

Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

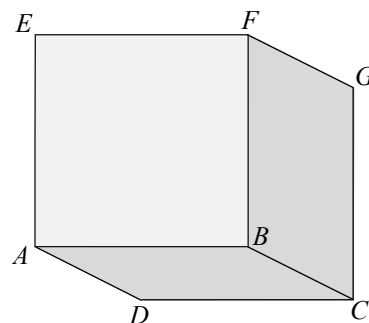
1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α e β definidos pelas equações $x = -2$ e $y = 1$.

Qual das seguintes superfícies esféricas, definidas pelas respetivas equações, é tangente aos planos α e β ?

- (A) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ (B) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 1$
 (C) $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 1$ (D) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2. Considere, fixado um referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$, ilustrado na figura ao lado, tal que:

- o ponto A tem coordenadas $(2, -1, 0)$;
- o vetor \overline{BG} tem coordenadas $(-1, 2, 3)$.



Em qual das opções seguintes estão representadas as coordenadas do ponto H (não visível na figura)?

- (A) $(1, 1, 3)$ (B) $(3, -3, -3)$ (C) $(-3, 3, 3)$ (D) $(0, 0, 3)$

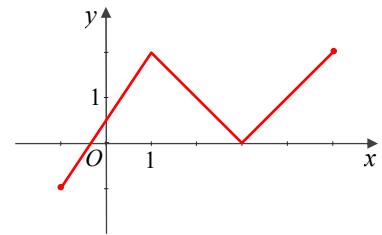
3. Considere a reta r definida pela equação $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Qual das opções seguintes define a equação vetorial de uma reta estritamente paralela à reta r ?

- (A) $(x, y) = (0, 3) + k(-1, 2), k \in \mathbb{R}$ (B) $(x, y) = (0, 0) + k(6, -3), k \in \mathbb{R}$
 (C) $(x, y) = (0, 3) + k(2, -1), k \in \mathbb{R}$ (D) $(x, y) = (2, 2) + k\left(1, -\frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{R}$

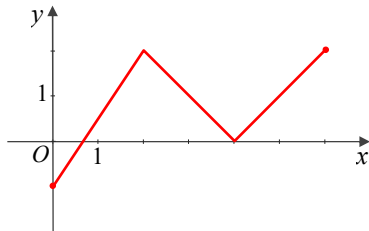
4. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura ao lado.

Seja h a função definida por $h(x) = f(x+1) - 1$.

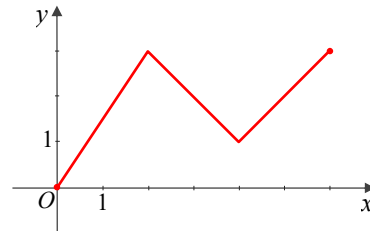
Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função h ?



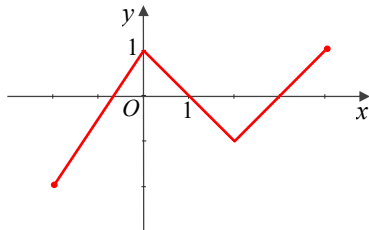
(A)



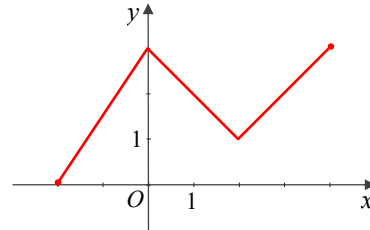
(B)



(C)



(D)



5. Para cada valor real de k , a expressão $P(x) = x^4 - kx^2 + 2x - 3$ é um polinómio do quarto grau. Para que o polinómio seja divisível por $2x - 6$, qual deverá ser o valor de k ?

(A) -3

(B) 28

(C) $-\frac{2}{3}$

(D) $\frac{28}{3}$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

6. Considere o polinómio $P(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 8x + 4$.

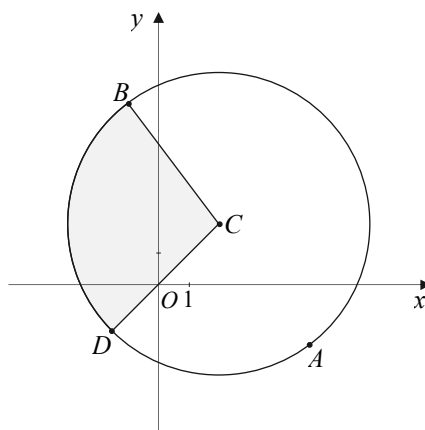
6.1. Mostre que 1 é uma raiz dupla do polinómio.

