Teste de Matemática A

2020 / 2021

Teste N.º 2

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base;
g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\, \cos b + \operatorname{sen} b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \operatorname{sen} a\, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u' \; (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \; (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \; (p \in \mathbb{R})$

1. O departamento de Matemática de uma determinada escola tem professores de vários pontos do país.

1.1. Sabe-se que m professores são da zona norte, n professores são da zona centro e oito professores são da zona sul do país.

Considerando que se pretende colocar lado a lado todos os professores deste departamento, de modo que todos professores da zona norte fiquem juntos, bem como todos professores da zona centro, quantas formas existem de o fazer?

(A) $m! \times n! \times 8!$ **(B)** $m! \times n! \times 10!$ **(C)** $m! \times n! \times 8! \times 3!$ **(D)** $m! \times n! \times 9!$

1.2. Considere agora que o departamento de Matemática tem, no total, 19 professores, dos quais dois são irmãos, a Maria e o João. Pretende-se formar uma comissão de quatro professores para organizar as Olimpíadas de Matemática na escola. Escolhendo aleatoriamente quatro professores do departamento, qual é a probabilidade de a Maria e o João não fazerem parte da comissão juntos?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

1.3. Dos 19 professores do departamento, sabe-se ainda que cinco são da zona norte do país, seis são da zona centro e os restantes são da zona sul. É necessário escolher aleatoriamente dois professores para acompanhar alguns dos alunos a uma cerimónia de entrega de prémios na capital do país.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: "Os dois professores são da zona norte."

B: "Os dois professores não são da mesma zona do país."

Elabore uma composição, na qual indique o valor de $P(A|\overline{B})$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta deve:

- explicar o significado de $P(A|\overline{B})$, no contexto da situação descrita;
- fazer referência à regra de Laplace;
- explicar o número de casos possíveis;
- explicar o número de casos favoráveis;
- apresentar o valor de $P(A|\overline{B})$ na forma de fração irredutível.

2. Considere o desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^n$, com $x > 0$ e n um número natural.

Sabe-se que a soma dos coeficientes binomiais deste desenvolvimento é 1024.

Escolhendo ao acaso dois termos deste desenvolvimento, qual é a probabilidade de o produto dos seus coeficientes ser um número positivo?

Apresente o resultado em percentagem, com aproximação às unidades.

3. Sejam E um conjunto finito, não vazio, e P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$. Sejam A e B dois acontecimentos em E.

Sabe-se que:

- $P(A|B) = \frac{1}{6}$
- $P(B \backslash A) = \frac{1}{4}$

Qual é o valor de $P(\bar{A} \cup \bar{B})$?

(A) 0,8

(B) 0,85

(C) 0,9

(D) 0,95

4. De uma turma de 12.º ano, sabe-se que:

- $\frac{7}{10}$ dos alunos vêm a série *Peaky Blinders*;
- metade dos alunos vêm a série *How I met your mother*;
- um em cada cinco alunos que vê a série *How I met your mother* não vê a série *Peaky Blinders*.

Escolheu-se, ao acaso, um aluno dessa turma.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ver a série *Peaky Blinders* e não ver a série *How I met your mother.* Apresente o resultado na forma de dízima.

5. Sabe-se que ${}^{n-1}C_{p-1} = 8008$,que ${}^{n-1}C_{p+1} = 12\,870$ e que ${}^{n}C_{p} = 19\,448$.

O valor de ${}^{n+1}C_{n-p}$ é:

(A) $11\,440$

(B) $19\,448$

(C) $31\,824$

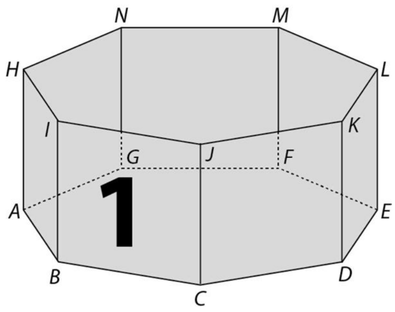
(D) $43\,758$

6. Sejam E um conjunto finito, não vazio, e P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$.

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(E)$, com $P(B) > 0$. Prove que:

$$P(\bar{A}) + P(A \backslash B) = P(B) \times P(\bar{A}|B) + P(\bar{B})$$

7. Na figura seguinte está representado o prisma regular $[ABCDEFGHIJKLMN]$, com uma das faces laterais numerada com o número 1.



