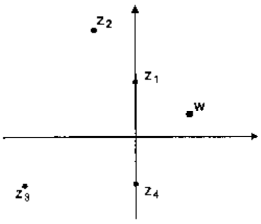
Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática – 12.º ano

Números Complexos - Exercícios saídos em

(*Exames Nacionais 2000*)

1. Seja C o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de 5 nºs complexos: w, z_1,



z_2, z_3 e z_4.

Qual é o nº complexo que pode ser igual a 2iw?

(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

(Prova Modelo)

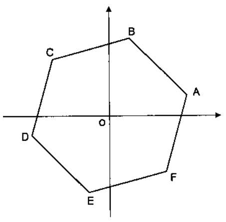
2. Seja C o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

a) Considere o polinómio x^3-3x^2+6x-4. Determine analiticamente as suas raízes em C, sabendo que uma delas é 1. Apresente-as na forma algébrica, simplificando-as o mais possível.

b) Seja z um n.º complexo de módulo 2 e $\bar{z}$ o seu conjugado. No plano complexo, considere os pontos A e B tais que A é a imagem geométrica de z, e B a imagem geométrica de $\bar{z}$. Sabe-se que: o ponto A está situado no 1º quadrante; o ângulo AOB é recto (O designa a origem do referencial). Determine z/i, apresentando o resultado na forma algébrica.

(Prova Modelo)

3. Na figura está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 6 de um certo nº complexo.



O vértice C é a imagem geométrica do nº complexo $\sqrt{2}\, cis\frac{3\pi}{4}$. Qual dos seguintes nºs complexos tem por imagem geométrica o vértice D?

(A) $\sqrt{2}\, cis\frac{7\pi}{6}$ (B) $\sqrt{2}\, cis\frac{13\pi}{12}$

(C) $\sqrt[6]{2}\, cis\frac{7\pi}{6}$ (D) $\sqrt[6]{2}\, cis\frac{13\pi}{12}$

(1ª chamada)

4. Seja A o conjunto dos nºs complexos cuja imagem, no plano complexo, é o interior do círculo de centro na origem do referencial e raio 1.

a) Defina, por meio de uma condição em C, a parte de A contida no 2.º quadrante (excluindo os eixos do referencial).

b) Sem recorrer à calculadora, mostre que o nº complexo $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4\, cis\frac{\pi}{6}}$ pertence ao conjunto A.

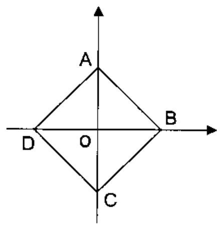
(1ª chamada)

5. Seja z um nº complexo de argumento π/5. Qual poderá ser um argumento do simétrico de z?

(A) -π/5 (B) π+π/5 (C) π-π/5 (D) 2π+π/5

(2ª chamada)

6. Considere, no plano complexo, o quadrado [ABCD].



Os pontos A e C pertencem ao eixo imaginário, e os pontos B e D pertencem ao eixo real. Estes 4 pontos encontram-se à distância de 1 unidade da origem do referencial.

a) Sejam w=1-i e z=2 cis 3π/2. Sem recorrer à calculadora, mostre que as raízes quartas do complexo w^2/z têm por imagens geométricas os pontos A, B, C e D.

b) Defina, por meio de uma condição em C, a circunferência inscrita no quadrado [ABCD].

(2ª chamada)

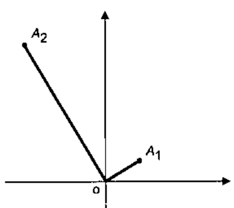
7. Qual das seguintes condições define uma recta no plano complexo?

(A) |z-1|=4 (B) arg(z)=π/2

(C) 3z+2i=0 (D) |z-1|=|z+i|

(2ª fase)

8. Seja C o conjunto dos nºs complexos, e sejam z_1 e z_2 2 elementos de C. Sabe-se que: z_1 tem argumento π/6; $z_2=z_1^4$; A_1 e A_2 são imagens geométricas de z_1 e de z_2, respectivamente.



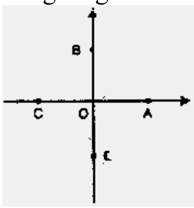
a) Justifique que o ângulo A_1OA_2 é recto (O designa a origem do referencial).

b) Considere, no plano complexo, a circunferência C definida pela condição $|z|=|z_1|$. Sabendo que o perímetro de C é 4π, represente, na forma algébrica, o nº complexo z_1.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2001*)

9. Seja $z=yi$, com $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, um nº complexo. Qual dos 4 pontos representados na figura junta (A, B, C ou D) pode ser a imagem geométrica de z^4?



(A) O ponto A
(B) O ponto B
(C) O ponto C
(D) O ponto D

(Prova Modelo)

10. Em C, conjunto dos nºs complexos, considere $z_1=7+24i$.

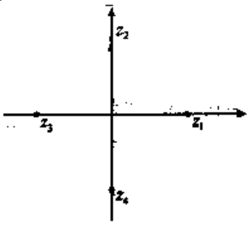
a) Um certo ponto P é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de z_1. Sabendo que o ponto P tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

b) Seja $z_2=\text{cis}\ \alpha$ com $\alpha\in]3\pi/4,\pi[$. Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $z_1\times z_2$

(Prova Modelo)

11. Seja w um nº complexo diferente de 0, cuja imagem geométrica, no plano complexo, está no 1º quadrante e pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares. Seja $\overline{w}$ o conjugado de w.

Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de 4 nºs complexos: z_1, z_2,z_3 e z_4.



Qual deles pode ser igual a $\frac{w}{\overline{w}}$?

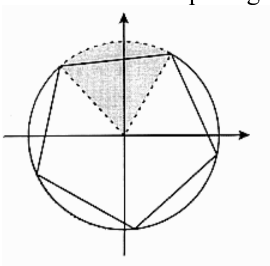
(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

(1ª chamada)

12. Em C, conjunto dos nºs complexos, seja $z_1=2\ \text{cis}\ \pi/3$

a) Sem recorrer à calculadora, verifique que $\frac{z_1^{\ 3}+2}{i}$ é um imaginário puro.

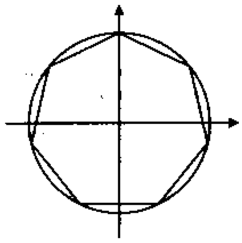
b) No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos 5 vértices do pentágono regular representado na figura.



Este pentágono regular está inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial. Defina, por meio de uma condição em C, a região sombreada, excluindo a fronteira.

(1ª chamada)

13. Na figura está representado, no plano complexo, um heptágono regular inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1. Um dos vértices do heptágono pertence ao eixo imaginário.



Os vértices do heptágono são, para um certo nº natural n, as imagens geométricas das raízes de índice n de um nº complexo z. Qual é o valor de z?

(A) 1+i (B) 1-i (C) i (D) -i

(2ª chamada)

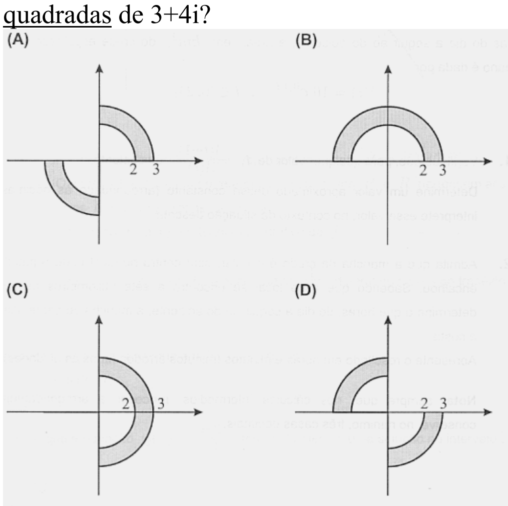
14. Em C, conjunto dos nºs complexos, seja $z_1=4i$

a) No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos 4 vértices de 1 losango de perímetro 20, centrado na origem do referencial. Determine os nºs complexos cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango.

b) Sem recorrer à calculadora, resolva a equação $\left(\sqrt{2}cis\,\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot z=2+z_1$. Apresente o resultado na forma algébrica.

(2ª chamada)

15. Qual das seguintes regiões do plano complexo (indicadas a sombreado) contém as imagens geométricas das <u>raízes quadradas</u> de 3+4i?



(2ª fase)

16. Em C, conjunto dos nºs complexos, considere w=2+i

a) Determine $(w-2)^{11}(1+3i)^2$ na forma algébrica.

b) Averigúe se o inverso de w é, ou não, $\sqrt{2}cis\,\frac{3\pi}{4}$

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2002*)

17. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, o eixo imaginário?
(A) $z+\overline{z}=0$ (B) $\mathrm{Im}(z)=1$ (C) $|z|=0$ (D) $z-\overline{z}=0$

(1ª chamada)

18. Em $\mathbb{C}$, considere os nºs complexos: $z_1=1+i$ e

$z_2=\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\ \frac{3}{4}\pi$.