6.2. Determine a e b , com $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que $P(x) = -(x-1)^2(x-a)(x-b)$.

6.3. Resolva a inequação $P(x) \leq 0$.

Apresente o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos.

7. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro $C(2, 2)$ e raio 5.



Sabe-se que:

- os pontos A , B e D pertencem à circunferência;
- os pontos A e B têm coordenadas $(5, -2)$ e $(-1, 6)$, respetivamente;
- o ponto D pertence ao terceiro quadrante e é um dos pontos de interseção da reta OC com a circunferência.

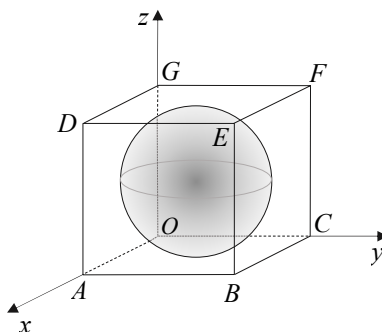
7.1. Mostre que:

- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- a reta CD é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

7.2. Determine as coordenadas do ponto D .

7.3. Defina por uma condição a parte a sombreado da figura, incluindo a fronteira.

8. Considere, num referencial o.n. xOy , uma esfera S tangente às faces de um cubo $[ABCDEFGG]$.

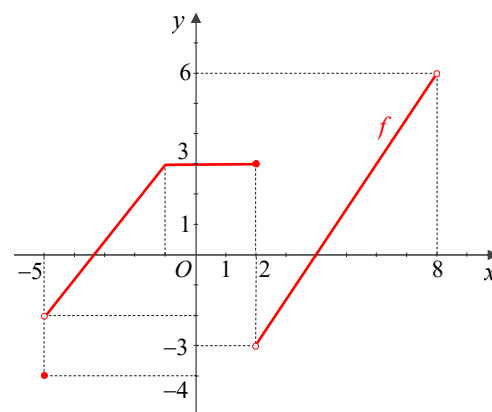


Sabe-se que:

- as arestas do cubo $[OA]$, $[OC]$ e $[OG]$ estão contidas nos semieixos positivos Ox , Oy e Oz , respetivamente;
- o ponto E tem coordenadas $(4, 4, 4)$;
- a esfera S pode ser definida pela inequação $x^2 + y^2 + z^2 - 4(x + y + z - 2) \leq 0$.

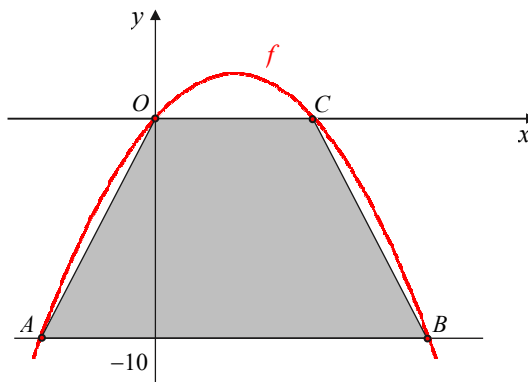
- 8.1. Defina, através de uma condição, a aresta $[EF]$.
- 8.2. Defina por uma condição o plano mediador de $[EG]$.
- 8.3. Mostre que os vetores \overrightarrow{AF} e $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ são colineares.
- 8.4. Mostre que a esfera S tem centro no ponto de coordenadas $(2, 2, 2)$ e raio igual a 2.
- 8.5. Identifique o lugar geométrico dos pontos definidos pela interseção do plano de equação $z = 1$ com a esfera S .

9. Considere o gráfico cartesiano da função f , de domínio $[-5, 8[$, representado num referencial cartesiano xOy .



- 9.1. Indique:
- o contradomínio de f ;
 - o intervalo de maior amplitude onde f é crescente em sentido lato;
 - o conjunto dos minorantes de f ;
 - os máximos relativos de f e os respetivos maximizantes.
- 9.2. Determine os zeros de f .
- 9.3. Determine o domínio da função h definida por $h(x) = 2 - f(2x)$.

10. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , o gráfico cartesiano da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = -\frac{2}{9}(x-3)^2 + 2$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B são pontos de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y = -10$;
- os pontos O e C são pontos da interseção do gráfico de f com o eixo Ox .