7.1. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices distintos do prisma.

Qual é a probabilidade de esses vértices formarem uma diagonal facial do prisma?

(A) $\frac{1}{13}$ **(B)** $\frac{4}{13}$ **(C)** $\frac{6}{13}$ **(D)** $\frac{8}{13}$

7.2. Considere agora que se pretende numerar as oito faces do prisma não numeradas, utilizando os algarismos de 2 a 9 e colocando um algarismo diferente em cada face.

De quantas maneiras o poderemos fazer, de forma que:

7.2.1. a soma dos algarismos colocados nas bases seja igual a 11?

7.2.2. a soma dos algarismos colocados nas faces laterais seja par?

7.3. Dispõe-se de n cores diferentes $(n \geq 7)$ para colorir todas as faces do prisma.

Qual é a probabilidade de, ao colorir cada face do prisma com uma única cor, exatamente três faces sejam pintadas da mesma cor e as restantes faces sejam pintadas com cores diferentes entre si?

(A) $\frac{{}^{9}C_3 \times 3! \times {}^{n-1}A_6}{n^9}$ **(B)** $\frac{{}^{9}C_3 \times n \times {}^{n-1}A_6}{{}^{n}A_9}$ **(C)** $\frac{{}^{9}C_3 \times n \times {}^{n-1}A_6}{{}^{n}A'_9}$ **(D)** $\frac{{}^{9}C_3 \times n \times {}^{n-1}A_6 \times 9!}{n^9}$

FIM

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.1.**	**7.2.2.**	**7.3.**	**Total**
10	20	25	20	10	25	10	25	10	17	18	10	**200**

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (B)

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}_{m \text{ professores da zona Norte}} \quad \underbrace{\_\ \_\ \cdots\ \_}_{n \text{ professores da zona Centro}} \quad \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{8 \text{ professores da zona Sul}}$$

$m!$ é o número de maneiras de permutarem entre si m professores da zona norte. Por cada uma destas maneiras, existem $n!$ formas de os professores da zona centro permutarem também entre si. Por cada uma das maneiras de se posicionarem os professores das zonas norte e centro, existem 10! formas de os oito professores da zona sul permutarem entre si e também entre os blocos de professores das outras duas zonas.

Assim, $m! \times n! \times 10!$ é uma resposta ao problema.

1.2. Número de casos possíveis: ${}^{19}C_4$

Número de casos favoráveis: $\underbrace{{}^{17}C_4}_{\substack{\text{número de comissões sem} \\ \text{a Maria e sem o João}}} + \underbrace{{}^{2}C_1 \times {}^{17}C_3}_{\substack{\text{número de comissões só com} \\ \text{a Maria e só com o João}}}$

A probabilidade pedida é, então, $\frac{{}^{17}C_4 + {}^{2}C_1 \times {}^{17}C_3}{{}^{19}C_4} = \frac{3740}{3876} = \frac{55}{57}$.

1.3. $P(A|\overline{B})$ significa a probabilidade de os dois professores escolhidos serem da zona norte, sabendo que os dois professores escolhidos são da mesma zona do país.

Como há cinco professores da zona norte, seis da zona centro e oito da zona sul, o número de modos de escolher aleatoriamente dois professores da mesma zona do país é dado por ${}^{5}C_2 + {}^{6}C_2 + {}^{8}C_2$, ou seja, 53 maneiras, o que constitui o número de casos possíveis.

Destes, ${}^{5}C_2$ dizem respeito ao número de maneiras de escolher dois professores dos cinco que são da zona norte.

Assim, ${}^{5}C_2$, isto é, 10, é o número de favoráveis.

