Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática – 12.º ano

Trigonometria – alguns exercícios saídos em exames

(*Exames Nacionais 1997-1999*)

5. Seja s a função definida em R por $s(x) = \begin{cases} sen x \; se \; x < \pi \\ x - \pi \; se \; x \geq \pi \end{cases}$.

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira:

(A) s é descontínua em x=π

(B) s tem um mínimo relativo para x=π

(C) s tem um máximo relativo para x=π

(D) s tem derivada em x=π

(Modelo 97)

6. Uma função real de variável real f é tal que f(0)=1. Indique qual das seguintes expressões pode definir a função f:

(A) $\dfrac{x+2}{x-1}$ (B) $\dfrac{\ln x}{x+1}$

(C) tg(3x+π/2) (D) $2^{\text{sen } x}$

(2ªchamada 97)

11. Considere a função g definida em [0,π] por g(x)=sen x + sen (2x).

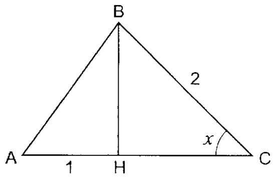
$\boxed{sen(2x)=2senxcosx}$

a) Determine os zeros da função g.

b) Estude, quanto à existência de assímptotas, a função h definida em [0,π]\{π/2} por h(x)=g(x)/cos x

c) Mostre que, para qualquer x∈]0,π/2[, g(x) é a área de um triângulo [ABC], em que

x é amplitude do ângulo BCA;



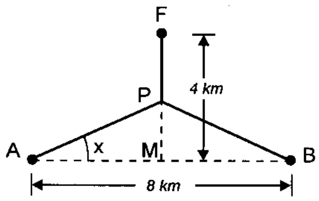
$\overline{BC}=2$;

[BH] é a altura relativa ao vértice B;

$\overline{AH}=1$.

(Modelo 98)

12. Duas povoações, A e B, distanciadas 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F. Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura abaixo. A canalização é formada por 3 canos: um que vai da fonte F até um ponto P e 2 que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B.



Tem-se ainda que: o ponto M, ponto médio de [AB], dista 4 km de F; x é a amplitude do ângulo PAM (x $\in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$).

a) Tomando para unidade o km, mostre que o comprimento total da canalização é dado por $g(x) = 4 + \frac{8-4senx}{\cos x}$ (sugestão: comece por mostrar que $\overline{PA} = \dfrac{4}{\cos x}$ e que $\overline{FP} = 4 - 4tgx$)

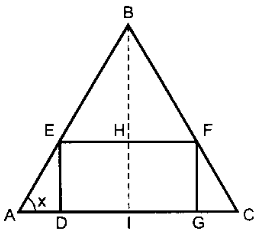
b) Calcule g(0) e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

c) Determine o valor de x para o qual o comprimento total da canalização é mínimo.

(1ªchamada 98)

16. Na figura, o triângulo [ABC] é isósceles ($\overline{AB} = \overline{BC}$); [DEFG] é um rectângulo, $\overline{DG} = 2$ e $\overline{DE} = 1$; x designa a amplitude do ângulo BAC.

a) Mostre que a área do triângulo [ABC], é dada em função de x, por f(x)= 2 + tgx + $\dfrac{1}{tgx}$ (x $\in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$)



$\boxed{cos(2x)=cos^2x-sen^2x}$

(Nota: pode ser-lhe útil reparar que $B\hat{E}F = B\hat{A}C$)

b) Mostre que f ´(x) = $-\dfrac{\cos(2x)}{sen^2 x \cos^2 x}$

c) Determine o valor de x para a qual a área do triângulo [ABC] é mínima.

(2ªfase 98)

(*Exames Nacionais 2000*)

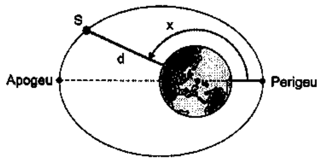
23. No presente ano civil, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente, por f(n)=12,2+2,64 sen $\frac{\pi(n-81)}{183}$, n∈{1,2,3,...,366} (o argumento da função seno está expresso em radianos).

a) No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às 6 e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondado às unidades).

Notas: recorde que, no presente ano, o mês de Fevereiro teve 29 dias; sempre que, nos cálculos, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

b) Em alguns dias do ano, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é superior a 14,7 horas. Recorrendo à sua calculadora, determine em quantos dias do ano é que isso acontece. Indique como procedeu. (1ªchamada)

24. Um satélite S tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura. Tenha em atenção que os elementos nela desenhados não estão na mesma escala. Na elipse, estão assinalados 2 pontos: o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra; o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra.

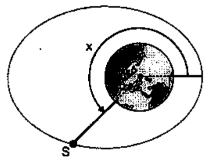


O ângulo x, assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra; o seu lado origem passa no *perigeu*, o seu lado extremidade passa no satélite e a sua amplitude está compreendida entre 0 e 360 graus. A distância d, em km, do satélite ao centro da Terra, é dada por

$d=\frac{7820}{1+0{,}07\cos x}$. Considere que a Terra é uma esfera de raio 6378 km.

a) Determine a altitude do satélite (distância à superfície da Terra) quando este se encontra no *apogeu*. Apresente o resultado em km, arredondado às unidades.

b) Num certo instante, o satélite está na posição indicada na figura.
A distância do satélite ao centro da terra é, então, de 8200 km. Determine o valor de x, em graus, arredondado às unidades.



(2ªchamada)

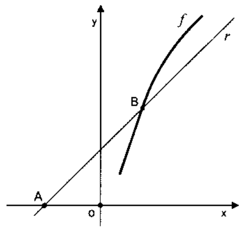
26. Considere a função f, de domínio R, definida por f(x)=2x-cos x

a) Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, 1 zero, no intervalo $]0,\pi[$.

b) Seja f ' a função derivada de f. Mostre que f '(x)>0, $\forall x\in$R, e justifique que o zero de f, cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

c) Na figura abaixo estão representadas: parte do gráfico da função f; parte de uma recta r, cuja inclinação é 45^0, que contém o ponto A(-3,0) e que intersecta o gráfico da função f no ponto B.

Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo [AOB], onde O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades.

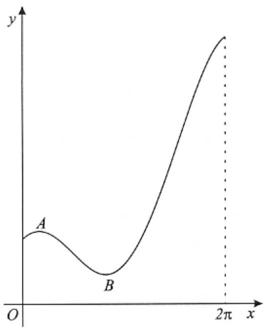


(2ªfase)

(*Exames Nacionais 2001*)

32. Na figura está representado o gráfico da função f, de domínio $[0,2\pi]$, definida por f(x)=x+2cosx

A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de f.



32.1. Sem recorrer à calculadora, resolva as 2 alíneas seguintes.

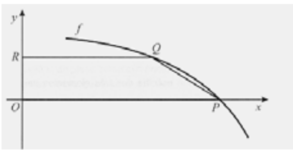
a) Mostre que a ordenada do ponto A é $\frac{\pi+6\sqrt{3}}{6}$ e que a do ponto B é $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{6}$. b) Qual é o contradomínio de f?

32.2. Considere a recta tangente ao gráfico de f no ponto A. Esta recta intersecta o gráfico num outro ponto C. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa do ponto C (apresente o resultado arredondado às décimas). Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

(2ª chamada)

33. Considere a função f, de domínio $]-\pi,\pi[$, definida por $f(x)=\frac{\cos x}{1+\cos x}$. Sem recorrer à calculadora, resolva as 3 alíneas seguintes.

a) Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.



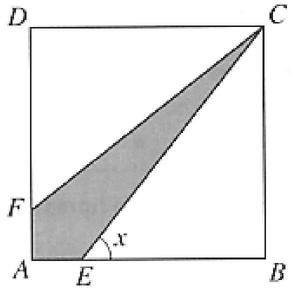
b) Mostre que a função f tem um máximo e determine-o.

c) Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, uma parte do gráfico da função f. Na mesma figura está também representado um trapézio [OPQR]. O ponto O é a origem do referencial, e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy, respectivamente. Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f. Sabendo que o ponto R tem ordenada 1/3, determine a área do trapézio.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2002*)

34. Na figura está representado um quadrado [ABCD], de lado 1.



O ponto E desloca-se sobre o lado [AB], e o ponto F desloca-se sobre o lado [AD], de tal forma que se tem sempre $\overline{AE} = \overline{AF}$. Para cada posição do ponto E, seja x a amplitude do ângulo BEC (x∈]π/4,π/2[).