- 10.1. Determine o contradomínio de f .
- 10.2. Mostre que 0 e 6 são zeros de f .
- 10.3. Calcule a área do trapézio $[ABCO]$.
- 10.4. Resolva a inequação $f(x) < g(x)$, sendo $g(x) = \frac{10}{9}x$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
6	6	6	6	6	30

Grupo II

6.1.	6.2.	6.3.	7.1.a)	7.1.b)	7.2.	7.3.	8.1.	8.2.	8.3.	8.4.	8.5.
8	8	10	6	6	8	10	6	10	8	8	10

9.1.a)	9.1.b)	9.1.c)	9.1.d)	9.2.	9.3.	10.1.	10.2.	10.3.	10.4.	Total
6	6	6	8	8	6	6	6	10	10	170

Proposta de resolução

Grupo I

1. Centro da superfície esférica: $C(-1, 0, -2)$

Raio da superfície esférica: $r = 1$

Os planos tangentes à superfície esférica e paralelos aos planos coordenados são os planos de equações:

$$x = -1 - 1 = -2 \quad \text{e} \quad x = -1 + 1 = 0$$

$$y = 0 - 1 = -1 \quad \text{e} \quad y = 0 + 1 = 1$$

$$z = -2 - 1 = -3 \quad \text{e} \quad z = -2 + 1 = -1$$

Resposta: (C)

2. $H = A + \overrightarrow{BG} = (2, -1, 0) + (-1, 2, 3) = (1, 1, 3)$

Resposta: (A)

3. Reta de equação: $(x, y) = (0, 0) + k(6, -3), k \in \mathbb{R}$

Vetor diretor: $(6, -3)$

$$\text{Declive: } -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \text{ (igual ao da reta } r \text{)}$$

As retas têm o mesmo declive, logo são paralelas.

Como o ponto $(0, 0)$ não pertence à reta r então as retas são estritamente paralelas.

Resposta: (B)

4. O gráfico de h é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(-1, 0)$ seguida da translação de vetor $\vec{v}(0, -1)$.

Resposta: (C)

5. Aplicando o teorema do resto:

$$P(3) = 0 \Leftrightarrow 3^4 - k \times 3^2 + 2 \times 3 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 81 - 9k + 6 - 3 = 0 \Leftrightarrow -9k = -84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{84}{9} \Leftrightarrow k = \frac{28}{3}$$

Resposta: (D)

GRUPO II

- 6.1. 1 é uma raiz dupla do polinómio (ou raiz de multiplicidade 2) se e só se 2 é o maior número natural para o qual existe um polinómio $Q(x)$ tal que $P(x) = (x-1)^2 \times Q(x)$.

Por aplicação da Regra de Ruffini:

	-1	2	3	-8	4	
1		-1	1	4	-4	
	-1	1	4	-4	0	
1		-1	0	4		
	-1	0	4	0		

Assim, $P(x) = (x-1)^2 \times (-x^2 + 4) = -(x-1)^2 \times (x^2 - 4) = -(x-1)^2 \times (x-2) \times (x+2)$ e, conseqüentemente, 1 é uma raiz dupla de $P(x)$.

6.2. Recorrendo à alínea anterior tem-se que:

$$P(x) = -(x-1)^2(x-2)(x+2), \text{ ou seja, } a=2 \text{ e } b=-2 \text{ ou } a=-2 \text{ e } b=2.$$

6.3.

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$-(x-1)^2$	-	-	-	0	-	-	-
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+	0	-

Resposta: $x \in]-\infty, -2] \cup \{1\} \cup [2, +\infty[$

7.1. a) $M_{[AB]} \left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{-2+6}{2} \right)$ ou seja $M_{[AB]}(2, 2)$

Sabe-se que A e B pertencem à circunferência e $C(2, 2)$ é o ponto médio de $[AB]$. Assim $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

b) $m_{CD} = \frac{2-0}{2-0} = 1$ e $(0, 0)$ pertence à reta CD .

Então, a reta CD tem equação: $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

7.2. O ponto D é o ponto de interseção da reta CD com a circunferência de centro $(2, 2)$ e raio 5 .

$$\begin{aligned} y &= x \wedge (x-2)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ \Leftrightarrow y &= x \wedge (x-2)^2 + (x-2)^2 = 25 \\ \Leftrightarrow y &= x \wedge (x-2)^2 = \frac{25}{2} \\ \Leftrightarrow y &= x \wedge x-2 = \pm \sqrt{\frac{25}{2}} \\ \Leftrightarrow y &= x \wedge x = 2 \pm \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow y &= x \wedge \left(x = 2 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \vee x = 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

Como D pertence ao terceiro quadrante:

$$D \left(2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \right)$$

7.3. Reta BC : $m = \frac{6-2}{-1-2} = -\frac{4}{3}$

$$y = -\frac{4}{3}x + b$$

$$2 = -\frac{4}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 2 + \frac{8}{3} \Leftrightarrow b = \frac{14}{3}$$

