

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere a expressão $A(\beta) = \frac{\cos^2 \beta}{1 - \sin \beta}$.

Para todo o β onde a igualdade tem significado, podemos concluir que $A(\beta)$ é igual a:

- (A) $\sin \beta$ (B) $1 + \sin \beta$ (C) $\cos \beta$ (D) $1 + \cos \beta$

2. Seja f a função, de domínio $]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ 2 \operatorname{sen} x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

O argumento da função está expresso em radianos.

2.1. Em qual das opções se encontra o conjunto dos zeros da função f no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$?

- (A) $\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, 0\}$
(B) $\{0, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$
(C) $\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, 0, \pi\}$
(D) $\{0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$

2.2. Considere a representação gráfica da função f no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$.

Sabe-se que:

- no primeiro quadrante o gráfico da função f interseca a bissetriz dos quadrantes ímpares num único ponto – seja A esse ponto;
- no segundo quadrante o gráfico da função f interseca a bissetriz dos quadrantes pares num único ponto – seja B esse ponto;

Qual é a distância entre os pontos A e B ?

Resolva esta questão recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

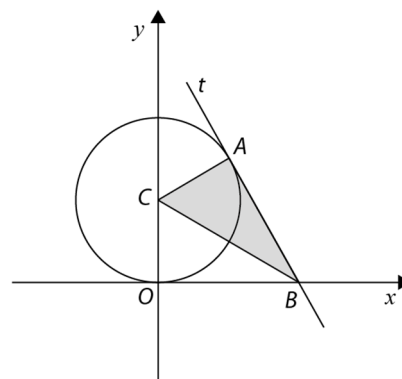
Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- indicar as coordenadas dos pontos A e B , com aproximação às centésimas;
- apresentar o valor pedido, com aproximação às décimas.

3. Na figura estão representados, num referencial ortonormado Oxy , uma circunferência, a reta t tangente à circunferência e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- a circunferência tem centro C e pode ser definida pela condição $x^2 + y^2 - 6y = 0$;
- o ponto A pertence à circunferência, encontra-se no 1.º quadrante e tem ordenada 4;
- a reta t é tangente à circunferência no ponto A ;
- o ponto B é o ponto de interseção da reta t com o eixo das abscissas.



- 3.1. Determine a inclinação da reta t .

Apresente o resultado em graus, com aproximação às décimas.

- 3.2. Determine o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.

Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{N}$.

4. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto C não está representado na figura).

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(11, -1, 2)$;
- o ponto B tem coordenadas $(8, 5, 0)$;
- o ponto D tem coordenadas $(5, -3, 5)$;
- o ponto E tem coordenadas $(13, 2, 8)$.

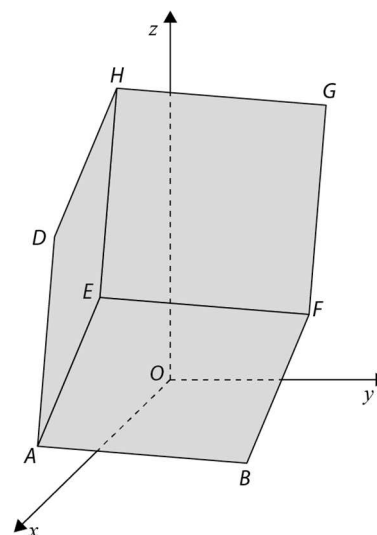
- 4.1. Defina o plano ABE por uma equação cartesiana.

- 4.2. Defina a reta AC por uma equação vetorial.

- 4.3. Qual das condições seguintes define a superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo?

- (A) $\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{147}{4}$
 (B) $\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{147}}{2}$
 (C) $\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{147}{4}$
 (D) $\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{147}}{2}$

- 4.4. Seja α o plano que contém a origem do referencial e é perpendicular à reta OE e seja P o ponto de interseção do plano α com a reta BF . Determine a distância do ponto P ao plano xOy . Apresente o resultado na forma de dízima.



5. Considere, num referencial o.n. Oxy , a reta r de equação $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Seja α a inclinação da reta r , em radianos.

Qual é o valor de $\operatorname{tg}(2022\pi + \alpha) + \cos^2(2021\pi + \alpha)$?

- (A) $\frac{37}{30}$ (B) $\frac{13}{9}$ (C) $-\frac{17}{30}$ (D) $-\frac{7}{9}$

6. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 2022 \\ -1 & \text{se } n > 2022 \end{cases} \quad \text{e} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) Ambas as sucessões são limitadas.
(B) Ambas as sucessões são não limitadas.
(C) Apenas a sucessão (u_n) é limitada.
(D) Apenas a sucessão (v_n) é limitada.

7. Considere duas progressões, uma aritmética e uma geométrica, das quais se sabe que:

- o primeiro termo da progressão aritmética é igual ao primeiro termo da progressão geométrica;
- a razão da progressão geométrica é 2;
- a soma dos quatro primeiros termos da progressão aritmética é igual a 75;
- a soma dos quatro primeiros termos da progressão geométrica é também igual a 75.

Determine a razão da progressão aritmética.

