0$

$\frac{\pi}{2} \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$ e $g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right) = 2(0 - (-1)) = 2 > 0$

$\frac{3\pi}{4} \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$ e $g''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = -\sqrt{2} < 0$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ e a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$; apresenta um ponto de inflexão de abcissa $\frac{2\pi}{3}$.

11. Opção (C)

Sabe-se que a função f é crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é decrescente em $[-1, 1]$.

Sabe-se também que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0]$ e a concavidade voltada para cima em $[0, +\infty[$.

Assim:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	0	$-$	0	$+$
Variação de f		M		m	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de f''	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$

Como se pretende os valores de x tais que $f'(x) \times f''(x) \leq 0$, vem que:

$(f'(x) \leq 0 \ \wedge \ f''(x) \geq 0) \vee (f'(x) \geq 0 \ \wedge \ f''(x) \leq 0) \Leftrightarrow x \in [0,1] \ \cup]-\infty, -1]$