Segundo a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são em número finito e equiprováveis.

Assim, $P(A|\overline{B}) = \frac{10}{53}$.

2. Sabe-se que a soma dos coeficientes binomiais do desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n$ é dada por 2^n.

Como $2^n = 1024$, então $n = 10$.

Assim, o desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n$ tem 11 termos da forma:

$$ {}^{10}C_k \times \left(\sqrt{x}\right)^{10-k} \times \left(-\frac{2}{x}\right)^k, k \in \{0, 1, \dots, 10\}$$

Consoante k é par ou ímpar, estes termos terão coeficientes, respetivamente, positivos ou negativos, havendo seis termos positivos e cinco negativos.

Número de casos possíveis: ${}^{11}C_2 = 55$

Número de casos favoráveis: $\underbrace{{}^{6}C_2}_{\substack{\text{número de casos em que ambos}\\ \text{os coeficientes são positivos}}} + \underbrace{{}^{5}C_2}_{\substack{\text{número de casos em que ambos}\\ \text{os coeficientes são negativos}}} = 15 + 10 = 25$

A probabilidade pretendida é $\frac{{}^{6}C_2 + {}^{5}C_2}{{}^{11}C_2} = \frac{25}{55}$, que é aproximadamente igual a 45%.

3. Opção (D)

Sabemos que $P(A|B) = \frac{1}{6}$, logo:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}P(B)$$

Sabemos também que $P(B \backslash A) = \frac{1}{4}$, logo $P(B) - P(B \cap A) = \frac{1}{4}$.

Como $P(A \cap B) = \frac{1}{6}P(B)$, vem que:

$$P(B) - \frac{1}{6}P(B) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{6}P(B) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{6}{20}$$
$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{10}$$

Logo:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) =$$
$$= 1 - \frac{1}{20} =$$
$$= \frac{19}{20} =$$
$$= 0{,}95$$

4. Consideremos os acontecimentos:

B: "O aluno escolhido vê a série *Peaky Blinders*."

M: "O aluno escolhido vê a série *How I met your mother*."

Sabemos que:

- $P(B) = \frac{7}{10}$
- $P(M) = \frac{1}{2}$
- $P(\overline{B}|M) = \frac{1}{5}$, isto é:

$$\frac{P(\overline{B} \cap M)}{P(M)} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap M) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap M) = \frac{1}{10}$$

Organizando toda a informação numa tabela:

	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{\overline{M}}$	**Total**
$\boldsymbol{B}$			$\frac{7}{10}$
$\boldsymbol{\overline{B}}$	$\frac{1}{10}$		$\frac{3}{10}$
Total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Pretendemos determinar $P(B \cap \overline{M})$:

$$P(B \cap M) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(B \cap \overline{M}) = \frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{\overline{M}}$	**Total**
$\boldsymbol{B}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$
$\boldsymbol{\overline{B}}$	$\frac{1}{10}$		$\frac{3}{10}$
Total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Logo, a probabilidade pedida é igual a 0,3.

5. Opção (D)

Sabemos que:

- ${}^{n-1}C_{p-1} = 8008$
- ${}^{n-1}C_{p+1} = 12\,870$
- ${}^{n}C_{p} = 19\,448$

Assim, a sua disposição no triângulo de Pascal seria:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & 8008 & & {}^{n-1}C_p & & 12\,870 & \ldots \\ & \ldots & 19\,448 & & {}^{n}C_{p+1} & \ldots & \\ & & \ldots & {}^{n+1}C_{p+1} & \ldots & & \end{array}$$

$^{n-1}C_p \ = 19\,448 - 8008 = 11\,440$

$^{n}C_{p+1} = 11\,440 + 12\,870 = 24\,310$

$^{n+1}C_{p+1} = 19\,448 + 24\,310 = 43\,758$

Como $^{n+1}C_{p+1} = {}^{n+1}C_{(n+1)-(p+1)} = {}^{n+1}C_{n-p}$, então $^{n+1}C_{n-p} = 43\,758$.