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva as 3 alíneas seguintes:

a) Mostre que o perímetro do quadrilátero [CEAF] é dado, em função de x, por $f(x) = 2 - \frac{2}{tgx} + \frac{2}{senx}$.

b) Calcule $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

c) Mostre que $f\,'(x) = \frac{2-2\cos x}{sen^2 x}$ e estude a função quanto à monotonia.

(1ª chamada)

36. De uma função f, de domínio [-π,π], sabe-se que a sua derivada f ´ está definida igualmente no intervalo [-π,π] e é dada por f ´(x)=x+2cos x

a) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as 2 alíneas seguintes:

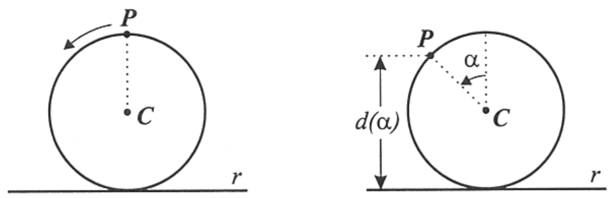
a1) Determine o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.

a2) Estude a função f quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão.

b) O gráfico de f contém um único ponto onde a recta tangente é paralela ao eixo Ox. Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto. Explique como procedeu.

(2ª chamada)

37. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma recta r. Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se à distância de 2 unidades da recta r.



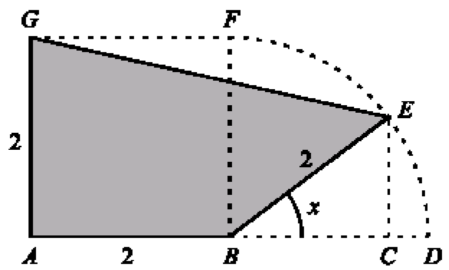
Seja d(α) a distância de P a r, após uma rotação de amplitude α. Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer nº real positivo α?

(A) d(α)=1+cosα (B) d(α)=2+senα
(C) d(α)=1-cosα (D) d(α)=2-senα

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2003*)

39. Na figura está representado a sombreado um polígono [ABEG].



Tem-se que: [ABFG] é um quadrado de lado 2; FD é um arco de circunferência de centro em B; o ponto E move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento [BD], de tal forma que se tem sempre [EC]⊥[BD]; x designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBE, $x \in [0,\pi/2]$

a) Mostre que a área do polígono [ABEG] é dada, em função de x, por A(x)=2(1+sen$x$+cos$x$)

Sugestão: pode ser-lhe útil considerar o trapézio [ACEG]

b) Determine A(0) e A(π/2). Interprete geometricamente cada um dos valores obtidos.

c) Recorra à calculadora para determinar graficamente as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Quais são os valores de x para os quais a área do polígono [ABEG] é 4,3?

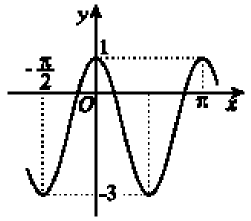
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente os valores pedidos na forma de dízima, arredondados às décimas.

(1ª chamada)

40. Considere a expressão f(x)=*a*+*b*sen²x. Sempre que se atribui um valor real a *a* e um valor real a *b*, obtemos uma função de domínio R.

a) Nesta alínea, considere *a*=2 e *b*= -5. Sabe-se que tgθ=1/2. Sem recorrer à calculadora, calcule f(θ).

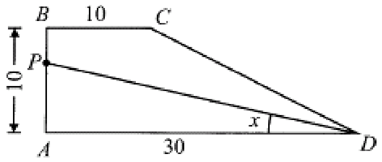
b) Para um certo valor de a e um certo valor de b, a função f tem o seu gráfico parcialmente representado na figura junta.



Conforme essa figura sugere, tem-se: o contradomínio de f é [-3,1]; 0 e π e são maximizantes; -π/2 e π/2 são minimizantes. Determine a e b.

(2ª chamada)

41. Na figura está representado um trapézio rectângulo [ABCD], cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento.



Considere que um ponto P se desloca sobre o lado [AB]. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PDA. Pretende-se determinar o valor de x para o qual o segmento [PD] divide o trapézio em 2 figuras com a mesma área. Qual das equações seguintes traduz este problema?

(A) $\frac{30^2 \operatorname{sen} x}{2} = 100$ (B) $\frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2} = 100$

(C) $\frac{30 \times 10 \operatorname{sen} x}{4} = 150$ (D) $\frac{30 \times 10 \operatorname{tg} x}{4} = 150$

(2ª fase)

42. Considere a função f, de domínio [-π/2,3π/2], definida por f(x)=x+sen x. Sem recorrer à calculadora, resolva as 3 alíneas seguintes.
a) Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule f ´(0).
b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
c) Determine os valores de x, pertencentes ao intervalo [-π/2,3π/2], tais que f(x)=x + cos x.

(2ª fase)

43. A Rita está a participar num concurso de lançamentos de papagaios de papel. No regulamento do concurso, estão as condições de apuramento para a final, que se reproduzem a seguir.

Após um certo instante, indicado pelo júri:
- o papagaio não pode permanecer no ar mais do que um minuto;
- o papagaio tem de permanecer, pelo menos durante 12 segundos seguidos, a uma altura superior a 10 metros;
- o papagaio tem de ultrapassar os 20 metros de altura.

Admita que a distância, em metros, do papagaio da Rita ao solo, t segundos após o instante indicado pelo júri, é dado por $d(t)=9{,}5+7\operatorname{sen}(t^2/200)+5\cos(t/4)$
(os argumentos das funções seno e co-seno estão expressos em radianos). Note-se que, a partir do instante em que o papagaio atinge o solo, a distância deixa de ser dada por esta expressão, uma vez que passa a ser (naturalmente) igual a zero.
Deverá a Rita ser apurada para a final? Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, com cerca de 10 linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2004*)

44. A figura 1 representa um depósito de forma cilíndrica, que contém um certo volume de um combustível.

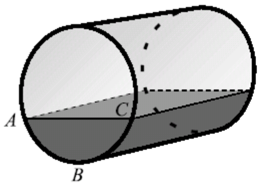


Figura 1

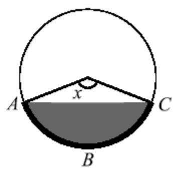


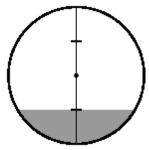
Figura 2

Admita que a função V, de domínio [0,2π], definida por $V(x)=80(x-\operatorname{sen}x)$, dá o volume, em metros cúbicos, de combustível existente no depósito, em função da amplitude x, em radianos, do arco ABC (que, como se sabe, é igual à amplitude do ângulo ao centro correspondente, assinalado na figura 2).

a) Qual é a capacidade total do depósito, em metros cúbicos? Apresente o resultado arredondado às unidades.
Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

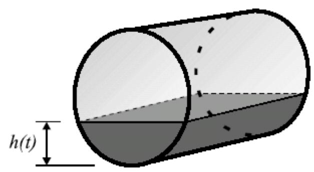
b) Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: *Qual terá de ser a amplitude, em radianos, do arco ABC, para que existam 300 m^3 de combustível no depósito?*
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s).
Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

c) Determine, em metros cúbicos, o volume do combustível existente no depósito, no momento em que a sua altura é ¼ da altura máxima.



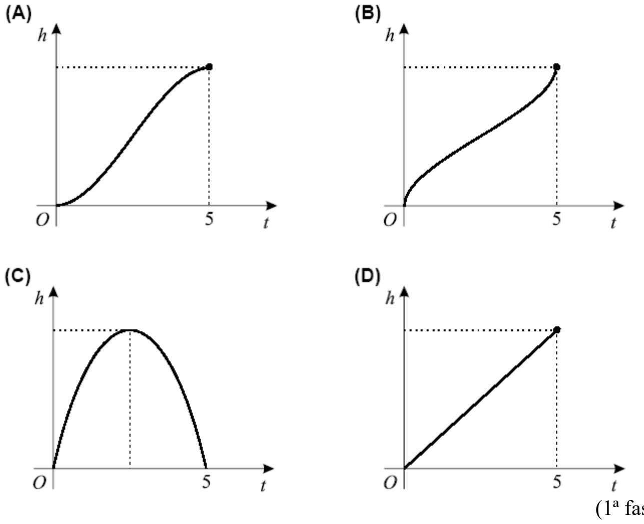
Apresente o resultado arredondado às unidades.
Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

d) Admita agora que o depósito está vazio e que, num certo instante, se começa a introduzir combustível a uma taxa constante, até ficar cheio, o que acontece ao fim de cinco horas.
Seja h(t) a altura do combustível no depósito, t horas após o instante em que começa a ser introduzido.



