Nome: ____

Ano / Turma: __________ **N.º:** _____ **Data:** ____ - ____ - ____

1. Em relação a um referencial o.n. *Oxyz*, considera a superfície esférica definida pela equação $x^2+y^2+z^2+2x-4y-13=0$ e o ponto $A(0,3,-4)$.

Seja C o centro dessa superfície esférica.

1.1 As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ são:

(A) $(1\ ,\ 1\ ,-4)$ **(B)** $(-1\ ,-1\ ,\ 4)$ **(C)** $(-1\ ,\ 2\ ,\ 0)$ **(D)** $(-1\ ,\ 5\ ,-4)$

1.2 O(s) valor(es) de k para o(os) qual(ais) o ponto $P\left(2k-1\ ,\ 2-\frac{k}{2}\ ,\ k^2-5\right)$, $k \in \mathbb{R}$, pertence ao plano que passa por A e é paralelo ao plano coordenado xOz é(são):

(A) $k=-2$ **(B)** $k=1 \vee k=-1$ **(C)** $k=\frac{1}{2}$ **(D)** $k=2$

2. Em relação a um referencial o.n. *Oxy*, considera os pontos $A(2,4)$ e $B(2m,-3+m)$, com $m \in \mathbb{R}$. O valor de m para o qual o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem a direção da bissetriz dos quadrantes ímpares é:

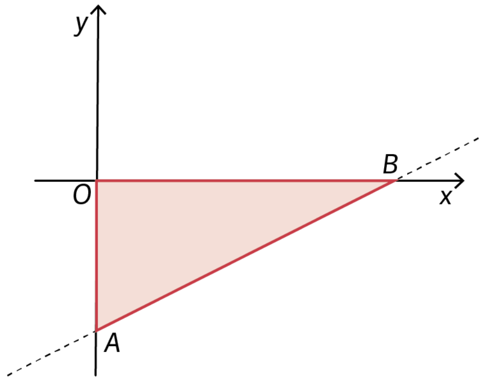
(A) 1 **(B)** -5 **(C)** -2 **(D)** -3

3. Num referencial o.n. *Oxyz*, considera uma esfera centrada em $C(2, 2, 6)$ e de raio 3. A área da secção produzida na esfera pelo plano $z=4$ é :

(A) 16π **(B)** 4π **(C)** 9π **(D)** 5π

4. No referencial o.n. Oxy da figura está representada a reta AB definida pela equação $2y - x + 4 = 0$.

Os pontos A e B pertencem respetivamente aos eixos Oy e Ox.



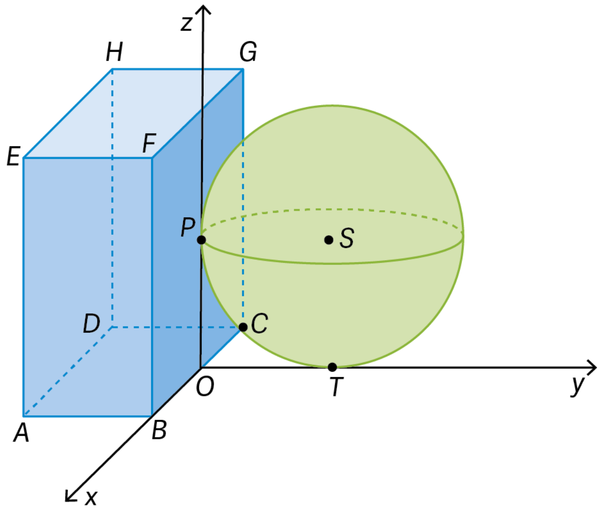
4.1 Escreve uma equação reduzida da reta paralela a AB e que passa pelo ponto C de coordenadas $(-3, 1)$.

4.2 Define o triângulo $[OAB]$ através de uma condição.

4.3 Escreve uma equação da circunferência que admite $[AB]$ como diâmetro.

5. Na figura está representado um prisma quadrangular regular e uma esfera tangente à base $[BCGF]$ do prisma no ponto P e ao plano xOy no ponto T. Sabe-se que:

- a esfera tem centro $S(0, 4, 4)$;
- a origem do referencial é ponto médio da aresta $[BC]$;
- a face $[BCGF]$ está contida no plano coordenado xOz;
- o ponto E tem coordenadas $(4, -3, 8)$



5.1 Indica as coordenadas do ponto médio de $[BH]$.

5.2 Representa através de uma condição:

a) a reta HG;

b) a aresta $[AE]$;

c) a esfera.