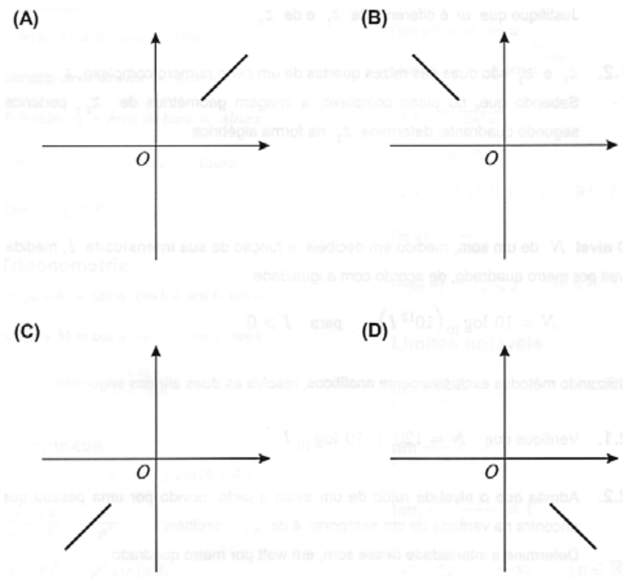
a) Verifique que z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo nº complexo. Determine esse nº, apresentando-o na forma algébrica.

b) Considere, no plano complexo, os pontos A, B e O em que: A é a imagem geométrica de z_1; B é a imagem geométrica de z_2; O é a origem do referencial. Determine o perímetro do triângulo [AOB].

(1ª chamada)

19. Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto

$\{z\in\mathbb{C}: |z+1|=|z-i| \wedge 2\le \mathrm{Im}(z)\le 4\}$?



(2ª chamada)

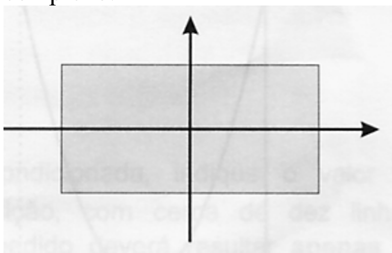
20. De 2 nºs complexos z_1 e z_2 sabe-se que: um argumento de z_1 é $\pi/3$; o módulo de z_2 é 4.

a) Seja $w=\frac{-1+i}{i}$. Justifique que w é diferente de z_1 e de z_2

b) z_1 e z_2 são duas das raízes quartas de um certo nº complexo z. Sabendo que, no plano complexo, a imagem geométrica de z_2 pertence ao 2º quadrante, determine z_2 na forma algébrica.

(2ª chamada)

21. Na figura está representado um rectângulo de comprimento 4 e largura 2, centrado na origem do plano complexo.



Seja z um nº complexo qualquer, cuja imagem geométrica está situada no interior do rectângulo. Qual dos seguintes nºs complexos tem também, necessariamente, a sua imagem geométrica no interior do rectângulo?

(A) z^{-1} (B) $\overline{z}$ (C) z^2 (D) $2z$

(2ª fase)

22. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos nºs complexos, considere $z_1=1+i$

a) Determine os nºs reais b e c para os quais z_1 é raiz do polinómio x^2+bx+c.

b) Seja $z_2=\mathrm{cis}\,\alpha$. Calcule o valor de α, pertencente ao intervalo $[0,2\pi]$, para o qual $z_1\times\overline{z_2}$ é um nº real negativo.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2003*)

23. Seja w um número complexo diferente de zero, cuja imagem geométrica pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares. A imagem geométrica de w^4 pertence a uma das rectas a seguir indicadas. A qual delas?
(A) Eixo real
(B) Eixo imaginário
(C) Bissectriz dos quadrantes pares
(D) Bissectriz dos quadrantes ímpares

(1ª chamada)

24. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1=2-2i$, $z_2=\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\ \frac{5\pi}{4}$ e $z_3=-1+i$

a) <u>Sem recorrer à calculadora</u>, determine $\frac{z_1}{z_2}$ apresentando o resultado na forma algébrica.

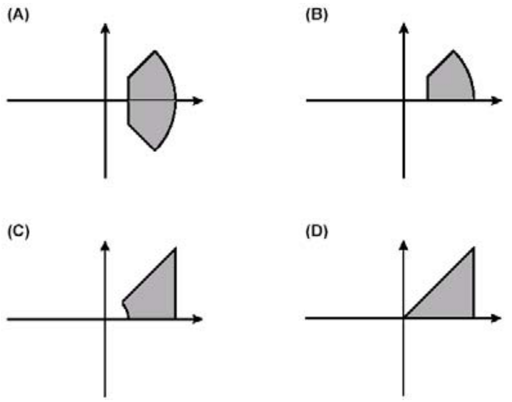
b) Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_1 e que passa na imagem geométrica de z_3

(1ª chamada)

25. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição:

$|z|\le 3 \quad \wedge \quad 0\le \arg z\le \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad Re\, z\ge 1$

Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?



(2ª chamada)

26. ℂ é o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

a) Sem recorrer à calculadora, determine $\dfrac{(\sqrt{3}-2i)^2+(2cis\frac{\pi}{9})^3}{cis\frac{3\pi}{2}}$ apresentando o resultado na forma algébrica.

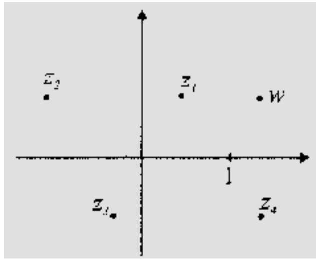
b) Seja α um número real. Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que: $z_1=cis\ \alpha$; $z_2=cis\ (\alpha+\pi)$

Mostre que z_1 e z_2 não podem ser ambos raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

(2ª chamada)

27. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4. Qual é o nº complexo que pode ser igual a 1-w?

(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4



(2ª fase)

28. ℂ é o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

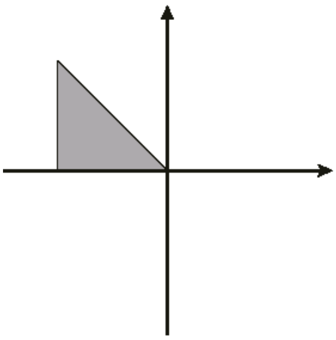
a) Sem recorrer à calculadora, calcule, na forma trigonométrica, as raízes quartas do número complexo $1+\sqrt{3}\,i$, simplificando o mais possível as expressões obtidas.

b) Seja z um nº complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no 2º quadrante e pertencente à recta definida pela condição Re(z)=-2. Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z. Seja O a origem do referencial. Represente, no plano complexo, um triângulo [AOB], de acordo com as condições enunciadas. Sabendo que a área do triângulo [AOB] é 8, determine z, na forma algébrica.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2004*)

29. Na figura está representado, no plano complexo, um triângulo rectângulo isósceles.



Os catetos têm comprimento 1, estando um deles contido no eixo dos números reais. Um dos vértices do triângulo coincide com a origem do referencial. Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $Re(z) \geq 0 \quad \wedge \quad Im(z) \leq 0 \quad \wedge \quad |z| \leq 1$

(B) $Re(z) \leq 0 \quad \wedge \quad Im(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z| \leq 1$

(C) $Re(z) \geq -1 \quad \wedge \quad Im(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z-i| \geq |z+1|$

(D) $Re(z) \geq -1 \quad \wedge \quad Im(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z-i| \leq |z-1|$

(1ª fase)

30. Em ℂ, considere os números complexos: $z_1=-6+3i$ e $z_2=1-2i$.

Sem recorrer à calculadora, determine $\dfrac{z_1+i^{23}}{z_2}$, apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

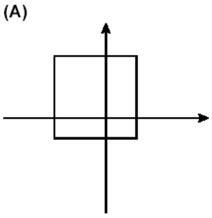
(1ª fase)

31. Seja z um número complexo, cuja imagem geométrica pertence ao primeiro quadrante (eixos não incluídos). Justifique que a imagem geométrica de z^3 não pode pertencer ao quarto quadrante.

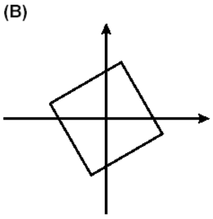
(1ª fase)

32. Os quatro vértices de um dos quadriláteros seguintes são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de um certo número complexo w.
Qual poderá ser esse quadrilátero?