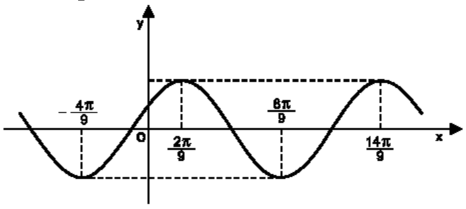
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h?

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, indique as razões que o levam a rejeitar os restantes gráficos (indique três razões, uma por cada gráfico rejeitado).



(1ª fase)

45. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.



Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?

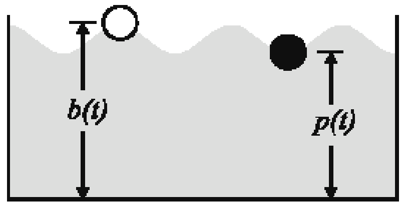
(A) $\pi/9$ (B) $2\pi/9$ (C) $2\pi/3$ (D) $4\pi/3$

(2ª fase)

46. Duas bolas de plástico com o mesmo raio, uma branca e outra preta, flutuam na superfície de um líquido contido num recipiente.

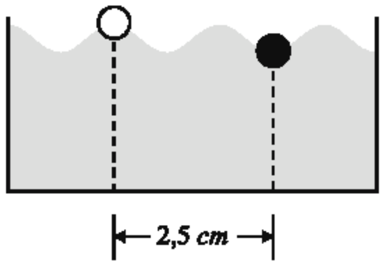
Por acção de uma força exterior, o líquido perdeu o estado de repouso em que se encontrava, tendo a distância de cada uma das bolas à base do recipiente deixado de ser constante. Designando por b(t) e p(t) as distâncias, em cm, dos centros das bolas (branca e preta, respectivamente) à base do recipiente, t segundos após o início da perturbação, admita que se tem: $b(t)=10+e^{-0,1t}\text{sen}(\pi t)$, $t\geq 0$

$p(t)=10-1{,}37e^{-0,1t}\text{sen}(\pi t)$, $t\geq 0$



a) Sem recorrer à calculadora, resolva o seguinte problema: Durante os primeiros cinco segundos após o início da perturbação (instantes 0 e 5 incluídos), houve alguns instantes em que as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente. Quantas vezes isso aconteceu?

b) Determine a distância que vai do centro da bola branca ao centro da bola preta, meio segundo após o início da perturbação, sabendo que, nesse instante, a distância entre as respectivas projecções horizontais (na base do recipiente) é de 2,5 cm. Apresente o resultado em cm, arredondado às décimas.



Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2005*)

47. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

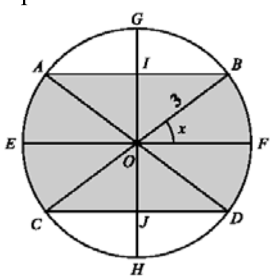
f(x) = cos x. Qual das expressões seguintes dá a derivada de *f*, no ponto π?

(A) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{x-\pi}$ (B) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-\pi}{x}$

(C) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x}{x-\pi}$ (D) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x+\pi}$

(1ªfase)

48. Na figura está representada uma circunferência com centro no ponto O e raio 3. Os diâmetros [EF] e [GH] são perpendiculares.



Considere que o ponto B se desloca sobre o arco FG.

Os pontos A, C e D acompanham o movimento do ponto B, de tal forma que: as cordas [AB] e [CD] permanecem paralelas a [EF]; [AD] e [BC] são sempre diâmetros da circunferência.

Os pontos I e J também acompanham o mesmo movimento, de tal forma que são sempre os pontos de intersecção de [GH] com [AB] e [CD], respectivamente. Para cada posição do ponto B, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo FOB ($x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$).

a) Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por $A(x)=18(x+\text{sen}\,x\cdot\cos x)$

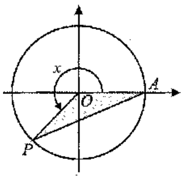
Sugestão: use a decomposição sugerida na figura.

b) Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: Qual é o valor de x para o qual a área da região sombreada é igual a metade da área do círculo?

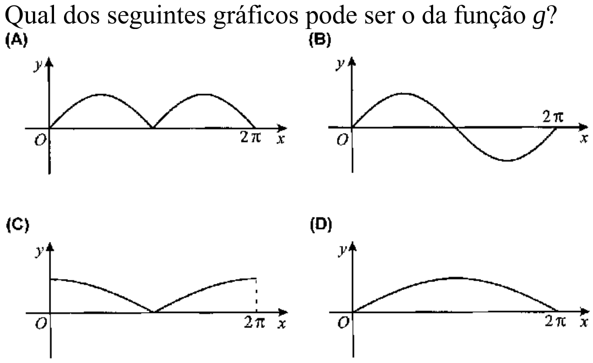
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

(1ªfase)

49. Na figura junta está representado o círculo trigonométrico.



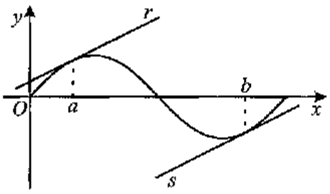
Considere que um ponto P parte de A(1,0) e se desloca sobre uma circunferência, dando uma volta completa, em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é a semi-recta $\dot{O}A$ e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}P$ ($x \in [0, 2\pi]$). Seja *g* a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área da região sombreada (região limitada pelo segmentos de recta [OP], [PA] e [AO]). Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função *g*?



(2ªfase)

50. Seja *f* a função, de domínio [0,2π], definida por *f*(x)=sen x

a) Na figura estão representados: o gráfico da função *f*; duas rectas, *r* e *s*, tangentes ao gráfico de *f*, nos pontos de abcissa *a* e *b*, respectivamente.

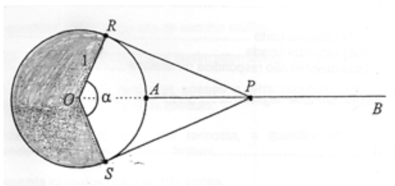


Prove que, se *a*+*b*=2π, então as rectas *r* e *s* são paralelas.

b) Sem recorrer à calculadora, estude, quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, a função *g*, de domínio]0,2π[\{π, definida por $g(x) = \frac{x}{f(x)}$

(2ªfase)

$\boxed{\text{E1.}}$ Na figura estão representadas uma semi-recta $\dot{A}B$ e uma circunferência de centro O e raio 1 (os pontos O, A e B são colineares; o ponto A pertence à circunferência).



Considere que um ponto P se desloca ao longo da semi-recta $\dot{A}B$, nunca coincidindo com o ponto A.

Os pontos R e S acompanham o movimento do ponto P, de tal forma que as rectas PR e PS são sempre tangentes à circunferência, nos pontos R e S, respectivamente. Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo SOR (α∈]0,π[).

a) Mostre que a área do quadrilátero [ORPS] é dada, em função de α, por $f(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

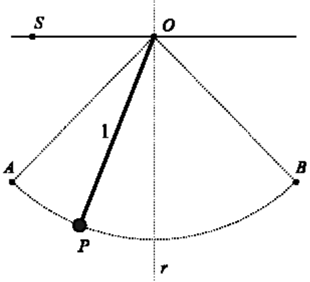
b) Calcule $\lim_{\alpha \to \pi^-} f(\alpha)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

c) Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução que lhe permite resolver o seguinte problema: Qual é o valor de α para o qual a área do quadrilátero [ORPS] é igual à área da região sombreada? Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às décimas.

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2006*)

51. Na figura está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto O.



O centro da esfera oscila entre os pontos A e B, que são simétricos relativamente à recta vertical *r*. A recta *r* passa pelo ponto O e é perpendicular à recta OS. No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto A.