5.3 Determina uma equação, na forma $ax + by + cz + d = 0$, do plano mediador do segmento de reta $[ES]$.

5.4 Calcula o volume do prisma.

5.5 Escreve uma equação vetorial da reta ES.

FIM

Questões	1.1.	1.2.	2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.1.	5.2. a)	5.2. b)	5.2. c)	5.3.	5.4.	5.5.	Total
Cotação (pontos)	10	10	10	10	20	15	20	20	10	10	10	20	20	15	**200**

1.1. Determinação das coordenadas do ponto *C*, centro da superfície esférica:

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y-13=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x+1-1+y^2-4y+2^2-2^2+z^2-13=0$$

$$\Leftrightarrow\; (x+1)^2+(y-2)^2+z^2-1-4-13=0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)^2+(y-2)^2+z^2=18$$

$C(-1\,,\,2\,,\,0)$

Determinação das coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$:

Como $A(0\,,\,3\,,\,-4)$, então $\overrightarrow{AC}=C-A=(-1\,,\,2\,,\,0)-(0\,,\,3\,,\,-4)=(-1\,,\,-1\,,\,4)$

Opção: **B**

1.2. O plano que passa por *A* e é paralelo ao plano coordenado *xOz* tem de equação: $y=3$

$$2-\frac{k}{2}=3 \;\Leftrightarrow\; 4-k=6 \;\Leftrightarrow\; -k=2 \;\Leftrightarrow\; k=-2$$

Opção: **A**

2. $A(2,4)$ e $B(2m,-3+m)$, $m\in\mathbb{R}$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(2m,-3+m)-(2,4)=(2m-2,-3+m-4)=(2m-2,\,m-7)$$

A direção da bissetriz dos quadrantes ímpares é definida, por exemplo, pelo vetor (1,1).

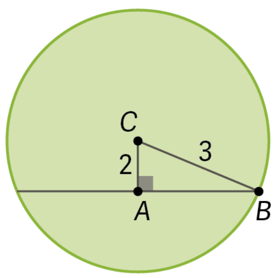
Para $\overrightarrow{AB}$ e (1,1) serem colineares, deve verificar-se que:

$$2m-2=m-7 \;\Leftrightarrow\; m=-5$$

Opção: **B**

3. Sendo *A* a projeção ortogonal de *C* sobre o plano de equação z = 4 e *B* um ponto desse plano que pertence à superfície esférica de centro *C* e raio 3.

$\overline{BC}=3;\ \overline{AC}=6-4=2$



$\overline{AB}$ representa a medida do raio do círculo que resulta da interseção do plano com a esfera.

$$\overline{AB}^2+2^2=3^2 \Leftrightarrow \overline{AB}=\sqrt{5}$$

$$\text{Área} = \pi\times\left(\sqrt{5}\right)^2=5\pi$$

Opção: **D**

4.1. Equação reduzida da reta *AB*:

$$2y-x+4=0 \Leftrightarrow 2y=x-4 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-2$$

Reta paralela a *AB*: $y=\frac{1}{2}x+b$

Como a reta passa por $C(-3,\,1)$, então: $1=-\frac{3}{2}+b \Leftrightarrow \frac{5}{2}=b$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

4.2. $y \geq \frac{1}{2}x-2 \quad \wedge \quad y \leq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0$

4.3. Determinação das coordenadas dos pontos *A* e *B*:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-2 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=0 \end{cases} \qquad A(0,\,-2)$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \qquad B(4,\,0)$$

Seja *D* o centro da circunferência e *r* o seu raio.

$D\left(\frac{0+4}{2},\frac{-2+0}{2}\right)$, ou seja, $D(2,\,-1)$

$$r=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\sqrt{4^2+(-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=5$$

5.1. Atendendo aos dados, deduz-se que $B(4,0,0)$ e $H(-4,-3,\,8)$.

Seja *M* o ponto médio de [*BH*].

$M\left(\frac{4-4}{2},\frac{0-3}{2},\frac{0+8}{2}\right)$, ou seja, $M\left(0\,,\,-\frac{3}{2},\,4\right)$.

5.2. **a)** Reta *HG*: $z=8 \;\wedge\; x=-4$

b) Aresta [*AE*]: $x=4 \;\wedge\; y=-3 \;\wedge\; 0 \leq z \leq 8$

c) Esfera: $x^2+(y-4)^2+(z-4)^2\leq 16$

5.3. Seja $P(x,y,z)$.

$E(4,-3,8)$ e $S(0,4,4)$

$\overline{EP}=\overline{SP} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2+(z-8)^2}=\sqrt{x^2+(y-4)^2+(z-4)^2}$

$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2+6y+9+z^2-16z+64=x^2+y^2-8y+16+z^2-8z+16$

$\Leftrightarrow -8x+6y+8y-16z+8z=+16-9-64$

$\Leftrightarrow -8x+14y-8z+57=0$

5.4. $\overline{AD}=\overline{AE}=8$; $\overline{AB}=3$

$V_{\text{prisma}}=\overline{AB}\times\overline{AD}\times\overline{AE}=3\times8\times8=192$

5.5. Seja $P(x,y,z)$

$P=E+k\,\overrightarrow{ES}$, $k\in\mathbb{R}$;

$\overrightarrow{ES}=S-E=(0,\,4,\,4)-(4,\,-3,\,8)=(-4\,,7,\,-4)$

$(x,y,z)=(4,-3,\,8)+k(-4,7,\,-4)$, $k\in\mathbb{R}$