Equação da reta BC : $y = -\frac{4}{3}x + \frac{14}{3}$

Condição: $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 25 \wedge y \geq x \wedge y \leq -\frac{4}{3}x + \frac{14}{3}$

8.1. $y = 4 \wedge z = 4 \wedge 0 \leq x \leq 4$

8.2. Seja $P(x, y, z)$ um ponto pertencente ao plano mediador de $[EG]$.

$$\overline{PE} = \overline{PG} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-4)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow -8x - 8y + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$$

Por exemplo, $x + y - 4 = 0$.

8.3. $\overline{AF} = F - A = (0, 4, 4) - (4, 0, 0) = (-4, 4, 4)$

Como $(-4, 4, 4) = -8\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, ou seja,

se $\overline{AF} = -8\vec{u}$, então \overline{AF} e \vec{u} são colineares.

8.4. $x^2 + y^2 + z^2 - 4(x + y + z - 2) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 8 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-2)^2 - 4 + (z-2)^2 - 4 + 8 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \leq 4$$

Assim, o centro tem coordenadas $(2, 2, 2)$ e o raio é 2.

8.5. A interseção da esfera S com o plano $z = 1$, pode ser definida por:

$$z = 1 \wedge (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \wedge (x-2)^2 + (y-2)^2 + (1-2)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \wedge (x-2)^2 + (y-2)^2 + 1 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \wedge (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 3$$

Trata-se do círculo de centro $(2, 2, 1)$ e raio $\sqrt{3}$ contido no plano de equação $z = 1$.

9.1.

a) $D_f = \{-4\} \cup]-3, 6[$

b) $[-5, 2]$

c) $] -\infty, -4]$

d) Máximos relativos: 3

Maximizantes: todos os pontos pertencentes a $[-1, 2]$

9.2. Por observação do gráfico cartesiano, um dos zeros é 4.

Para determinar o outro zero recorre-se à equação reduzida da reta que passa nos pontos $(-5, -2)$ e $(-1, 3)$.

$$m = \frac{3 - (-2)}{-1 - (-5)} = \frac{5}{4}$$

$$3 = \frac{5}{4} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 3 + \frac{5}{4} \Leftrightarrow b = \frac{17}{4}$$

A reta de equação $y = \frac{5}{4}x + \frac{17}{4}$ interseca o eixo Ox no ponto de abcissa dada por

$$\frac{5}{4}x + \frac{17}{4} = 0 \Leftrightarrow 5x + 17 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{17}{5}$$

Assim, os zeros da função são $-\frac{17}{5}$ e 4.

9.3. $D_h = \left[-5 \times \frac{1}{2}, 8 \times \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{5}{2}, 4\right]$

10.1. $D_f =]-\infty, 2]$

10.2. $f(0) = -\frac{2}{9}(0-3)^2 + 2 = -\frac{2}{9} \times 9 + 2 = -2 + 2 = 0$

$$f(6) = -\frac{2}{9}(6-3)^2 + 2 = -\frac{2}{9} \times 9 + 2 = -2 + 2 = 0$$

Assim, 0 e 6 são zeros de f .

10.3. Altura do trapézio: 10 ; Base menor do trapézio: $\overline{OC} = 6$; Base maior do trapézio: \overline{AB}

Para determinar A e B resolve-se a condição:

$$-\frac{2}{9}(x-3)^2 + 2 = -10 \Leftrightarrow -\frac{2}{9}(x-3)^2 = -12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3)^2 = 108 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 54 \Leftrightarrow x-3 = \pm\sqrt{54} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-3 = \pm 3\sqrt{6} \Leftrightarrow x = 3 + 3\sqrt{6} \vee x = 3 - 3\sqrt{6}$$

Assim, $A(3 - 3\sqrt{6}, -10)$ e $B(3 + 3\sqrt{6}, -10)$.

$$\overline{AB} = |3 + 3\sqrt{6} - (3 - 3\sqrt{6})| = |6\sqrt{6}| = 6\sqrt{6}$$

$$A_{\text{Trapézio}} = \frac{6\sqrt{6} + 6}{2} \times 10 = 30\sqrt{6} + 30$$

10.4. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow -\frac{2}{9}(x-3)^2 + 2 < \frac{10}{9}x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2(x-3)^2 + 18 - 10x < 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x^2 - 6x + 9) + 18 - 10x < 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 2x < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x > 0$$

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Então, $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$.

Assim, $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.