Admita que, *t* segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto P tal que a amplitude, em radianos, do ângulo SOP é dada (aproximadamente) por $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos(\sqrt{9,8}\,t)$

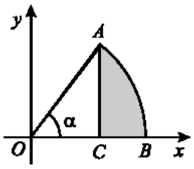
Nas duas alíneas seguintes, não utilize a calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.

a) Determine a distância do centro da esfera à recta OS, no instante inicial.

b) Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na recta *r*. Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

(1ªfase)

52. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco AB, que está contido na circunferência de equação $x^2+y^2=1$.



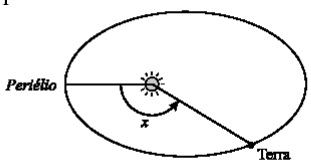
O ponto C pertence ao eixo Ox e o segmento de recta [AC] é perpendicular a este eixo. α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB. Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α?

(A) $\pi\times\alpha+\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha$ (B) $\pi\times\alpha+\operatorname{sen}\alpha+1-\cos\alpha$

(C) $1+\alpha-\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha$ (D) $1+\alpha+\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha$

(2ªfase)

53. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.



Na figura está assinalado um ângulo de amplitude *x* radianos ($x \in [0,2\pi[$) . Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra. A distância , em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de *x*, por

$d = 149{,}6(1-0{,}0167\cos x)$

a) Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

b) Sabe-se que *x* verifica a relação

$\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\operatorname{sen} x$, em que

• *t* é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo *x*;

• *T* é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (365,24 dias).

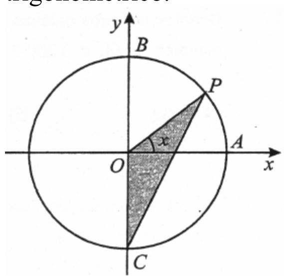
b_1) Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$. Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

b_2) Sabe-se que a última passagem da Terra pelo *periélio* ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

(2ªfase)

E2. Na figura junta, está representado o círculo trigonométrico.



Os pontos A, B e C têm coordenadas (1,0), (0,1) e (0,–1), respectivamente. O ponto P desloca-se ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto B. Para cada posição do ponto P, seja *x* a amplitude do ângulo AOP, e seja f(*x*) a área do triângulo [OPC]. Qual das expressões seguintes define a função f?

(A) $\frac{\operatorname{sen} x}{2}$ (B) $\frac{\cos x}{2}$ (C) $\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{2}$ (D) $\frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{2}$

(Época especial)

(Exames Nacionais 2007)

54. Considere as funções *f* e *g*, definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^{x-1}$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. Considere ainda a função *h*, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = f'(x) - g'(x)$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

a) Mostre que a função *h* tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0,\frac{\pi}{2}[$

b) Tendo em conta a), justifique que existe $a \in]0,\frac{\pi}{2}[$ tal que as rectas tangentes aos gráficos de *f* e *g*, nos pontos de abcissa *a*, são paralelas.

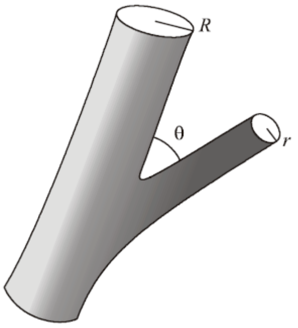
(1ªfase)

55. Seja $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 3-2\cos x$. Indique o valor de *x* para o qual *f*(*x*) é máximo.

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

(2ªfase)

56. Na figura seguinte está representada uma artéria principal do corpo humano, cuja secção é um círculo com raio R, e uma sua ramificação, mais estreita, cuja secção é um círculo com raio r.

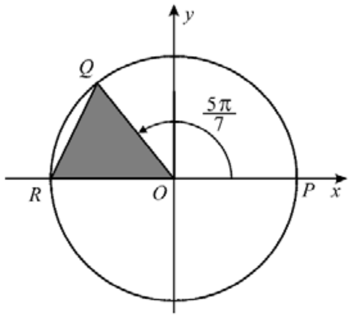


A secção da artéria principal tem área A e a da ramificação tem área *a*. Seja $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ a amplitude, em radianos, do ângulo que a artéria principal faz com a sua ramificação (medida relativamente a duas geratrizes complanares dos dois cilindros). Sabe-se que $a = A\sqrt{\cos\theta}$. Admitindo que o modelo descrito se adequa com exactidão à situação real, determine θ no caso em que os raios referidos verificam a relação $R = \sqrt[4]{2}\ r$

(Exame Nacional 2ª fase 2007)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2008*)

57. Na figura está representado o círculo trigonométrico.



Tal como a figura sugere, *O* é a origem do referencial, Q pertence à circunferência, P é o ponto de coordenadas (1,0) e R é o ponto de coordenadas (–1,0). A amplitude, em radianos, do ângulo POQ é $\frac{5\pi}{7}$. Qual é o valor, arredondado às centésimas, da área do triângulo [OQR]?

(A) 0,39 (B) 0,42 (C) 0,46 (D) 0,49

(Intermédio 2)

58. Seja *f* a função de domínio $[-\pi, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-4x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{3\,\text{sen}\,(x)}{x^2} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Estude a função *f* quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados, escrevendo as suas equações, caso existam.

(1ªfase)

60. Considere a função *g*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2 + sen(4x)$. Resolva, <u>usando métodos analíticos</u>, os dois itens seguintes.

<u>Nota</u>: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

a) Determine $g'(0)$, recorrendo à <u>definição de derivada</u> de uma função num ponto.

b) Estude a monotonia da função *g*, no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

(2ªfase)

$\boxed{\text{E5}}$ Seja a função *f*, de domínio [0, π], definida por $f(x) = 2sen(x) \cdot \cos(x) + 2$. O gráfico da função *f* intersecta a recta y = 1 num só ponto. Determine, <u>recorrendo exclusivamente a métodos analíticos</u>, as coordenadas desse ponto.

(Época especial)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2009*)

62. Na figura 3 estão representados: • uma circunferência de centro *O* e raio 1; • dois pontos, *A* e *B*, sobre a circunferência, tais que [*AB*] é um diâmetro; • uma semi-recta $\dot{O}A$; • um segmento de recta [*PQ*]

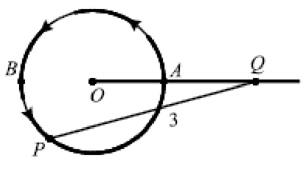


Figura 3

Considere que:

• o ponto *P*, partindo de *A*, se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado pelas setas da figura 3

• o ponto *Q* se desloca sobre a semi-recta $\dot{O}A$, acompanhando o movimento do ponto *P*, de tal forma que se tem sempre $\overline{PQ} = 3$

Para cada posição do ponto *P*, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem a semi-recta $\dot{O}A$ e por lado extremidade a semi-recta $\dot{O}P$ (ver figura 4). Seja *d* a função que, a cada valor de *x* pertencente a [0,2π], associa a distância, *d*(*x*), do ponto *Q* ao ponto *O*.

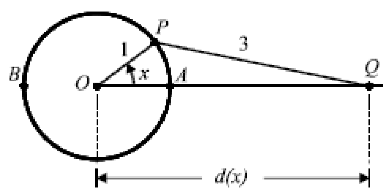


Figura 4

a) Considere as seguintes afirmações sobre a função *d* e sobre a sua derivada, *d’* (a função *d* tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio).

I. $d(0) = 2d(\pi)$

II. $\forall x \in [0, 2\pi], d'(x) < 0$

Elabore uma pequena composição na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira, ou falsa.

Nota: neste item, não defina analiticamente a função *d*; a sua composição deve apoiar-se na forma como esta função foi apresentada (para cada valor de *x*, tem-se que *d*(*x*) é a distância do ponto *Q* ao ponto *O*).

b) Defina analiticamente a função *d* no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ (isto é, determine uma expressão que dê o valor de *d*(*x*), para cada *x* pertencente a este intervalo).

Sugestão: trace a altura do triângulo [*OPQ*] relativa ao vértice *P*, designe por *R* o ponto de intersecção desta altura com a semi-recta $\dot{O}A$, e tenha em conta que $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ}$.