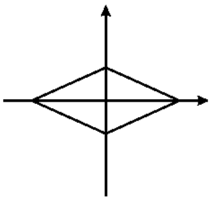
(A)



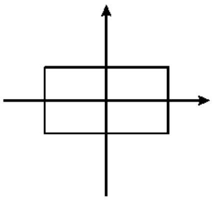
(B)



(C)



(D)



(2ª fase)

33. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$w=4-3i$

a) Sem recorrer à calculadora, calcule, na forma algébrica, $2i+w^2/i$

b) Seja α um argumento do número complexo w. Exprima, na forma trigonométrica, em função de α, o produto de i pelo conjugado de w.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2005*)

34. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1=2\text{cis}\frac{\pi}{4}$ e $z_2=2i$. Sejam P_1 e P_2 as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e de z_2, respectivamente. Sabe-se que o segmento de recta P_1P_2 é um dos lados do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w. Qual é o valor de n?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

(1ª fase)

35. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

a) Considere $w=\frac{2+i}{1-i}-i$. Sem recorrer à calculadora, escreva w na forma trigonométrica.

b) Considere $z_1=\text{cis}(\alpha)$ e $z_2=\text{cis}(\frac{\pi}{2}-\alpha)$. Mostre que a imagem geométrica, no plano complexo, de z_1+z_2 pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

(1ª fase)

36. Em qual das opções seguintes estão duas raízes cúbicas de um mesmo número complexo?

(A) $\text{cis}\frac{\pi}{6}$ e $\text{cis}\frac{5\pi}{6}$ (B) $\text{cis}\frac{\pi}{3}$ e $\text{cis}\frac{2\pi}{3}$

(C) $\text{cis}\frac{\pi}{4}$ e $\text{cis}\frac{3\pi}{4}$ (D) $\text{cis}\frac{\pi}{2}$ e $\text{cis}\frac{3\pi}{2}$

(2ª fase)

37. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w_1=1+i$, $w_2=\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{\pi}{12}$ e $w_3=\sqrt{3}\,\text{cis}(-\frac{\pi}{2})$.

a) Sem recorrer à calculadora, determine o valor de $\frac{w_1\times w_2-2}{w_3}$. Apresente o resultado na forma algébrica.

b) Represente, no plano complexo, a região definida pela condição $\text{Re}(z)\geq\text{Re}(w_1) \wedge |z-w_3|\leq\sqrt{3}$

(2ª fase)

$\boxed{E_1}$. Considere, no plano complexo, um ponto A, imagem geométrica de um certo nº complexo z. Sabe-se que A não pertence a qualquer um dos eixos do plano complexo. Seja B o ponto simétrico do ponto A, relativamente ao eixo imaginário. Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o ponto B?

(A) $\bar{z}$ (B) $\frac{1}{\bar{z}}$ (C) $-\bar{z}$ (D) $-z$

(Época especial)

$\boxed{E_2}$. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1=\text{cis}\frac{\pi}{6}$.

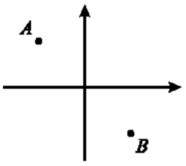
a) Sem recorrer à calculadora, determine o valor de $\frac{[i\times(z_1)^6-1]^2}{i}$. Apresente o resultado na forma algébrica.

b) Represente, no plano complexo, o conjunto definido pela condição $|z-z_1|\leq1 \wedge |z|\leq|z-z_1|$

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2006*)

38. Os pontos A e B, representados na figura, são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quadradas de um certo número complexo z.



Qual dos números complexos seguintes pode ser z?

(A) 1 (B) i (C) -1 (D) $-i$

(1ª fase)

39. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

a) Sem recorrer à calculadora, determine $\frac{4+2i\left(cis\frac{\pi}{6}\right)^6}{3+i}$ apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

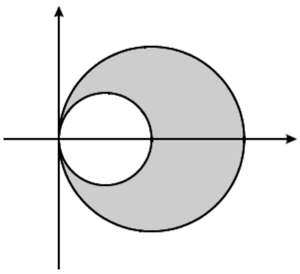
b) Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, arg(z) designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[0,2\pi[$. Represente a região do plano complexo definida pela condição, em $\mathbb{C}$, por,

$\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \ \wedge \ \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$

e determine a sua área.

(1ª fase)

40. Na figura estão representadas, no plano complexo, duas circunferências, ambas com centro no eixo real, tendo uma delas raio 1 e a outra raio 2.



A origem do referencial é o único ponto comum às duas circunferências. Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $|z-1| \geq 1 \wedge |z-2| \leq 2$ (B) $|z-1| \geq 2 \wedge |z-2| \leq 1$

(C) $|z-1| \leq 1 \wedge |z-2| \geq 2$ (D) $|z-1| \leq 2 \wedge |z-2| \geq 1$

(2ª fase)

41. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

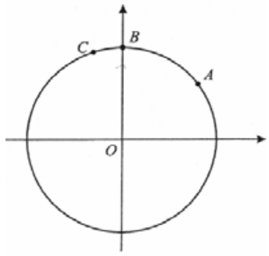
a) Considere $z_1 = (2-i)\left(2+cis\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = \frac{1}{5}cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)$

Sem recorrer à calculadora, escreva o número complexo $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica.

b) Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no primeiro quadrante. Seja B a imagem geométrica de $\bar{z}$, conjugado de z. Seja O a origem do referencial. Sabe-se que o triângulo [AOB] é equilátero e tem perímetro 6. Represente o triângulo [AOB] e determine z na forma algébrica.

(2ª fase)

$\boxed{E_3}$. Na figura está representada, no plano complexo, uma circunferência centrada na origem do referencial.



Os pontos A, B e C pertencem a essa circunferência. O ponto A é a imagem geométrica de $4+3i$. O ponto B pertence ao eixo imaginário. O arco BC tem 18 graus de amplitude. Em cada uma das 4 alternativas que se seguem, está escrito um número complexo na forma trigonométrica (os argumentos estão expressos em radianos). Qual deles tem por imagem geométrica o ponto C?

(A) $7cis\frac{2\pi}{3}$ (B) $7cis\frac{3\pi}{5}$ (C) $5cis\frac{2\pi}{3}$ (D) $5cis\frac{3\pi}{5}$

(Época especial)

$\boxed{E_4}$. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

a) Considere a equação $iz^3 - \sqrt{3} - i = 0$. Uma das soluções desta equação tem a sua imagem geométrica no 3.º quadrante do plano complexo. Sem recorrer à calculadora, determine essa solução, escrevendo-a na forma trigonométrica.

b) Seja B a região do plano complexo definida pela condição

$|z| \leq 2 \ \wedge \ \mathrm{Re}(z) \geq 0 \wedge |z-1| \leq |z-i|$

Represente graficamente B e determine a sua área.

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2007*)

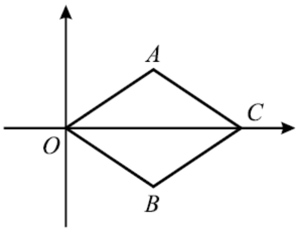
42. Qual das opções seguintes apresenta duas raízes quadradas de um mesmo número complexo?

(A) 1 e i (B) -1 e i (C) $1-i$ e $1+i$ (D) $1-i$ e $-1+i$

(1ª fase)

43. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \text{cis}\,\alpha \quad (\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[)$

a) Na figura está representado, no plano complexo, o paralelogramo [AOBC]



A e B são as imagens geométricas de z e $\bar{z}$, respectivamente. C é a imagem geométrica de um número complexo, *w*. Justifique que $w = 2\cos\alpha$

b) Determine o valor de $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ para o qual $\frac{z^3}{i}$ é um número real.

(1ª fase)

44. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja i a unidade imaginária. Seja n um número natural tal que $i^n = -i$. Indique qual dos seguintes é o valor de i^{n+1}.

(A) 1 (B) i (C) -1 (D) $-i$

(2ª fase)

45. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam: $z_1 = 3 + yi$ e $z_2 = 4iz_1$ (i é a unidade imaginária e y designa um número real).

a) Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, Arg(z) designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[0,2\pi[$. Admitindo que $\text{Arg}(z_1)=\alpha$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, determine o valor de $\text{Arg}(-z_2)$ em função de α.

b) Sabendo que $\text{Im}(z_1)= \text{Im}(z_2)$, determine z_2. Apresente o resultado na forma algébrica.

(2ª fase)

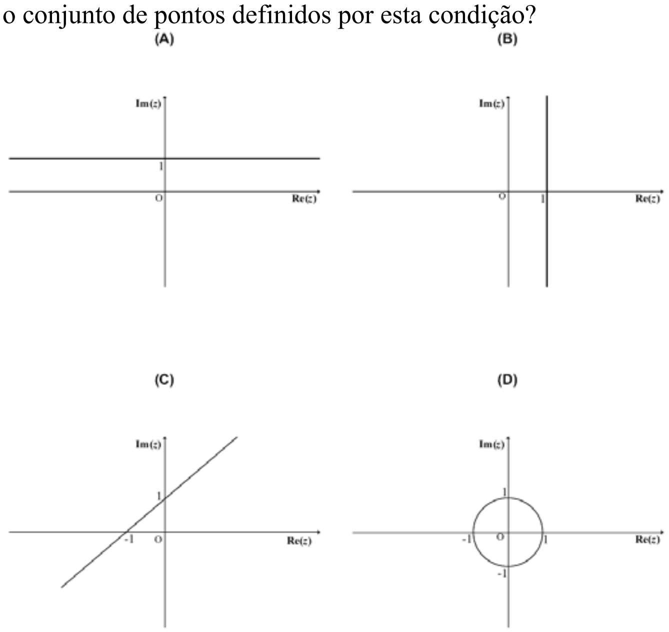
(*Exames Nacionais 2008*)

46. Seja z = $3i$ um número complexo. Qual dos seguintes valores é um argumento de z ?

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}\pi$ (C) π (D) $\frac{3}{2}\pi$

(1ª fase)

47. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $z + \bar{z} = 2$. Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por esta condição?