- FIM -

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	4.3.	4.4.	5.	6.	7.	
10	10	25	20	20	20	20	10	25	10	10	20	200

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

$$\frac{\cos^2 \beta}{1 - \sin \beta} = \frac{\cos^2 \beta (1 + \sin \beta)}{(1 - \sin \beta)(1 + \sin \beta)} = \frac{\cos^2 \beta (1 + \sin \beta)}{1 - \sin^2 \beta} = \frac{\cos^2 \beta (1 + \sin \beta)}{\cos^2 \beta} = 1 + \sin \beta$$

2.

2.1. Opção (B)

Em $]-\frac{\pi}{2}, 0]$: $\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x = 0$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \quad \vee \quad \operatorname{sen} x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Logo, neste intervalo, f tem apenas um zero: 0

Em $]0, 2\pi]$: $2 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 1$, tem-se que $x = \frac{11\pi}{6}$ e $x = \frac{7\pi}{6}$.

Logo, neste intervalo, os zeros de f são $\frac{11\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$.

Assim, o conjunto dos zeros da função f no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ é $\{0, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$.

2.2. Colocando na calculadora:

$$y_1 = \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$$

$$y_2 = 2 \operatorname{sen} x + 1, \quad x \in]0, 2\pi]$$

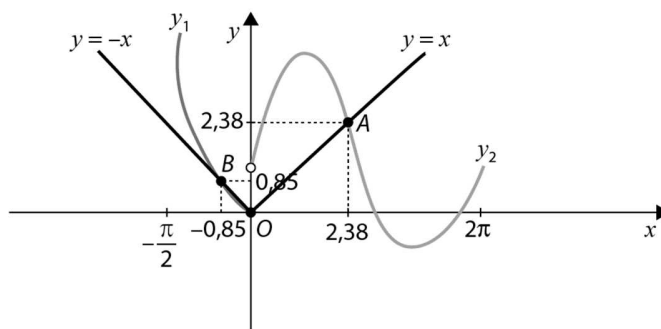
$$y_3 = x$$

$$y_4 = -x$$

$$A(2,38; 2,38)$$

$$B(-0,85; 0,85)$$

$$d(A, B) = \sqrt{(2,38 - (-0,85))^2 + (2,38 - 0,85)^2} = \sqrt{12,7738} \approx 3,6$$



3.

3.1. $x^2 + y^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 9$

O centro da circunferência é o ponto C e tem coordenadas $(0, 3)$.

Como o ponto A pertence à circunferência e tem ordenada 4, então $A(x, 4)$.

$$x^2 + (4 - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}$$



E, como $x > 0$, vem que $A(\sqrt{8}, 4)$, ou seja, $A(2\sqrt{2}, 4)$.

Assim, o declive da reta AC é $m_{AC} = \frac{4-3}{2\sqrt{2}-0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e o declive da reta t , perpendicular à reta AC ,

$$\text{é } m_t = -\frac{1}{m_{AC}} = -2\sqrt{2}.$$

Seja α a inclinação da reta t : $m_t = \text{tg } \alpha$, ou seja, $\text{tg } \alpha = -2\sqrt{2}$ e $\alpha = \text{tg}^{-1}(-2\sqrt{2})$, logo $\alpha \approx 109,5^\circ$.

3.2. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em A .

$$\text{Assim, } A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{2}.$$

Determinação das coordenadas do ponto B :

$$t: y = -2\sqrt{2}x + b$$

Como $A(2\sqrt{2}, 4) \in t$:

$$4 = -2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + b \Leftrightarrow 4 = -8 + b \\ \Leftrightarrow b = 12$$

$$t: y = -2\sqrt{2}x + 12$$

Como o ponto B pertence à reta t e tem ordenada 0:

$$0 = -2\sqrt{2}x + 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{6\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$$

$$B(3\sqrt{2}, 0)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{2 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = 3 \text{ (raio da circunferência)}$$

$$\text{Assim, } A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{3 \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

4.

$$4.1. \overline{AB} = B - A = (8, 5, 0) - (11, -1, 2) = (-3, 6, -2)$$

$$\overline{AE} = E - A = (13, 2, 8) - (11, -1, 2) = (2, 3, 6)$$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor, não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores \overline{AB} e \overline{AE} :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{AE} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, 6, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 3, 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 6b - 2c = 0 \\ 2a + 3b + 6c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6b-2c}{3} \\ 2\left(\frac{6b-2c}{3}\right) + 3b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6b-2c}{3} \\ 12b - 4c + 9b + 18c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6b-2c}{3} \\ 21b + 14c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{21}{14}b \\ a = \frac{6b-2(-\frac{21}{14}b)}{3} \\ c = -\frac{3}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6b+3b}{3} \\ c = -\frac{3}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ c = -\frac{3}{2}b \end{cases}$$



Seja, por exemplo, $b = 2$, $\vec{n}(6, 2, -3)$.

Assim, uma equação cartesiana do plano ABE é da forma $6x + 2y - 3z + d = 0$ e, como $B(8, 5, 0)$ pertence ao plano, vem que $6 \times 8 + 2 \times 5 - 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -58$.

