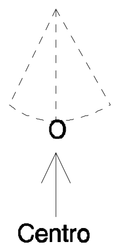
Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva

Matemática - 12º ano

Trigonometria - Exercícios saídos em Exames (*séc XX*)

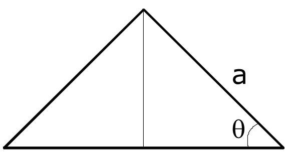
1. O pêndulo de um relógio move-se continuamente afastando-se e aproximando-se do centro O. No instante t segundos, a distância ao centro é dada, em cm, por: $d(t)=|5\ \text{sen}(4\pi t)|$



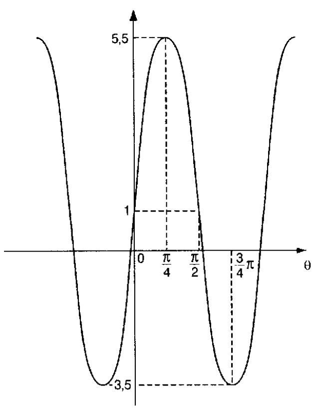
   a) Qual é a maior distância a que o pêndulo se encontra do centro?
   b) De quanto em quanto tempo o pêndulo passa pelo centro?
   c) Qual a velocidade do pêndulo no instante t=1/16 segundos?
   d) Faça um esboço do gráfico de $d: t \rightarrow d(t)$ em [0,1/2].
   e) Determine para que valores de $t\in[0,1/2]$ a distância que separa o pêndulo do centro é inferior a 2,5 cm.

(Prova Modelo 96)

2. Numa fábrica de cerâmica produzem-se tijoleiras triangulares. Cada peça é um triângulo isósceles de lado a, constante, como mostra a figura:

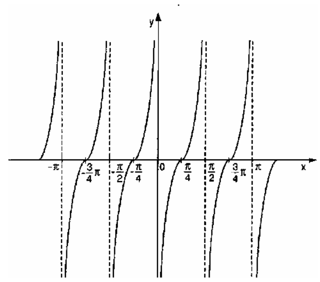


   a) Mostre que a área de cada peça é dada em função de θ, por:
   $A(\theta) = a^2/2\ \text{sen}\ 2\theta$, $(0< \theta < \pi/2\ ;\ a > 0)$
   b) Para que valor de θ a área de cada peça é máxima?
   c) Justifique que, se o lado <u>a</u> de uma peça de tijoleira for menor que $\sqrt{2}$, a área da peça será inferior a 1, qualquer que seja o valor do ângulo θ.
   d) Seja $L=\lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{A(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\theta}$. Justifique que não existe logaritmo de L, qualquer que seja a positivo e seja qual for a base do logaritmo.
   e) Seja $f: \theta \rightarrow a^2/2\ \text{sen}\ 2\theta$, $(\theta\in R$, a constante). Sabendo que a figura do lado esquerdo representa parte do gráfico de k+f (com k constante), determine os valores de k e de a.



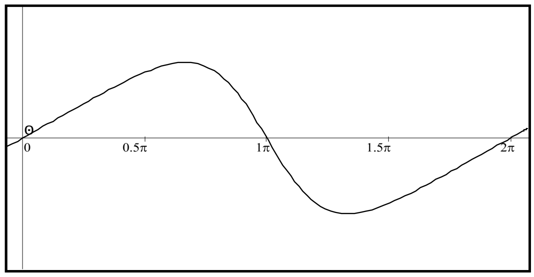
(Exame Nacional 96-1ªchamada)

3. A figura junta representa parte do gráfico da função definida por:
   [A] $tg(x-\pi/2)$
   [B] $2tg(x+\pi/2)$
   [C] $tg(2x+\pi/2)$
   [D] $tg(x+\pi/4)$



(Exame Nacional 96-2ªchamada)

4. A representação gráfica de uma função g em [0,2π] é a seguinte:



a) Quanto à existência de assímptotas do gráfico da função 1/g, no mesmo intervalo, pode afirmar-se que:
[A] Não existem
[B] São as rectas x=0, x=π e x=2π.
[C] São as rectas x=0 e y=0.
[D] São as rectas x=0, x=1/π e x=1/2π.

b) Sabendo que a expressão analítica da função g é $g(x)=\text{sen}\ x/(2+\cos x)$, o contradomínio de g é:
[A] [-1/2,1/2] [B] [-1,1]
[C] $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ [D] $[-\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3]$

(Exame Nacional 96-2ªfase)

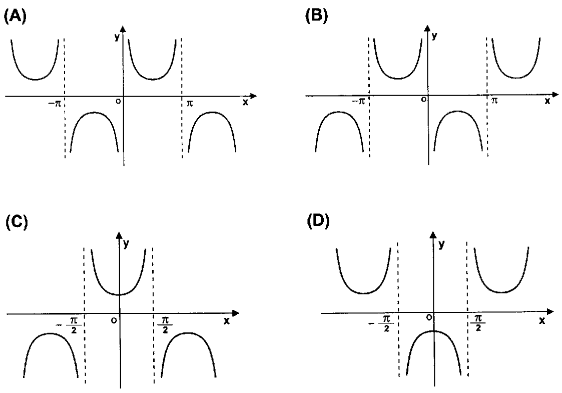
5. Seja s a função definida em R por $s(x)=\begin{cases} \text{sen}\,x\ \text{se}\ x<\pi \\ x-\pi\ \text{se}\ x\geq\pi \end{cases}$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira:
   (A) s é descontínua em x=π
   (B) s tem um mínimo relativo para x=π
   (C) s tem um máximo relativo para x=π
   (D) s tem derivada em x=π