(1ª fase)

48. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$ e $z_2 = 8cis0$ (i designa a unidade imaginária).

a) Mostre, sem recorrer à calculadora, que $(-z_1)$ é uma raiz cúbica de z_2.

b) No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de $z_3 = z_3 \cdot i^{46}$, respectivamente. Determine o comprimento do segmento [AB].

(1ª fase)

49. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{6}$. Qual dos seguintes valores é um argumento de $(-z)$?

(A) $-\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{5}{6}\pi$ (C) π (D) $\frac{7}{6}\pi$

(2ª fase)

50. Considere a figura 3, representada no plano complexo.

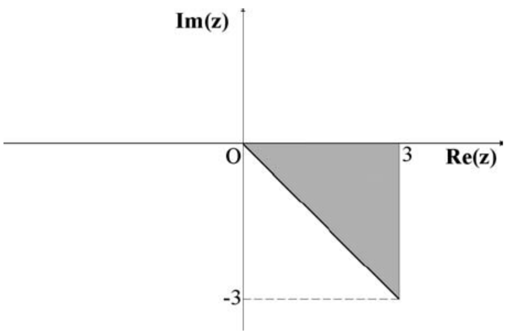


Fig. 3

Qual é a condição, em $\mathbb{C}$, que define a região sombreada da figura, incluindo a fronteira?

(A) $\operatorname{Re}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

(B) $\operatorname{Re}(z) \leq 3 \wedge 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$

(C) $\operatorname{Im}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

(D) $\operatorname{Re}(z) \geq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

(2ª fase)

51. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).

a) Sem recorrer à calculadora, determine o valor de $\frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i}$. Apresente o resultado na forma algébrica.

b) Considere z_1 uma das raízes quartas de um certo número complexo z. Determine uma outra raiz quarta de z , cuja imagem geométrica é um ponto pertencente ao 3.º quadrante. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

(2ª fase)

$\boxed{E_5}$. Qual das seguintes condições, na variável complexa z, define, no plano complexo, uma circunferência?

(A) $|z + 4| = 5$ (B) $|z| = |z + 2i|$

(C) $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ (D) $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 2$

(Época especial)

$\boxed{E_6}$ Na figura 2 está representado, no plano complexo, o polígono [EFGHI], inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a 2. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 5 de um certo número complexo; um dos vértices pertence ao eixo real.

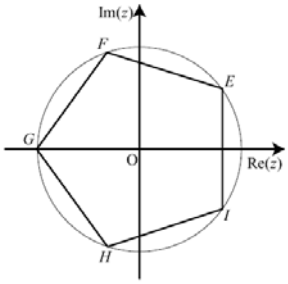


Fig. 2

Qual é o vértice do polígono [EFGHI] que é a imagem geométrica de $2cis(-\frac{3\pi}{5})$?

(A) E (B) F (C) H (D) I

(Época especial)

$\boxed{E_7}$ Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam os números $z_1 = (1 - i) \cdot (1 + cis\,\frac{\pi}{2})$ e $z_2 = 8cis(-\frac{\pi}{4})$ (i designa a unidade imaginária).

a) Determine, sem recorrer à calculadora, o número complexo $w = \frac{z_1}{z_2}$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

b) Considere o número complexo $z = \overline{z_2}$. No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z e de z_2, respectivamente. Determine a área do triângulo [AOB], em que O é a origem do referencial.

(Época especial)

(*Teste intermédio e Exames Nacionais 2009*)

52. Para um certo número real positivo ρ e para um certo número real α compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, o número complexo $\rho cis\alpha$ tem por imagem geométrica o ponto *P*, representado na figura 2. Qual é a imagem geométrica do número complexo $\frac{\rho}{2} cis(2\alpha)$?

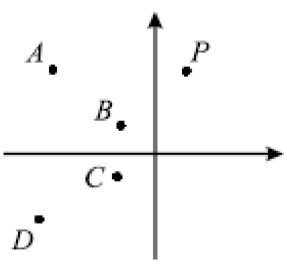


Figura 2

(A) O ponto A (B) O ponto B

(C) O ponto C (D) O ponto D

(Intermédio 3)

53. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos; *i* designa a unidade imaginária.

Determine $\frac{(2+i)^2 + 1 + 6i^{35}}{1+2i}$ sem recorrer à calculadora. Apresente o resultado na forma algébrica.

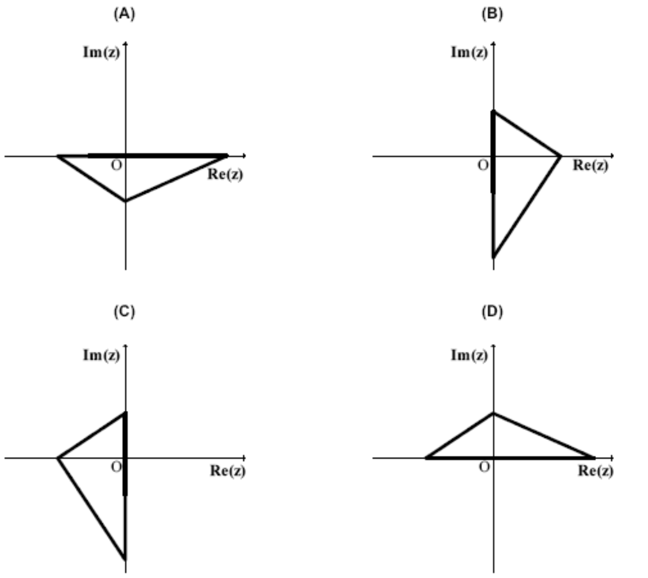
(Intermédio 3)

54. Seja z um número complexo, em que um dos argumentos é $\frac{\pi}{3}$. Qual dos valores seguintes é um argumento de $\frac{2i}{\bar{z}}$, sendo $\bar{z}$ o conjugado de *z*?

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{2}{3}\pi$ (C) $\frac{5}{6}\pi$ (D) $\frac{7}{6}\pi$

(1ª fase)

55. Seja *b* um número real positivo, e $z_1 = bi$ um número complexo. Em qual dos triângulos seguintes os vértices podem ser as imagens geométricas dos números complexos z_1, $(z_1)^2$ e $(z_1)^3$?



(1ª fase)

56. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = \frac{i}{1-i} - i^{18}$ e $z_2 = cis(\frac{5}{6}\pi)$.

a) Determine z_1 na forma trigonométrica, <u>sem recorrer à calculadora</u>.

b) Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-i\, z_2)^n = -1$.

(1ª fase)

57. Seja k um número real, e $z_1 = (k - i)\,(3 - 2i)$ um número complexo. Qual é o valor de k, para que z_1 seja um número imaginário puro?

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

(2ª fase)

58. Na figura 3, está representada uma região do plano complexo. O ponto A tem coordenadas (2, –1). Qual das condições seguintes define em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região sombreada, incluindo a fronteira?

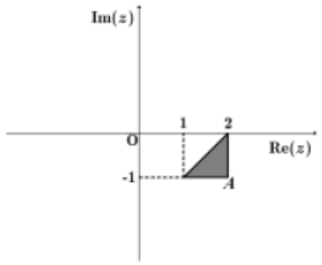


Fig. 3

(A) $|z-1| \geq |z-(2-i)| \wedge Re(z) \leq 2 \wedge Im(z) \geq -1$
(B) $|z-1| \leq |z-(2-i)| \wedge Re(z) \leq 2 \wedge Im(z) \geq -1$
(C) $|z+1| \geq |z-(2+i)| \wedge Re(z) \leq 2 \wedge Im(z) \geq -1$
(D) $|z-1| \geq |z-(2-i)| \wedge Im(z) \leq 2 \wedge Re(z) \geq -1$

(2ª fase)

59. No conjunto dos números complexos, seja $z = \frac{(cis\frac{\pi}{7})^7 + (2+i)^3}{4cis\frac{3\pi}{2}}$. Determine z na forma algébrica, sem recorrer à calculadora.

(2ª fase)

60. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w, cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto A, situado no 1.º quadrante. Sejam os pontos B e C, respectivamente, as imagens geométricas de $\overline{w}$ (conjugado de w) e de (–w) .
Sabe-se que $\overline{BC} = 8$ e que |w|=5. Determine a área do triângulo [ABC] .

(2ª fase)

$\boxed{E_8}$. Seja θ um número real pertencente ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$. Considere o número complexo $z = i \cdot cis(\theta)$. Qual dos números complexos seguintes é o conjugado de z ?

(A) $cis(-\frac{\pi}{2} - \theta)$ (B) $cis(\frac{\pi}{2} - \theta)$

(C) $cis(\frac{\pi}{2} + \theta)$ (D) $cis(\frac{3\pi}{2} + \theta)$

(Época especial)

$\boxed{E_9}$ Considere, em $\mathbb{C}$, o número complexo $w = 2cis(\frac{\pi}{6})$. No plano complexo, a imagem geométrica de w é um dos vértices do quadrado [ABCD], com centro na origem O, representado na figura 2. Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice D do quadrado?