(Intermédio 3)

63. Para um certo número real positivo *k* , é contínua a função *f*, de domínio R, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_2 (k+x) & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{sen(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de *k*?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(1ª fase)

64. Na figura 1, está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1. Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência. Qual das expressões seguintes representa, em função de *x*, a área da parte sombreada?

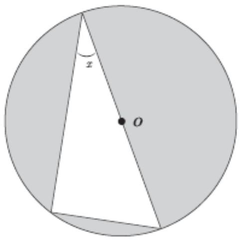


Fig. 1

(A) $\pi - sen(2x)$

(B) $\frac{\pi}{2} - sen(2x)$ (C) $\pi - 2sen(2x)$ (D) $\pi - \frac{sen(2x)}{4}$

(1ª fase)

65. Seja *f* a função, de domínio $[0, \frac{\pi}{2}]$, definida por $f(x) = sen(2x) \cos x$.

a) Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de *f*, no ponto de abcissa 0.

b) No domínio indicado, determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo [ABC], em que:

- A é o ponto do gráfico da função *f* cuja ordenada é máxima;
- B e C são os pontos de intersecção do gráfico da função *f* com a recta de equação *y* = 0,3 .

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial. Desenhe o triângulo [ABC], assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

(2ª fase)

E7 Seja a função *f*, de domínio [0,π[, definida por $f(x) = e^x \cdot \cos x$.

a) Estude, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, a função *f*, quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e, caso existam, os extremos relativos.

b) Determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, um valor, aproximado às décimas, da área do trapézio [OABC], em que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de intersecção do gráfico da função *f* com o eixo O*y*;
- B é o ponto do gráfico de *f*, tal que a recta AB é paralela ao eixo O*x*;
- C é o ponto de intersecção do gráfico da função *f* com o eixo O*x*.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico visualizado na calculadora, incluindo o referencial. Desenhe o trapézio [OABC] , assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

(Época especial)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2010*)

66. Na figura 2, está representado um triângulo rectângulo [ABC], cujos catetos, [AB] e [BC], medem 5 unidades. Considere que um ponto P se desloca sobre o cateto [BC], nunca coincidindo com B nem com C. Para cada posição do ponto P, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo BAP ($x \in]0, \frac{\pi}{4}[$). Seja *f* a função que, a cada valor de *x*, faz corresponder o perímetro do triângulo [APC]. Resolva os itens a) e b), usando exclusivamente métodos analíticos.

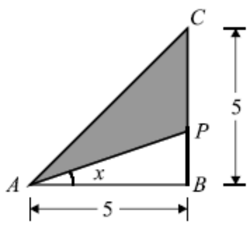


Figura 2

a) Mostre que $f(x) = \frac{5}{\cos x} - 5tgx + \sqrt{50} + 5$

b) Seja *r* a recta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$. Determine o declive da recta *r*

c) Existe um valor de *x* para o qual o perímetro do triângulo [APC] é igual a 16. Determine esse valor, arredondado às centésimas, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora. Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o ponto relevante para a resolução do problema.

(Intermédio 3)

67. Considere a função *f* , de domínio]−∞,2π], definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{x - \text{sen}(2x)}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Prove que a recta de equação $y=ax+b$, com $a \neq 0$, é uma assimptota oblíqua do gráfico de *f*

b) Determine o valor de *b*, de modo que *f* seja contínua em $x = 0$

(1ª fase)

69. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera. A Figura 6 e a Figura 7 representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas. Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.

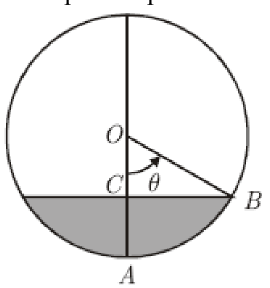


Figura 6

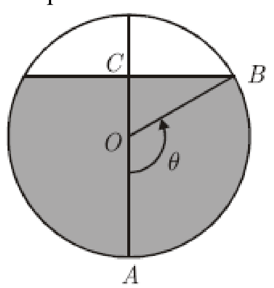


Figura 7

Sabe-se que:
• o ponto O é o centro da esfera;
• a esfera tem 6 metros de diâmetro;
• a amplitude θ, em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente.

A altura $\overline{AC}$, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ , por *h*, de domínio [0,π].
Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $h(\theta) = 3 - 3\cos\theta$, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$

b) Resolva a condição $h(\theta) = 3$, $\theta \in]0, \pi[$. Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

(2ª fase)

E8 Considere a função *f*, de domínio]0,π[, definida por $f(x) = \ln x \times \cos x$. Sabe-se que:
• O é a origem do referencial;
• A é o ponto de intersecção do gráfico da função *f* com o eixo *Ox*, que se situa mais próximo da origem O;
• B é o ponto de intersecção do gráfico da função *f* com a recta bissectriz dos quadrantes pares.

Determine a área do triângulo [OAB], recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Na sua resposta, deve:
• reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar as coordenadas dos pontos A e B, arredondando às milésimas as coordenadas do ponto B ;
• desenhar o triângulo [OAB], assinalando os pontos que representam os seus vértices;
• apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

(Época especial)

E9 Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, *t* horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2\cos(\frac{\pi}{6}t) + 8$, em que $t \in [0, 24]$. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine a profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia.

b) Determine, recorrendo ao estudo da função derivada, a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

(Época especial)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2011*)

70. Seja *f* a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{e\,x-e} & \text{se } 0<x<1 \\ x\,e^{-x}+2x & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Averigúe se a função *f* é contínua em $x = 1$

b) O gráfico da função *f* tem uma assimptota oblíqua. Determine a equação reduzida dessa assimptota.

c) Resolva, no intervalo $[1,+\infty[$, a equação $\dfrac{f(x)}{x}=e^x-\dfrac{2}{3}$

(Intermédio 3)

71. Na Figura 3, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1.

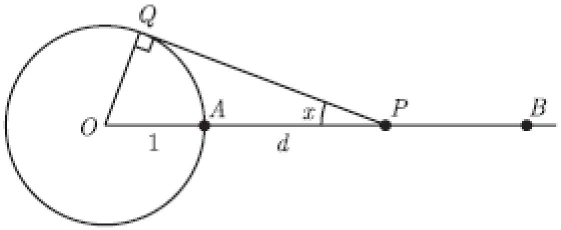


Figura 3

Sabe-se que:

• o ponto A pertence à circunferência;

• os pontos O, A, e B são colineares;

• o ponto A está entre o ponto O e o ponto B

• o ponto P desloca-se ao longo da semi-recta $\dot{A}B$, nunca coincidindo com o ponto A

• *d* é a distância do ponto A ao ponto P

• para cada posição do ponto P, o ponto Q é um ponto da circunferência tal que a recta PQ é tangente à circunferência;

• *x* é a amplitude, em radianos, do ângulo OPQ ($x\in]0,\frac{\pi}{2}[$)

Seja *f* a função, de domínio $]0,\frac{\pi}{2}[$, definida por $f(x)=\dfrac{1-sen x}{sen x}$. Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Mostre que $d = f(x)$

b) Considere a seguinte afirmação: «Quanto maior é o valor de *x*, menor é o valor de *d*»

Averigúe a veracidade desta afirmação, começando por estudar a função *f* quanto à monotonia.

(Intermédio 3)

72. Seja *f* a função, de domínio]0,3[, definida por $f(x)=x\ln x+sen(2x)$. O ponto A pertence ao gráfico da função *f*. Sabe-se que a recta tangente ao gráfico da função *f* no ponto A tem declive 3. Determine a abcissa do ponto A

Na resolução deste item deve:

• traduzir o problema por uma equação;

• resolver graficamente essa equação, recorrendo à calculadora;

• indicar o valor pedido arredondado às centésimas.

Deve reproduzir e identificar o gráfico, ou os gráficos, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, incluindo o referencial, e deve assinalar, no(s) gráfico(s), o(s) ponto(s) relevante(s).