6. $P(\bar{A}) + P(A \backslash B) = P(\overline{A}) + P(A \cap \overline{B}) = 1 - P(A) + P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cup \overline{B}) =$

$= P(\overline{B}) + 1 - P(A \cup \overline{B}) =$

$= P(\overline{B}) + P\left(\overline{A \cup \overline{B}}\right) =$

$= P(\overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) =$

$= P(\overline{B}) + P(B) \times P(\overline{A}|B) =$

$= P(B) \times P(\bar{A}|B) + P(\bar{B})$ c.q.d.

7.

7.1. Opção (C)

O número de casos possíveis é $^{14}C_2 \ = 91$.

O número de casos favoráveis é igual a $\left(^{7}C_2 \ - 7\right) \times 2 + 7 \times 2 = 28 + 14 = 42$.

$^{7}C_2 \ - 7$ é o número de diagonais de cada uma das bases do prisma. Como o prisma tem duas bases, então $\left(^{7}C_2 \ - 7\right) \times 2$ é o número de diagonais das bases.

Como as faces laterais são retângulos, cada face tem duas diagonais, logo as sete faces laterais têm um total de $7 \times 2 = 14$ diagonais.

A probabilidade pedida é igual a $\frac{42}{91} = \frac{6}{13}$.

7.2.

7.2.1. Os conjuntos de dois números que adicionados dão 11 são: {2, 9}, {3, 8}, {4, 7} e {5, 6}

Temos quatro possibilidades distintas para escolher o conjunto de números que serão colocados nas bases do prisma. Por cada uma destas maneiras, existem duas permutações desses dois números e, por cada uma destas maneiras, existem 6! maneiras diferentes de colocar os seis números restantes nas seis faces laterais restantes.

Assim, o número de maneiras pedidas é igual a $4 \times 2 \times 6! = 5760$.

7.2.2. Como dispomos apenas de quatro algarismos ímpares e de quatro algarismos pares, existem apenas dois casos mutuamente exclusivos:

$\underline{1}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{P}\ \underline{P}$

$$1 \times 4! \times {}^{4}A_2 \times \underbrace{{}^{6}C_4}_{\substack{\text{número de} \\ \text{maneiras de escolher} \\ \text{4 posições para os} \\ \text{algarismos ímpares}}} \times \underbrace{2!}_{\substack{\text{número de maneiras} \\ \text{de permutar os} \\ \text{restantes 2 algarismos} \\ \text{para as bases}}}$$

$\underline{1}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{P}\ \underline{P}\ \underline{P}\ \underline{P}$

$$1 \times {}^{4}A_2 \times 4! \times \underbrace{{}^{6}C_4}_{\substack{\text{número de} \\ \text{maneiras de escolher} \\ \text{4 posições para os} \\ \text{algarismos pares}}} \times \underbrace{2!}_{\substack{\text{número de maneiras} \\ \text{de permutar os} \\ \text{restantes 2 algarismos} \\ \text{para as bases}}}$$

Logo, $4! \times {}^{4}A_2 \times {}^{6}C_4 \times 2! + 4! \times {}^{4}A_2 \times {}^{6}C_4 \times 2! = 17\,280$ é o número de maneiras pedidas.

7.3. Opção (C)

Número de casos possíveis: __ __ __ __ __ __ __ __ __

$$n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n = n^9 = {}^{n}A'_9$$

Número de casos favoráveis: ${}^{9}C_3 \times n \times {}^{n-1}A_6$

- ${}^{9}C_3$ é o número de maneiras de escolher qual o conjunto de três faces de entre as nove que serão pintadas da mesma cor;
- n é o número de maneiras de escolher qual a cor de entre as n a utilizar nas faces pintadas da mesma cor;
- ${}^{n-1}A_6$ é o número de maneiras de pintar ordenadamente as restantes seis faces com as $n-1$ cores ainda disponíveis.

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{9}C_3 \times n \times {}^{n-1}A_6}{{}^{n}A'_9}$.