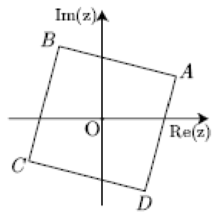


Fig. 2

(A) $2cis(\frac{3\pi}{2})$ (B) $2cis(\frac{7\pi}{4})$ (C) $2cis(\frac{11\pi}{6})$ (D) $2cis(\frac{5\pi}{3})$

(Época especial)

$\boxed{E_{10}}$ Considere, em $\mathbb{C}$, o número complexo $z_1 = 3 - 2i$. Determine, <u>sem recorrer à calculadora</u>, o número complexo $z = \frac{z_1 + z_1^2 + 2i^{43}}{8cis\frac{3\pi}{2}}$. Apresente o resultado na forma algébrica.

(Época especial)

$\boxed{E_{11}}$ Determine o valor de θ, pertencente ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, de modo que a imagem geométrica do número complexo $(2cis\theta)^2 \times (1 + \sqrt{3}\, i)$ pertença à bissectriz do 3.º quadrante.

(Época especial)

(*Teste intermédio e Exames Nacionais 2010*)

61. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária. Determine $\frac{(1+2i)(3+i)-i^6+i^7}{3i}$, sem recorrer à calculadora. Apresente o resultado na forma $x+yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

(Intermédio 3)

62. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3cis(\frac{\pi}{8} - \theta)$. Para qual dos valores seguintes de θ podemos afirmar que z é um número imaginário puro?

(A) $-\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{5\pi}{8}$

(1ª fase)

63. Na Figura 3, está representada, no plano complexo, a sombreado, parte do semiplano definido pela condição Re(z) > 3

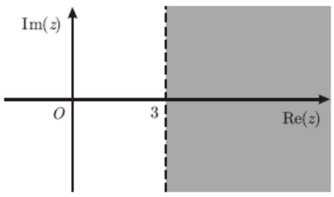


Figura 3

Qual dos números complexos seguintes tem a sua imagem geométrica na região representada a sombreado?

(A) $\sqrt{3}cis\frac{\pi}{6}$ (B) $3\sqrt{3}cis\frac{\pi}{6}$ (C) $\sqrt{3}cis\frac{\pi}{2}$ (D) $3\sqrt{3}cis\frac{\pi}{2}$

(1ª fase)

64. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = cis\frac{\pi}{7}$ e $z_2 = 2+i$. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine o número complexo $w = \frac{3-i\times(z_1)^7}{z_2}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

b) Mostre que $\left|z_1 + z_2\right|^2 = 6 + 4\cos\frac{\pi}{7} + 2sen\frac{\pi}{7}$

(1ª fase)

65. A Figura 2 representa um pentágono [ABCDE] no plano complexo. Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo w

O vértice A tem coordenadas (1, 0). Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice D do pentágono?

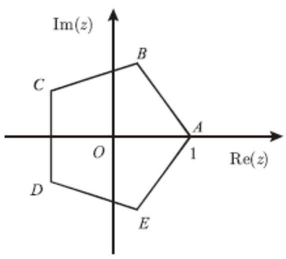


Figura 2

(A) $5cis\frac{6\pi}{5}$ (B) $cis\frac{6\pi}{5}$ (C) $cis(-\frac{\pi}{5})$ (D) $cis\frac{\pi}{5}$

(2ª fase)

66. Seja w o número complexo cuja imagem geométrica está representada na Figura 3. A qual das rectas seguintes pertence a imagem geométrica de w^6 ?

(A) Eixo real
(B) Eixo imaginário
(C) Bissectriz dos quadrantes ímpares
(D) Bissectriz dos quadrantes pares

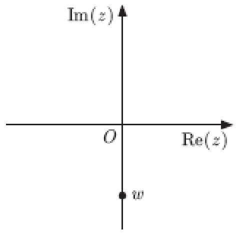


Figura 3

(2ª fase)

67. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}$ e $z_2 = 3$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine o número complexo $w = \frac{z_1{}^4+4i}{i}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

b) Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1

(2ª fase)

$\boxed{E_{12}}$ Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : i \times (z + \bar{z}) = 0\}$

Qual das rectas seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto A?

(A) o eixo real
(B) o eixo imaginário
(C) a bissectriz dos quadrantes pares
(D) a bissectriz dos quadrantes ímpares

(Época especial)

$\boxed{E_{13}}$ Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, os pontos P, Q, R, S e T. O ponto P é a imagem geométrica de um número complexo z. Qual dos pontos seguintes, representados na Figura 2, é a imagem geométrica do número complexo $-i \times z$?

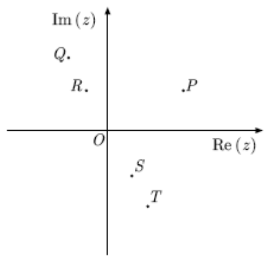


Figura 2

(A) Q (B) R (C) S (D) T

(Época especial)

$\boxed{E_{14}}$ Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = \frac{(-1-i)^8}{(cis\frac{\pi}{8})^2} \times cis\frac{5\pi}{2}$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Verifique que $z = 16cis\frac{\pi}{4}$

b) Determine a área do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z

(Época especial)

(*Teste intermédio e Exames Nacionais 2011*)

68. Na Figura 2, está representada, no plano complexo, uma circunferência de centro na origem O do referencial. Os pontos A, B e C pertencem à circunferência. O ponto A é a imagem geométrica do número complexo 3+4i
O ponto C pertence ao eixo imaginário.

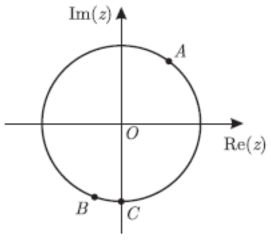


Figura 2

O arco BC tem $\frac{\pi}{9}$ radianos de amplitude.

Qual é o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto B?

(A) $5cis\,\frac{10\pi}{9}$ (B) $5cis\,\frac{25\pi}{18}$

(C) $7cis\,\frac{10\pi}{9}$ (D) $7cis\,\frac{25\pi}{18}$

(Intermédio 2)

69. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Considere a equação $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$

Esta equação tem três soluções em $\mathbb{C}$, sendo uma delas o número real 1. As imagens geométricas, no plano complexo, dessas três soluções são vértices de um triângulo. Determine o perímetro desse triângulo. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

(Intermédio 2)

70. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4

Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$?

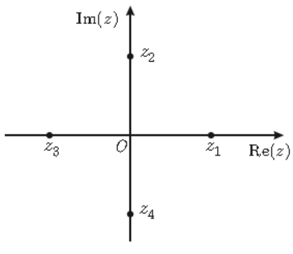


Figura 3

(A) z_1 (B) z_2
(C) z_3 (D) z_4

(1ª fase)

71. Na Figura 4, está representado, no plano complexo, a sombreado, um sector circular. Sabe-se que:

- o ponto A está situado no 1.º quadrante;
- o ponto B está situado no 4.º quadrante;
- [AB] é um dos lados de um polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 5 do complexo $32cis\,\frac{\pi}{2}$
- o arco AB está contido na circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$. Qual dos números seguintes é o valor da área do sector circular AOB ?

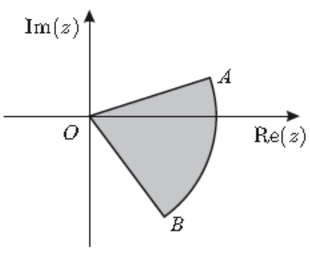


Figura 4

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{4\pi}{5}$ (C) $\frac{2\pi}{5}$ (D) $\frac{8\pi}{5}$

(1ª fase)

72. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = 1$, $z_2 = 5i$ e $z_3 = cis\left(\frac{n\pi}{40}\right)$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) O complexo z_1 é raiz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$

Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio. Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

b) Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

(1ª fase)

73. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, a sombreado, um sector circular. Sabe-se que:

- o ponto A é a imagem geométrica do número complexo $-\sqrt{3} + i$
- o ponto B tem abcissa negativa, ordenada nula, e pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$

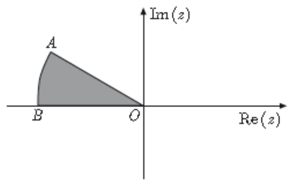


Figura 3

Qual das condições seguintes define, em $\mathbb{C}$, a região a sombreado, incluindo a fronteira?

(Considere como arg(z) a determinação que pertence ao intervalo [0, 2π [)

(A) $|z| \leq 2 \ \wedge \ \frac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$

(B) $|z| \leq 2 \ \wedge \ \frac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

(C) $|z| \leq 4 \ \wedge \ \frac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$

(D) $|z| \leq 4 \ \wedge \ \frac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

(2ª fase)

74. Na Figura 4, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de seis números complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6. Qual é o número complexo que pode ser igual a $(z_2 + z_4) \times i$?