(Intermédio 3)

74. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4\cos(2x)$. Sabe-se que:

• os vértices A e D do trapézio [ABCD] pertencem ao eixo Ox

• o vértice B do trapézio [ABCD] pertence ao eixo Oy

• o vértice D do trapézio [ABCD] tem abcissa $-\frac{\pi}{6}$

• os pontos A e C pertencem ao gráfico de *f*

• a recta CD é paralela ao eixo Oy

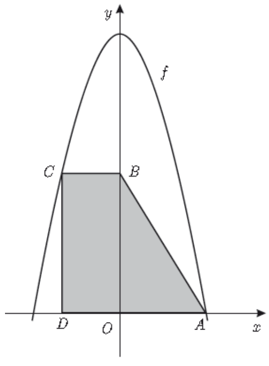


Figura 5

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine o valor exacto da área do trapézio [ABCD]

b) Seja f' a primeira derivada da função *f*, e seja f'' a segunda derivada da função *f*. Mostre que

$f(x)+f'(x)+f''(x)=-4(3\cos(2x)+2sen(2x))$,

para qualquer número real *x*

(1ª fase)

75. Para um certo número real positivo, k, a função g definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}x}{3x} & \text{se } x>0\\ \ln(k-x) & \text{se } x\leq 0\end{cases}$$

é contínua.

Qual é o valor de k ?

(A) $\sqrt[3]{e}$ (B) e^3 (C) $\frac{e}{3}$ (D) $3e$

(2ª fase)

76. Na Figura 2, está representado, num referencial o. n. xOy, o círculo trigonométrico.

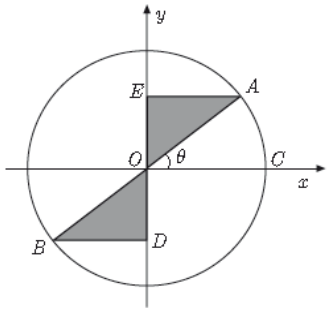


Figura 2

Sabe-se que:

• C é o ponto de coordenadas (1, 0)

• os pontos D e E pertencem ao eixo Oy

• [AB] é um diâmetro do círculo trigonométrico
• as rectas EA e BD são paralelas ao eixo Ox
• θ é a amplitude do ângulo COA
• $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Qual das expressões seguintes dá o perímetro da região sombreada na Figura 2?
(A) 2 (cos θ + senθ)   (B) cos θ + sen θ
(C) 2 (1 + cos θ + sen θ)   (D) 1 + cos θ + sen θ

(2ª fase)

77. Considere a função *f*, de domínio $]0, \frac{\pi}{2}[$, definida por
$f(x) = e^{2x} + \cos x - 2x^2$
Sabe-se que:
• B é um ponto do gráfico de *f*
• a recta de equação $y = 8x$ é paralela à recta tangente ao gráfico de *f* no ponto B
Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto B
Na sua resposta, deve:
• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

(2ª fase)

78. Para *a*, *b* e *n*, números reais positivos, considere a função *f*, de domínio ℝ, definida por $f(x) = a\cos(nx) + bsen(nx)$
Seja f'' a segunda derivada da função *f*. Mostre que $f''(x) + n^2 f(x) = 0$, para qualquer número real *x*

(2ª fase)

E11 De duas funções *f* e *g* sabe-se que:
• *f* tem domínio ℝ e é definida por $f(x) = \pi - 4\text{sen}(5x)$
• *g* tem domínio $]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$ e g', primeira derivada de *g*, tem domínio $]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$, $g'(x) = \log_2(-\frac{\pi}{6} - x)$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Calcule o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{f(x) - \pi}$

b) Estude a função *g* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$

Resolva o item c) recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

c) Seja *h* a função, de domínio $]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$
O ponto A pertence ao gráfico da função h
Sabe-se que a recta tangente ao gráfico da função *h* no ponto A é paralela ao eixo Ox
Determine a abcissa do ponto A.
Na sua resposta, deve:
• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar a abcissa do ponto com arredondamento às décimas.

(Época especial)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2012*)

79. Relativamente à Figura 2, sabe-se que:
- o segmento de reta [AC] tem comprimento 4
- o ponto B é o ponto médio de [AC]
- o segmento de reta [BD] é perpendicular a [AC]
- o arco de circunferência CD tem centro em B

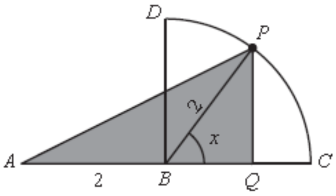


Figura 2

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco CD, nunca coincidindo com C nem com D, e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta [BC] de tal forma que [PQ] é sempre perpendicular a [BC]. Para cada posição do ponto P, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo CBP e seja *A*(*x*) a área do triângulo [APQ]. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $A(x) = 2 \text{ sen } x + \text{sen } (2x)$ ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Mostre que existe um valor de *x* para o qual a área do triângulo [APQ] é máxima.

(Intermédio 2)

80. Na Figura 5, está representado um trapézio retângulo [ABCD]
Sabe-se que:
- $\overline{BC} = 1$
- $\overline{CD} = 1$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC
- $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

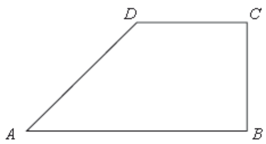


Figura 5

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que o perímetro do trapézio [ABCD] é dado, em função de α, por $P(\alpha) = 3 + \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$

b) Para um certo número real θ, tem-se que $tg\theta = -\sqrt{8}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Determine o valor exato de $P'(\theta)$

Comece por mostrar que $P'(\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{sen^2\alpha}$

(1ª fase)

81. Considere a função f , de domínio R, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, x}{1-\sqrt{1-x^3}} & \text{se } x < 0 \\ 1-e^{k+1} & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1-e^{4x}}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine *k*, de modo que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

b) Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

c) Seja *g* uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g' , de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por $g'(x) = f(x) - \frac{1}{x}$. Estude a função *g* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

(2ª fase)

82. Na Figura 4, está representado o quadrado [ABCD]
Sabe-se que:
- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
- *x* é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB
- $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$

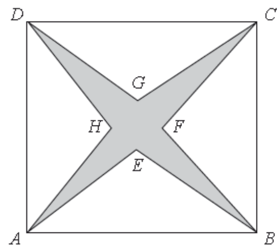


Figura 4

a) Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de *x*, por $a(x) = 16(1 - \text{tg } x)$

b) Mostre que existe um valor de *x* compreendido entre $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{5}$ para o qual a área da região sombreada é 5. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

(2ª fase)

$\boxed{\text{E12}}$ Considere as funções *f* e *g*, de domínio ℝ, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = -x + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ e^k - 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine *k* de modo que a função *g* seja contínua.

b) Determine, em]−2π,5π[, as soluções da equação $2f'(x) = (f(x) + x)^2 - 1$

(Época especial)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2013*)

83. Relativamente à Figura 1, sabe-se que:

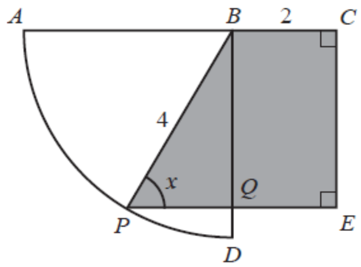


Figura 1

- o ponto B pertence ao segmento de reta [AC]
- os pontos A e D pertencem à circunferência que tem centro no ponto B e raio igual a 4
- o segmento de reta [BD] é perpendicular ao segmento de reta [AC]
- $\overline{BC} = 2$

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco AD, nunca coincidindo com A nem com D, e que um ponto E acompanha o movimento do ponto P de forma que o quadrilátero [PBCE] seja um trapézio retângulo. O ponto Q é a intersecção do segmento de reta [PE] com o segmento de reta [BD]. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo EPB e seja S(x) a área do trapézio [PBCE]

a) Mostre que S(x) = 8sen x + 4sen(2x) ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Estude a função S quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Na sua resposta, deve apresentar:
- o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
- os valores de x para os quais a função tem extremos relativos, caso existam.

(Intermédio 2)

84. Seja f a função, de domínio ℝ, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 - xe^x & \text{se } x < 0 \\ x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine $f'(\frac{\pi}{2})$ recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

b) O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$. Determine a equação reduzida dessa assíntota.

(Intermédio 2)

85. Seja f a função, de domínio ℝ\{0}, definida por

$f(x) = \frac{sen(-x)}{x}$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{n}$. Qual é o valor de lim f (x_n)?