Equação cartesiana do plano ABE : $6x + 2y - 3z - 58 = 0$

4.2. $C = D + \overrightarrow{AB} = (5, -3, 5) + (-3, 6, -2) = (2, 3, 3)$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 3, 3) - (11, -1, 2) = (-9, 4, 1)$$

Uma equação vetorial da reta AC pode, então, ser $(x, y, z) = (2, 3, 3) + k(-9, 4, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

4.3. Opção (C)

Pretende-se uma condição que defina a superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo, logo o seu centro é equidistante de quaisquer destes vértices, em particular, dos vértices C e E .

O centro é o ponto médio de $[CE]$:

$$C = (2, 3, 3) \text{ e } E = (13, 2, 8)$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{2+13}{2}, \frac{3+2}{2}, \frac{3+8}{2} \right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, \frac{11}{2} \right)$$

Como $[CE]$ é um diâmetro da superfície esférica:

$$\text{raio} = \frac{d(C,E)}{2} = \frac{\sqrt{(13-2)^2 + (2-3)^2 + (8-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{121+1+25}}{2} = \frac{\sqrt{147}}{2}$$

Portanto, a condição pedida é $\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{147}}{2}\right)^2$, ou seja,

$$\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{147}{4}.$$

4.4. $\overrightarrow{OE} = E - O = (13, 2, 8) - (0, 0, 0) = (13, 2, 8)$

O plano α é perpendicular à reta OE , logo é definido por uma equação do tipo

$$13x + 2y + 8z + d = 0. \text{ Como a origem } O \text{ pertence ao plano } \alpha, \text{ então } d = 0.$$

Logo, o plano α pode ser definido por $13x + 2y + 8z = 0$.

$$\overrightarrow{AE} = E - A = (2, 3, 6)$$

$$\text{Equação vetorial da reta } BF: (x, y, z) = (8, 5, 0) + k(2, 3, 6), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta BE é do tipo $(8 + 2k, 5 + 3k, 6k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano α , obtemos:

$$13(8 + 2k) + 2(5 + 3k) + 8(6k) = 0 \Leftrightarrow 104 + 26k + 10 + 6k + 48k = 0$$

$$\Leftrightarrow 80k = -114$$



$$\Leftrightarrow k = -\frac{114}{80}$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{57}{40}$$

Para $k = -\frac{57}{40}$, obtemos o ponto P de coordenadas $\left(8 + 2 \times \left(-\frac{57}{40}\right), 5 + 3 \times \left(-\frac{57}{40}\right), 6 \times \left(-\frac{57}{40}\right)\right) = \left(\frac{103}{20}, \frac{29}{40}, -\frac{171}{40}\right)$.

Logo, a distância do ponto P ao plano xOy é o valor absoluto da cota de P , isto é, $\frac{171}{40}$, ou seja, 8,55.

5. Opção (A)

A equação reduzida da reta r é $y = \frac{1}{3}x + 1$, e α é a sua inclinação, logo sabemos que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

Como $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, vem que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow \frac{10}{9} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow \cos^2 \alpha &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2022\pi + \alpha) + \cos^2(2021\pi + \alpha) &= \operatorname{tg}(\alpha) + \cos^2(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) + (-\cos \alpha)^2 = \\ &= \operatorname{tg} \alpha + \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{9}{10} = \\ &= \frac{37}{30} \end{aligned}$$

6. Opção (A)

A sucessão (u_n) é limitada, pois $-1 \leq u_n \leq 2022, \forall n \in \mathbb{N}$.

Observe-se que:

- se $n \leq 2022$, então $1 \leq u_n \leq 2022$;
- se $n > 2022$, então $u_n = -1$.

A sucessão (v_n) é limitada, pois $-1 \leq v_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Observe-se que:

- se n é par, então $v_n = \frac{1}{n}$ e $0 < \frac{1}{n} \leq 1$;
- se n é ímpar, então $v_n = -\frac{1}{n}$ e $-1 \leq -\frac{1}{n} < 0$.

7. Seja (u_n) a progressão geométrica de razão 2 e (v_n) a progressão aritmética de razão r .

Sabe-se que $\underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}_{\frac{1-2^4}{1-2} \times u_1} = 75$ e que $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 75$.

Assim:

$$\frac{1-2^4}{1-2} \times u_1 = 75 \Leftrightarrow \frac{-15}{-1} \times u_1 = 75 \Leftrightarrow u_1 = 5$$

E, como $u_1 = v_1$, vem que $\underbrace{5 + v_2 + v_3 + v_4}_{\frac{5+v_4}{2} \times 4} = 75$.

Assim:

$$\frac{5 + v_4}{2} \times 4 = 75 \Leftrightarrow 5 + v_4 = \frac{75}{2} \Leftrightarrow v_4 = \frac{75}{2} - 5 \Leftrightarrow v_4 = \frac{65}{2}$$

$$v_4 = v_1 + 3r \Leftrightarrow \frac{65}{2} = 5 + 3r \Leftrightarrow r = \frac{55}{6}$$

A razão da progressão aritmética é $\frac{55}{6}$.