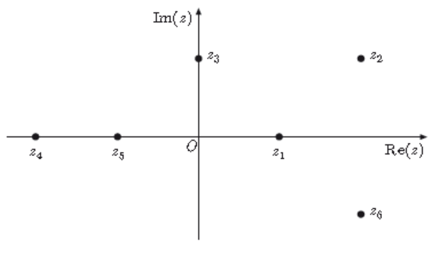


Figura 4

(A) z_1 (B) z_3 (C) z_5 (D) z_6

(2ª fase)

75. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Resolva os dois itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

a) Considere $z_1 = 1+2i$ e $w = \dfrac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}cis\frac{5\pi}{4}}$ com $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

Determine o valor de b para o qual w é um número real.

b) Seja z um número complexo tal que $|z| = 1$. Mostre que $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$

(2ª fase)

E15. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 8cis\frac{\pi}{6}$. Qual dos números complexos seguintes é uma das raízes de índice seis de z ?

(A) $\sqrt{2}cis\frac{25\pi}{36}$ (B) $\sqrt{2}cis(-\frac{\pi}{36})$

(C) $2\sqrt{2}cis\frac{25\pi}{36}$ (D) $2\sqrt{2}cis(-\frac{\pi}{36})$

(1.ª fase especial)

E16 Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, seis pontos, M, N, P, Q, R e S. Sabe-se que:

• o ponto M é a imagem geométrica do número complexo $z_1 = 2 + i$

• o ponto N é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$. Qual dos pontos seguintes pode ser a imagem geométrica do número complexo z_2 ?

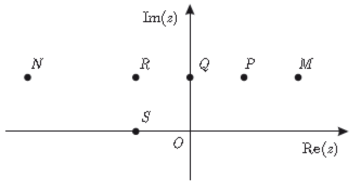


Figura 2

(A) ponto P (B) ponto Q (C) ponto R (D) ponto S

(1.ª fase especial)

E17 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Seja w o número complexo com coeficiente da parte imaginária positivo que é solução da equação $z^2 + z + 1 = 0$. Determine $\frac{1}{w}$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

b) Seja z um número complexo. Mostre que $(\bar{z} + i)(z - i) = |z-i|^2$, para qualquer número complexo z

(1.ª fase especial)

E18 Sejam k e p dois números reais e sejam $z_1 = (3k + 2) + p\,i$ e $z_2 = (3p - 4) + (2 - 5k)i$ dois números complexos. Quais são os valores de k e de p para os quais z_1 é igual ao conjugado de z_2 ?

(A) $k = -1$ e $p = 3$ (B) $k = 1$ e $p = 3$

(C) $k = 0$ e $p = -2$ (D) $k = 1$ e $p = -3$

(Época especial)

E19 Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w. No plano complexo, a imagem geométrica de w é o vértice A do octógono [ABCDEFGH], representado na Figura 3. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 8 de um certo número complexo.

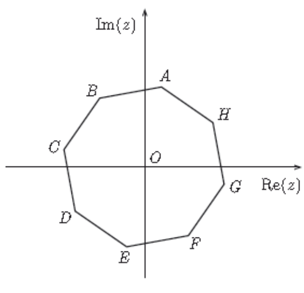


Figura 3

Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice C do octógono [ABCDEFGH] ?

(A) $-w$ (B) $w + 1$ (C) $i \times w$ (D) $i^3 \times w$

(Época especial)

E20 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Considere $z_1 = 2 + \sqrt{3}i + i^{4n+2014}$, $n \in \mathbb{N}$

Sabe-se que z_1 é uma das raízes cúbicas de um certo complexo z. Determine z. Apresente o resultado na forma algébrica.

b) Considere $z_2 = cis\frac{\pi}{4}$. No plano complexo, a região definida pela condição

$\left|z - z_2\right| \leq 1 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi \wedge |z| \geq \left|z - z_2\right|$ está representada geometricamente numa das opções I, II, III e IV, apresentadas a seguir.

(Considere como arg(z) a determinação que pertence ao intervalo $]0, 2\pi]$)

Sabe-se que, em cada uma das opções:

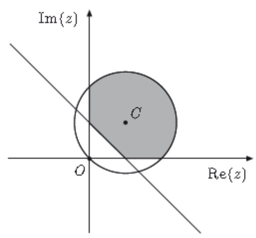
• O é a origem do referencial;

• C é a imagem geométrica de z_2

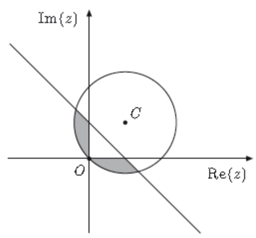
• $\overline{OC}$ é o raio da circunferência.

Apenas uma das opções está correcta.

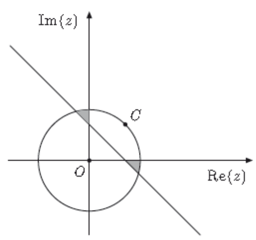
I



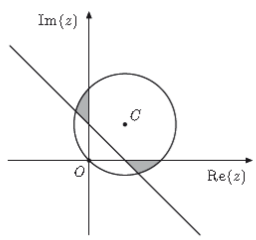
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:

• indique a opção correcta;

• apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

(Época especial)

(*Teste intermédio e Exames Nacionais 2012*)

76. Na Figura 1, está representado, no plano complexo, o triângulo equilátero [OPQ] de altura $\sqrt{3}$. Tal como a figura sugere, o vértice O coincide com a origem do referencial, o vértice P pertence ao eixo imaginário e o vértice Q pertence ao 3.º quadrante. Seja z o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto Q. Qual é a representação trigonométrica do número complexo z ?

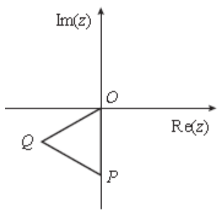


Figura 1

(A) $3cis\frac{7\pi}{6}$ (B) $3cis\frac{4\pi}{3}$ (C) $2cis\frac{7\pi}{6}$ (D) $2cis\frac{4\pi}{3}$

(Intermédio 2)

77. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária. Para um certo número inteiro k, a expressão $\frac{(\sqrt{2}\ i)^3 \times cis\frac{\pi}{4}}{k+i}$ designa um número real. Determine esse número k

(Intermédio 2)

78. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4

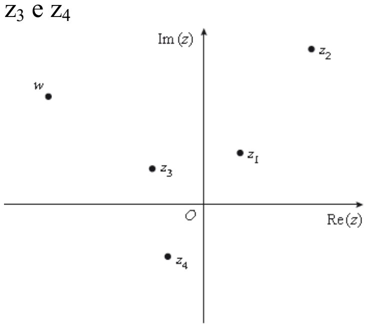


Figura 3

Qual é o número complexo que pode ser igual a $\frac{w}{3i}$?

(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

(1.ª fase)

79. Na Figura 4, está representada, a sombreado, no plano complexo, parte de uma coroa circular. Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- o ponto Q é a imagem geométrica do complexo $-1 + i$
- a reta PQ é paralela ao eixo real;
- as circunferências têm centro na origem;
- os raios das circunferências são iguais a 3 e a 6

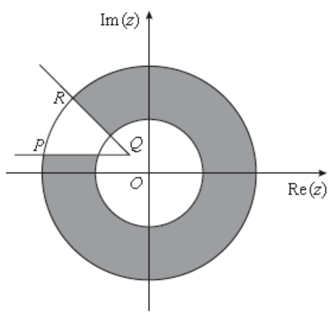


Figura 4

Considere como arg(z) a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$. Qual das condições seguintes pode definir, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região a sombreado, incluindo a fronteira?

(A) $3 \leq |z| \leq 6 \ \wedge \ -\pi \leq \arg(z-1+i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(B) $9 \leq |z| \leq 36 \ \wedge \ -\pi \leq \arg(z+1-i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(C) $3 \leq |z| \leq 6 \ \wedge \ -\pi \leq \arg(z+1-i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(D) $9 \leq |z| \leq 36 \ \wedge \ -\pi \leq \arg(z-1+i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(1.ª fase)

80. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = (-2+i)^3$ e $z_2 = \frac{1+28i}{2+i}$

a) Resolva a equação $z^3 + z_1 = z_2$, sem recorrer à calculadora. Apresente as soluções da equação na forma trigonométrica.

b) Seja w um número complexo não nulo. Mostre que, se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z, então $z = 1$ ou $z = -1$

(1.ª fase)

81. Seja k um número real, e sejam $z_1 = 2+i$ e $z_2 = 3-ki$ dois números complexos. Qual é o valor de k para o qual $z_1 \times \overline{z_2}$ é um imaginário puro?

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) 6

(2.ª fase)

82. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, um polígono regular [ABCDEFGHI]. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z. O vértice A tem coordenadas (0, –3). Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice F ?