(A) −1 (B) 0 (C) 1 (D) +∞

(1.ª fase)

86. Considere a função g, de domínio $]-\frac{\pi}{2}, 0[$;, definida por g(x) = sen(2x) − cos x. Seja *a* um número real do domínio de g. A reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa *a* é paralela à reta de equação $y = \frac{x}{2} + 1$. Determine o valor de *a*, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(1.ª fase)

87. Considere a função f , de domínio ℝ, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{3+x} + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1 - \sqrt{x} + \operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue se a função f é contínua em x = 1

b) Mostre que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para −∞

(2.ª fase)

88. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, o triângulo [OAB] e a reta r.

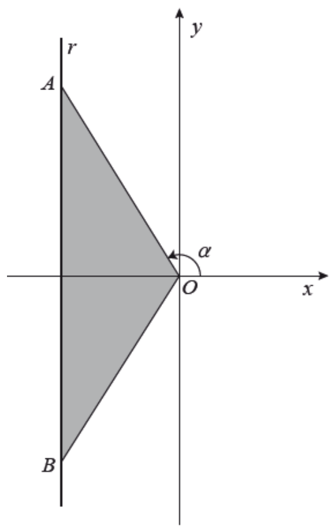


Figura 4

Sabe-se que:
- a reta r é definida por x = −3
- o ponto A pertence à reta r e tem ordenada positiva;
- o ponto B é o simétrico do ponto A em relação ao eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$
- a função P, de domínio $]\frac{\pi}{2}, \pi[$, é definida por $P(x) = -6tgx - \frac{6}{\cos x}$

a) Mostre que o perímetro do triângulo [OAB] é dado, em função de α, por P(α)

b) Determine o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, sem utilizar a calculadora.

(2.ª fase)

E13 Considere a função f, de domínio $]0,\pi[$, definida por $f(x) = \ln x + \cos x - 1$. Sabe-se que:

• A é um ponto do gráfico de f

• a reta tangente ao gráfico de f, no ponto A, tem inclinação $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;

• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

(Época especial)

E14 Na Figura 2, estão representados a circunferência de centro no ponto C e de raio 1, a semirreta $\dot{C}B$, a reta AD e o triângulo [ACE]

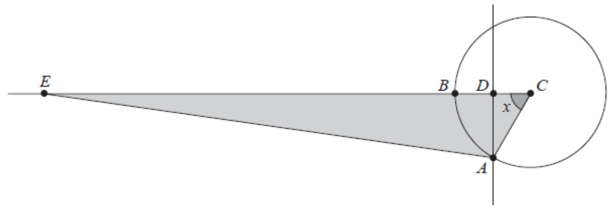


Figura 2

Sabe-se que:

• os pontos A e B pertencem à circunferência;

• os pontos D e E pertencem à semirreta $\dot{C}B$

• a reta AD é perpendicular à semirreta $\dot{C}B$

• o ponto A desloca-se sobre a circunferência, e os pontos D e E acompanham esse movimento de modo que $\overline{DE} = 6$

• x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACB

• $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

a) Mostre que a área do triângulo [ACE] é dada, em função de x, por $f(x) = 3sen x + \frac{1}{4} sen(2x)$

b) Mostre, sem resolver a equação, que f(x) = 2 tem, pelo menos, uma solução em $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$

(Época especial)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2014*)

89. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \cos^2(\frac{x}{12}) - sen^2(\frac{x}{12})$

Qual das expressões seguintes também define a função g ?

(A) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{24}\right)$ **(B)** $\cos\left(\frac{x}{24}\right)$

(C) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{6}\right)$ **(D)** $\cos\left(\frac{x}{6}\right)$

(Intermédio 2)

90. Na Figura 4, está representada uma planificação de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas laterais medem 4

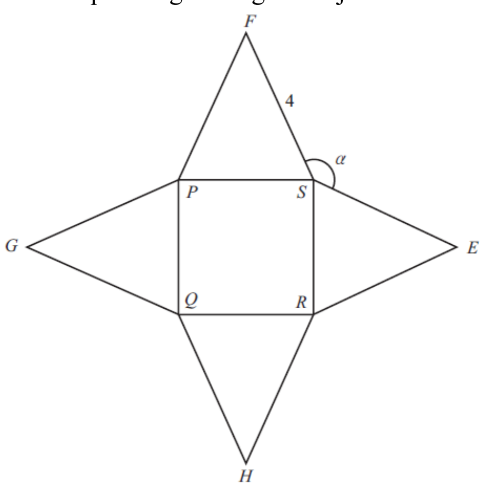


Figura 4

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo FSE ($\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$).

A aresta da base da pirâmide e, consequentemente, a área de cada uma das faces laterais variam em função de α. Mostre que a área lateral da pirâmide é dada, em função de α, por $-32\cos\alpha$

<u>Sugestão</u> – Comece por exprimir a área de uma face lateral em função da amplitude do ângulo FSP, que poderá designar por β

(Intermédio 2)

91. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio 1.

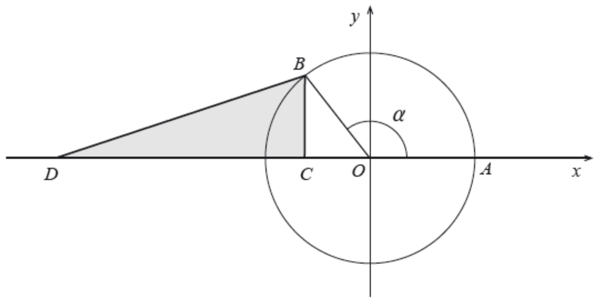


Figura 1

Sabe-se que:

• os pontos A e B pertencem à circunferência;

• o ponto A tem coordenadas (1, 0)

• os pontos B e C têm a mesma abcissa;

• o ponto C tem ordenada zero;

• o ponto D tem coordenadas (–3, 0)

• α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área do triângulo [BCD] ?

(A) $\frac{1}{2}(-3-\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$ **(B)** $\frac{1}{2}(-3+\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$

(C) $\frac{1}{2}(3+\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$ **(D)** $\frac{1}{2}(3-\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

(1.ª fase)

94. Na Figura 4, está representado um pentágono regular [ABCDE]. Sabe-se que $\overline{AB} = 1$. Mostre que

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

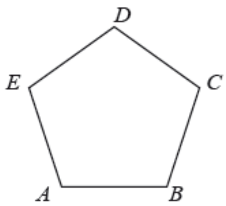


Figura 4

(2.ª fase)

95. Na Figura 5, estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P, Q, R e S. Sabe-se que:

• os pontos P, Q, R e S pertencem à circunferência;

• [PR] é um diâmetro da circunferência;

• $\overline{PQ} = \overline{PS}$

• α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR

• $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

• A(α) é a área do quadrilátero [PQRS], em função de α

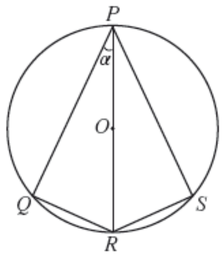


Figura 5

Para um certo número real θ, com $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tem-se que $tg\theta = 2\sqrt{2}$. Determine o valor exato de A(θ), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Comece por mostrar que A(α) = 16senα cos α

(2.ª fase)

E15 Na Figura 1, estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e a reta r. Sabe-se que:

• os pontos A e B pertencem à circunferência;

• o ponto B tem coordenadas (0, 1)

• a reta r é tangente à circunferência no ponto B

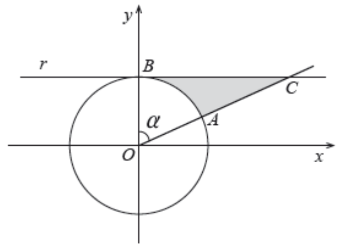


Figura 1

• o ponto C é o ponto de intersecção da reta r com a semirreta $\dot{O}A$

• α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área da região a sombreado?

(A) $\frac{\operatorname{sen}\alpha - \alpha}{2}$ **(B)** $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}{2}$

(C) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$ **(D)** $\frac{\alpha}{2}$

(Época especial)

E16 Considere, para um certo número real k, a função f , de domínio]–∞,e[, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{x-2} & \text{se } x \le 2 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6} + k & \text{se } 2 < x < e \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine k, de modo que a função f seja contínua em x = 2

b) Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal do seu gráfico e, caso exista, indique uma equação dessa assíntota.