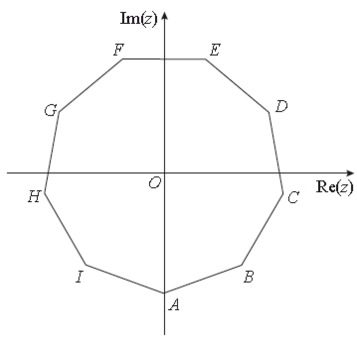


Figura 3

(A) $3cis\frac{7\pi}{18}$ (B) $3cis\frac{11\pi}{18}$ (C) $3cis\frac{2\pi}{3}$ (D) $3cis\frac{5\pi}{9}$

(2.ª fase)

83. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

a) Seja n um número natural. Determine $\frac{\sqrt{3} \times i^{4n-6} + 2cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2cis\frac{\pi}{5}}$, sem recorrer à calculadora. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

b) Seja $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que $z_1 = cis\ \alpha$ e $z_2 = cis\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$. Mostre, analiticamente, que a imagem geométrica de $z_1 + z_2$, no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

(2.ª fase)

$\boxed{E_{21}}$ Sejam k e p dois números reais tais que os números complexos $z = 1 + i$ e $w = (k - 1) + 2p\, i^{11}$ sejam inversos um do outro. Qual é o valor de k + p ?

(A) $-\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{7}{4}$

(Época especial)

$\boxed{E_{22}}$ Na Figura 2, estão representadas, no plano complexo, uma circunferência, de centro na origem e de raio 1, e uma reta r, definida por Re (z) $= \frac{1}{2}$. Seja z_1 o número complexo cuja imagem geométrica está no 1.º quadrante e é o ponto de intersecção da circunferência com a reta r. Qual das opções seguintes apresenta uma equação de que z_1 é solução?

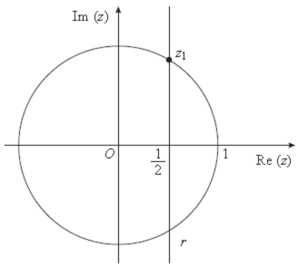


Figura 2

(A) $|z - 1| = |z - i|$ (B) $\mathrm{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\left| z - \frac{1}{2} \right| = 1$ (D) $|1 - z| = \sqrt{2}$

(Época especial)

$\boxed{E_{23}}$ Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

a) Considere o número complexo $z = 8\sqrt{3} - 8i$. Determine as raízes de índice 4 de z. Apresente as raízes na forma trigonométrica.

b) Seja *w* um número complexo não nulo. Mostre que, se o conjugado de *w* é igual a metade do inverso de *w*, então a imagem geométrica de *w* pertence à circunferência de centro na origem e de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(Época especial)

(Teste intermédio e Exames Nacionais 2013)

84. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja z = cis θ, em que θ é um número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$. Seja $w = z^2 - 2$. A que quadrante do plano complexo pertence a imagem geométrica de w ?
(A) Primeiro quadrante. (B) Segundo quadrante.
(C) Terceiro quadrante. (D) Quarto quadrante.

(Intermédio 2)

85. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária. Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Determine o valor de $\frac{i^6+2i^7}{2-i}$. Apresente o resultado na forma algébrica.

b) Mostre que o número $2cis\,\frac{\pi}{10}$ é solução da equação

$z^6 \times \overline{z} = 128i$

(Intermédio 2)

86. Na Figura 1, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos: w_1, w_2, w_3 e w_4. Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2}$?
(A) w_1 (B) w_2
(C) w_3 (D) w_4

(1.ª fase)

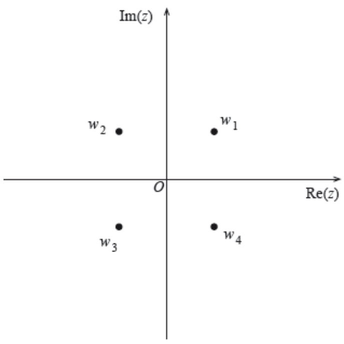


Figura 1

87. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = -8 + 6i$ e $w = \frac{-i \times z^2}{z}$. Seja α um argumento do número complexo z. Qual das opções seguintes é verdadeira?
(A) $w = 10cis(3\alpha - \frac{\pi}{2})$ (B) $w = 2cis(3\alpha - \frac{\pi}{2})$
(C) $w = 10cis(\alpha - \frac{\pi}{2})$ (D) $w = 2cis(\alpha - \frac{\pi}{2})$

(1.ª fase)

88. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2} + 2cis\,\frac{3\pi}{4}$ e $z_2 = 1 + i$

a) Sabe-se que $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de um certo número complexo w. Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

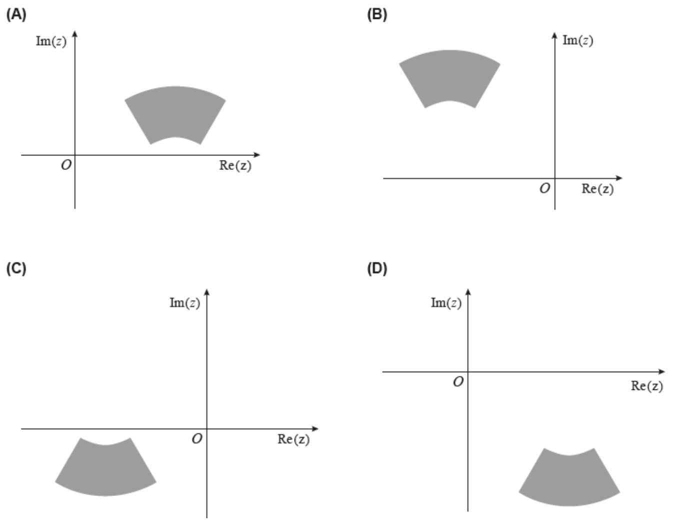
b) Seja z_3 = cis α. Determine o valor de α pertencente ao intervalo]−2π,−π[, sabendo que $z_3 + \overline{z}_2$ é um número real.

(1.ª fase)

89. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, z = 2 + bi, com b < 0. Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Qual dos números complexos seguintes pode ser o conjugado de z ?
(A) $\frac{3}{2}\,cis(\alpha)$ (B) $3cis(-\alpha)$
(C) $3cis(\alpha)$ (D) $\frac{3}{2}\,cis(-\alpha)$

(2.ª fase)

90. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição
$$\frac{3}{2} \le |z - 3 + i| \le 3 \ \wedge\ \frac{\pi}{3} \le \arg(z - 3 + i) \le \frac{2\pi}{3}$$
Considere como arg(z) a determinação que pertence ao intervalo [−π,π]. Qual das opções seguintes pode representar, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição dada?



(2.ª fase)

91. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

a) Considere $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22}$ e $z_2 = \frac{-2}{iz_1}$. Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural n tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

b) Seja α∈[−π,π[. Mostre que
$$\frac{\cos(\pi - \alpha) + i\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha} = cis(\pi - 2\alpha)$$

(2.ª fase)

$\boxed{\text{E24}}$ Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = (1+i)^{2013}$. A qual dos conjuntos seguintes pertence w ?
(A) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > |z-1|\}$
(B) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le \sqrt{2}\}$
(C) $\{z \in \mathbb{C} : z = \overline{z}\}$
(D) $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = \text{Im}(z)\}$

(Época especial)

E25 Na Figura 1, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas dos números complexos: z, z_1, z_2, z_3 e z_4

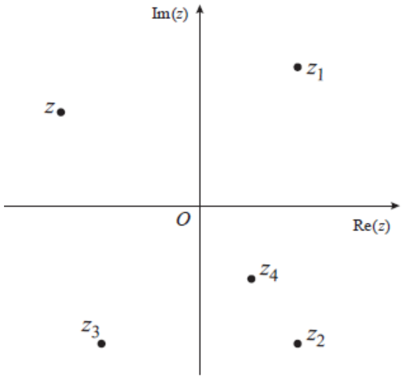


Figura 1

Sabe-se que w é um número complexo tal que $z = i \times \overline{w}$

Qual é o número complexo que pode ser igual a w?

(A) z_4 (B) z_3 (C) z_2 (D) z_1

(Época especial)

E26 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+2i\,cis\frac{5\pi}{6}}$ e $z_2 = \sqrt{2}cis\,\dfrac{\pi}{12}$

a) Seja $z = cis\theta$, com θ pertencente a $[0,2\pi[$. Determine θ de modo que $\frac{z}{z_1}$ seja um número real negativo, sem utilizar a calculadora.

b) As imagens geométricas de z_2 e do seu conjugado, $\overline{z_2}$, são vértices consecutivos de um polígono regular. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w. Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora. Comece por calcular n.

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2014*)

92. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, um polígono regular [ABCDEF]. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das n raízes de índice n de um número complexo z. O vértice C tem coordenadas $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice E?

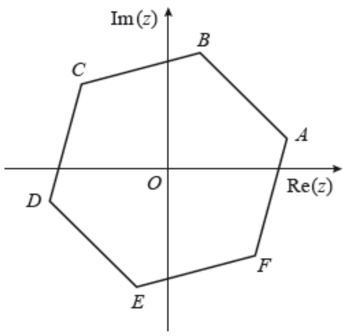


Figura 2

(A) $2\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{13}{12}\pi\right)$ **(B)** $4\ \text{cis}\left(\frac{13}{12}\pi\right)$

(C) $2\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{17}{12}\pi\right)$ **(D)** $4\ \text{cis}\left(\frac{17}{12}\pi\right)$

(1.ª fase)

93. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

a) Considere $z_1 = \frac{(-1+\sqrt{3}i)^3}{1-i}$ e z_2 = cis α, com α ∈ [0,π[. Determine os valores de α, de modo que $z_1 \times (z_2)^2$ seja um número imaginário puro, sem utilizar a calculadora.

b) Seja z um número complexo tal que $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 \leq 10$. Mostre que $|z| \leq 2$

(1.ª fase)

94. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, duas semirretas $\dot{O}A$ e $\dot{O}B$ e uma circunferência de centro C e raio $\overline{BC}$.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- o ponto A é a imagem geométrica do complexo $\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$

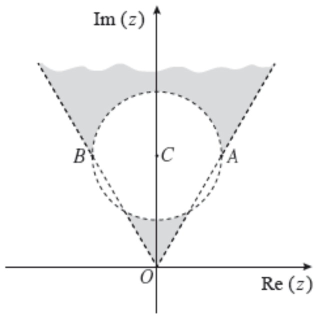


Figura 3

- o ponto B é a imagem geométrica do complexo $-\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$
- o ponto C é a imagem geométrica do complexo 2i

Considere como arg(z) a determinação que pertence ao intervalo [−π,π[. Qual das condições seguintes define a região sombreada, excluindo a fronteira?

(A) $|z-2i| < \frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$

(B) $|z-2i| < \frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}$

(C) $|z-2i| > \frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}$

(D) $|z-2i| > \frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$

(2.ª fase)

95. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

a) Considere $z = 2cis(\frac{\pi}{6})$ e $w = \frac{(z-i)^4}{1+zi}$. No plano complexo, seja O a origem do referencial. Seja A a imagem geométrica do número complexo $\bar{z}$ e seja B a imagem geométrica do número complexo w. Determine a área do triângulo [AOB], sem utilizar a calculadora.

b) Seja α∈]0,π[. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 2\cos\alpha z + 1 = 0$. Apresente as soluções, em função de α, na forma trigonométrica.

(2.ª fase)

E27 Na Figura 2, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4. Qual é o número complexo que pode ser igual a $-2iw$?

(A) z_1 (B) z_2

(C) z_3 (D) z_4

(Época especial)

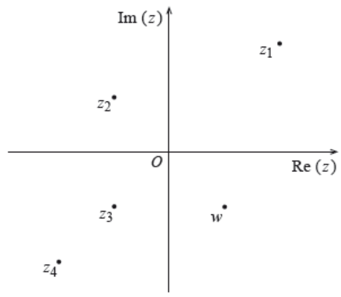


Figura 2

E28 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora.

a) Considere $z_1 = \frac{1-i}{2i} - i^{-1}$ e $z_2 = cis(-\frac{\pi}{4})$. Averigue se a imagem geométrica do complexo $(z_1)^4 \times \bar{z}_2$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

a) Considere o número complexo $w = \text{sen}(2\alpha) + 2i\cos^2\alpha$, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Escreva w na forma trigonométrica.

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2015*)

96. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$|z+4-4i|=3 \ \wedge\ \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

No plano complexo, esta condição define uma linha. Qual é o comprimento dessa linha?

(A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π

(1.ª fase)

97. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z=\frac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta}$$

Determine os valores de θ pertencentes ao intervalo]0,2π[, para os quais z é um número imaginário puro. Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

(1.ª fase)

98. Na Figura 1, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero [OAB]. Sabe-se que:

• o ponto O é a origem do referencial;

• o ponto A pertence ao eixo real e tem abcissa igual a 1

• o ponto B pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um complexo z

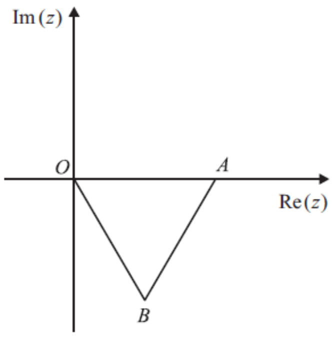


Figura 1

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $z=\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{11\pi}{6}$ **(B)** $z=\operatorname{cis}\frac{11\pi}{6}$

(C) $z=\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$ **(D)** $z=\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$

(2.ª fase)

99. Em C, conjunto dos números complexos, seja

$$z_1=\frac{-1+i}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}}$$

Determine os números complexos z que são solução da equação $z^4=\overline{z_1}$, sem utilizar a calculadora. Apresente esses números na forma trigonométrica.

(2.ª fase)

E29 Na Figura 2, está representado, no plano complexo, um quadrado cujo centro coincide com a origem e em que cada lado é paralelo a um eixo. Os vértices deste quadrado são as imagens geométricas dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4. Qual das afirmações seguintes é falsa?

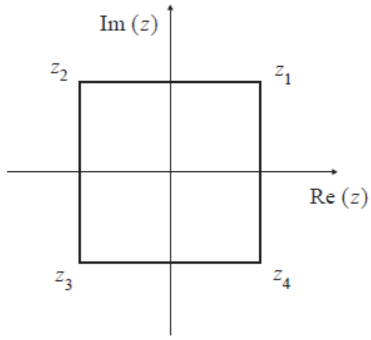


Figura 2

(A) $|z_3-z_1|=|z_4-z_2|$ **(B)** $z_1+z_4=2\operatorname{Re}(z_1)$

(C) $\frac{z_4}{i}=z_1$ **(D)** $-\overline{z_1}=z_2$

(Época especial)

E30 Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$$z_1=(1+i)^6 \quad \text{e} \quad z_2=\frac{8i}{\operatorname{cis}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}$$

Sabe-se que as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial. Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de n.

(Época especial)

Soluções: 1. B 2. 1±i√3; √2-√2i 3. B 4. |z|<1 ∧ π/2 <arg(z)<π 5. B 6. |z|=√2/2 7. D 8. √3 +i
9. A 10. 3; 3º 11.B 12. 6i; |z|<2∧π/3<arg(z)<11π/15 13. D 14. {3;-4i;-3}; 2-i 15. A
16. 6+8i; não 17. A 18. –4;2+2√2 19. B 20. -2√3+2i 21. B 22. –2 e 2; 5π/4 23. A 24. 2*i*; |z-2+2*i*|=3√2
25. B 26. 3*i* 27. C 28. $\sqrt[4]{2}$ cis π/12, $\sqrt[4]{2}$ cis 7π/12, $\sqrt[4]{2}$ cis 13π/12, $\sqrt[4]{2}$ cis 19π/12; -2+4*i* 29. C 30. √8 cis(5π/4)
32. B 33. -24-5*i* ; 5cis(π/2-α) 34. C 35. √2/2 cis(π/4) 36. A 37. –1-√3/3 *i* 38. D 39. √2 cis(–π/4); 3π/16
40. A 41. 25cis(π/7); √3+*i* 42. D 43. π/6 44. A 45. 3π/2+α; –48+12*i* 46. B 47. B 48. 4
49. D 50. A 51. 4/5-2*i*/5; √2 cis(5π/4) 52. A 53. 3*i* 54. C 55. C 56. √2/2cis(π/4); 3 57. C 58. A
59. -11/4+1/4 *i* 60. 24 61. 2–2/3 *i* 62. D 63. B 64. √2cis π/4 65. B 66. A 67. 4√2cis π/4; |z–3| = √5
68. B 69. 4+2√5 70. B 71. B 72. $4cis(-\frac{\pi}{2})$ e $4cis\,\frac{\pi}{2}$; 30 73. B 74. C 75. 3 76. C 77. –1
78. A 79. C 80. {2cis0; $2cis\,\frac{2\pi}{3}$; $2cis\,\frac{4\pi}{3}$ } 81. D 82. B 83. ½ cis(13π/10) 84. C 85. –*i* 86. C 87. A
88. -1; -3π/2 89. C 90. A 91. 6 92. D 93. π/8 e 5π/8 94. C 95. 9/2; cisα e cis(-α) 96. C 97. 3π/4 e 7π/4
98. D 99. cis(-π/6), cis(π/3), cis(5π/6), cis(4π/3)
E1. C E2. 2 E3. D E4. $\sqrt[3]{2}cis\,\frac{11\pi}{9}$; $\frac{3\pi}{2}$ E5. A E6. C E7. ¼ cis(π/4); 32 E8. A E9. D E10. 2+*i* E11. 11π/24
E12. B E13. D E14. 8 E15. A E16. C E17. cis(–2π/3) E18. B E19. C E20. –8; IV E21. D E22. B
E23. { $2cis\,\frac{11\pi}{24}$; $2cis\,\frac{23\pi}{24}$; $2cis\,\frac{35\pi}{24}$; $2cis\,\frac{47\pi}{24}$ } E24. D E25. C E26. 11π/6; -64 E27. D E28. sim; 2cosα cis(π/2-α)
E29. C E30. 10

O professor: RobertOliveira