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2015*)

96. Na Figura 1, está representado o círculo trigonométrico.
Sabe-se que:
- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- o ponto C tem coordenadas (1, 0)
- o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$
- os segmentos de reta [AB] e [DC] são paralelos ao eixo Oy

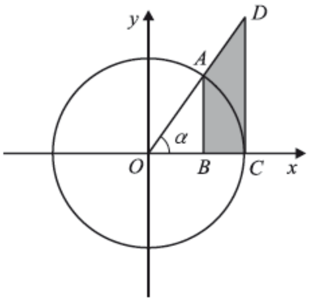


Figura 1

Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero [ABCD], representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{\text{tg}\,\alpha}{2} - \frac{\text{sen}\,(2\alpha)}{2}$ **(B)** $\frac{\text{tg}\,\alpha}{2} - \frac{\text{sen}\,(2\alpha)}{4}$

(C) $\text{tg}\,\alpha - \frac{\text{sen}\,(2\alpha)}{4}$ **(D)** $\text{tg}\,\alpha - \frac{\text{sen}\,(2\alpha)}{2}$

(1.ª fase)

97. Sejam f e g as funções, de domínio R, definidas, respetivamente, por f(x) = 1 – cos(3x) e g(x) = sen(3x)

Seja *a* um número real pertencente ao intervalo $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$.

Considere as retas r e s tais que:
- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa *a*
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$

Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.

Mostre que $sen(3a) = -\frac{1}{3}$

(1.ª fase)

99. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.
A Figura 2 esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\dot{O}A$

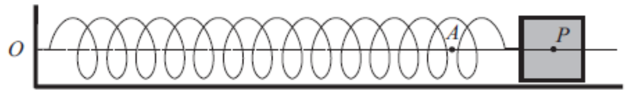


Figura 2

Admita que não existe qualquer resistência ao movimento. Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por $d(t) = 1 + \frac{1}{2}sen(\pi t + \frac{\pi}{6})$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo (t ∈[0, +∞[). Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) No instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A. Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais do que uma vez. Determine os instantes, diferentes do inicial, em que tal aconteceu. Apresente os valores exatos das soluções, em segundos.

b) Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

(2.ª fase)

$\boxed{\text{E17}}$ Seja *a* um número real. Considere a função f , de domínio ℝ, definida por f (x) = *a* sen x. Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$. Sabe-se que a inclinação da reta r é igual a $\frac{\pi}{6}$ radianos. Determine o valor de *a*

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2016*)

100. Na Figura 1, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo [OPQR]. Sabe-se que:

- o ponto P tem coordenadas (0,1)
- o ponto R pertence ao quarto quadrante e à circunferência.

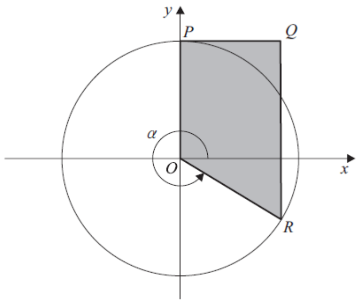


Figura 1

Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$. Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio [OPQR], em função de α?

(A) $\frac{\cos\alpha}{2}+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ **(B)** $\frac{\cos\alpha}{2}-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

(C) $\cos\alpha+\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$ **(D)** $\cos\alpha-\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$

(1.ª fase)

101. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale. Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto. Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t)=20+\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)+t\operatorname{sen}(2\pi t)$$

(t é medido em minutos e pertence a [0,1])

a) Sejam M e m, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos da função h no intervalo [0,1]. A amplitude A da oscilação do tabuleiro da ponte, neste intervalo, é dada por A=M−m. Determine o valor de A, recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos. Apresente o resultado em metros.

b) Em [0,1], o conjunto solução da inequação h(t)≤19,5 é um intervalo da forma]a,b[. Determine o valor de b−a arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.
Na sua resposta:
– reproduza o gráfico da função h visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere y∈[19,21];
–apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;
–apresente o valor de b−a arredondado às centésimas;
– interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

(1.ª fase)

103. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{\cos x} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2}<x\leq 0\\ x-\ln x & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$.

c) Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$. Além do ponto de tangência, a reta r intersecta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ (considere que o ponto A é o de menor abcissa). Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B. Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas. Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

(2.ª fase)

$\boxed{\text{E19}}$ Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{3\pi}{2},+\infty\right[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2+\cos x & \text{se } -\dfrac{3\pi}{2}<x<0\\ \ln\left(e^x+x\right) & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$. Interprete o valor obtido em termos de assíntotas do gráfico de f.

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$. Na sua resposta, indique:
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

c) Na Figura 3, estão representados:
- parte do gráfico da função f
- um ponto A, pertencente ao gráfico de f, de abcissa *a*
- a reta t, tangente ao gráfico da função f no ponto A

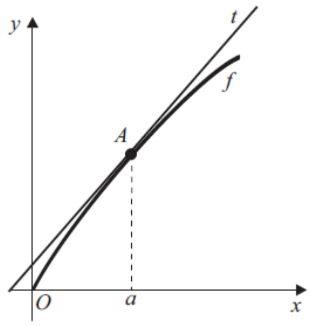


Figura 3

Sabe-se que:
- $a\in]0,1[$
- a reta t tem declive igual a 1,1

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A. Na sua resposta:
– equacione o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, que lhe permite(m) resolver a equação;
– apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

(Época especial)

Soluções: 1. 5 cm; 1/4 em 1/4"; ≈44,4cm/s; t∈[0,1/24[∪]5/24,7/24[∪]11/24,1/2]   2. π/4; não ∃ $\log(-a^2)$; 1 e ±3   3. C   4. B; D
5. B   6. D   7. A   8. D   9. 7m; 1'; {5,25,65} e 5''; 5m   10. C   11. {0,2π/3,π}; x=π/2   12. 12 km; π/6
13. A   15. B   16. π/4   17. 0; 1 (quadrado)   18. f cont. em R\{0}; máx=1+4/e   19. P_2(5π/6,-√3/2); cos(2x-5π/6)≤y≤sen(2x) ∧ 0≤x≤π/3   20. triang . rect. e isósc.   21. π   22. D   23. 18h50m; 38   24. 2031; 229^0
25. D   26. 8   27. A   28. cont. direita; (0,7;0,5)   29. 1   30. +∞   31. A   32. [(5π-6√3)/6,2π+2]; 3,8   33. x=±π; ½; 5π/36
34. 4; crescente   35. A   36. 2; π/6 e 5π/6; -1,03   37. A   38. y=1/3; ln(3e); {0,1,4,5,6}   39. 4; 0,2 e 1,4   40. 1; 1 e -4
41. B   42. 2; 0 e π; π/4 e 5π/4   43. sim   44. 503; 3,4; 98; B   45. D   46. 6; 3,4   47. A   48. 0,42
49. A   50. x=π e x=2π   51. √3/2; 0,5   52. D   53. 152,1 e 147,1; 147,7   55. C   56. π/3   57. A   58. x=0; y=0
59. 2   60. 4; 1 e 3   61. B   62. I Verd.; $d(x)=\cos x+\sqrt{9-\mathrm{sen}^2 x}$ 63. D   64. A   65. y=2x; 0,2   66. −10/3; 0,24
67. −2   68. π/4   69. π/2   70. É; y=2x; ln3   71. Verd.   72. 2,63   73. D   74. 7π/12   75. A   76. C
77. 0,91   79. π/3   80. 3/2   81. ln5−1; x=0; ¼   83. π/3   84. 0; y=3x+1   85. A   86. -π/6   87. Não
88. -12   89. D   91. C   92. π/4; -π/6 e π/6   93. C   95. 32√2/9   96. B   98. C   99. 2, 2/3 e 8/3   100. D   101. 1; -e
102. D   103. Não tem; -π/6; -1,19 e -0,17

E1. +∞; 2,2   E2. B   E3. 14 e 3   E4. B   E5. (3π/4,1)   E6. A   E7. 1; 1,4   E8. 0,27
E9. 8; 6   E10. A   E11. −1/20; não tem; 1,6   E12. ln(1/2)   E13. 0,63   E15. B   E16. 11/5; y=0
E17. −2√3/3   E18. B   E19. 0; -π/3; 0,72

O professor: Roberto Oliveira