(Prova Modelo 97)

6. Uma função real de variável real f é tal que f(0)=1. Indique qual das seguintes expressões pode definir a função f:
   (A) $\dfrac{x+2}{x-1}$ (B) $\dfrac{\ln x}{x+1}$
   (C) $tg(3x+\pi/2)$ (D) $2^{\text{sen}\,x}$

(Exame Nacional 97-1ªchamada)

7. Indique qual das seguintes figuras pode ser parte da representação gráfica da função definida por $s(x)=1/\text{sen } x$



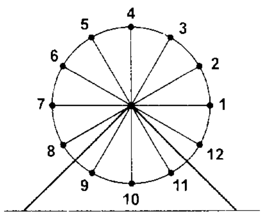
(Exame Nacional 97-1ªchamada)

8. Uma função real de variável real f é tal que $f(x)=f'(x)$, para qualquer nº real x. Indique qual das seguintes expressões pode definir a função f:

(A) $3x^2$ (B) sen x (C) e^{5x} (D) $2\,e^x$

(Exame Nacional 97-2ªchamada)

9. Depois de toda a gente (12 jovens) estar sentada nas respectivas cadeiras (ver exc. 16 da combinatória), a roda gigante começa a girar. Um dos rapazes, o Manuel, ficou sentado na cadeira nº 1. No instante em que a roda gigante começa a girar, a cadeira 1 está na posição indicada na figura ao lado. Admita que a distância, em metros, da cadeira 1 ao solo, t segundos após a roda gigante ter começado a girar, é dada por



$$d(t) = 7 + 5sen\left(\frac{\pi t}{30}\right).$$

a) Determine a distância a que a cadeira nº 1 se encontra do solo no instante em que a roda gigante começa a girar.

b) Esboce o gráfico da função d para $t\in[0,75]$. Assinale as coordenadas dos pontos correspondentes aos extremos da função. Da análise do gráfico, indique quanto tempo demora o Manuel a dar uma volta completa.

c) Resolva a equação $d(t)=9{,}5$ para $t\in[0,75]$. Indique, justificando, quanto tempo demora o Manuel a encontrar-se pela 1ª vez a uma distância de 9,5 metros do solo, depois da roda gigante ter começado a girar.

d) Indique, justificando, qual é o comprimento do raio da roda gigante.

(Exame Nacional 97-2ªchamada)

10. Um navio encontra-se atracado num porto. A distância h, de um dado ponto do casco do navio ao fundo do mar, varia com a maré. Admita que h é dada, em função do tempo x, por $h(x)=10-3\cos(2x)$. A distância desse ponto do casco ao fundo do mar, no momento da maré-alta, é

(A) 4 (B) 10 (C) 13 (D) 16

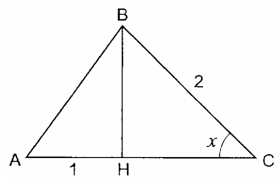
(Exame Nacional 97-2ªfase)

11. Considere a função g definida em $[0,\pi]$ por $g(x)=\text{sen } x + \text{sen } 2x$.

a) Determine os zeros da função g.

b) Estude, quanto à existência de assímptotas, a função h definida em $[0,\pi]\backslash\{\pi/2\}$ por $h(x)=g(x)/\cos x$

c) Mostre que, para qualquer $x\in]0,\pi/2[$, g(x) é a área de um triângulo [ABC], em que x é amplitude do ângulo BCA;



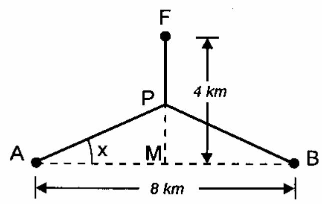
$\overline{BC}=2$;

[BH] é a altura relativa ao vértice B;

$\overline{AH}=1$.

(Prova Modelo 98)

12. Duas povoações, A e B, distanciadas 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F. Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura abaixo. A canalização é formada por 3 canos: um que vai da fonte F até um ponto P e 2 que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B. Tem-se ainda que: o ponto M, ponto médio de [AB], dista 4 km de F; x é a amplitude do ângulo PAM $\left(x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)$.



a) Tomando para unidade o km, mostre que o comprimento total da canalização é dado por $g(x) = 4 + \frac{8-4senx}{\cos x}$ (sugestão: comece por mostrar que $\overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$ e que $\overline{FP} = 4 - 4tgx$)

b) Calcule g(0) e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

c) Determine o valor de x para o qual o comprimento total da canalização é mínimo.

(Exame Nacional 98-1ªchamada)

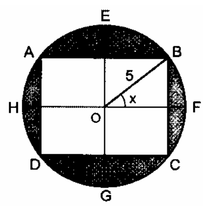
13. Considere a função f definida por $f(x)=\text{sen}(x^2)$. Indique qual das expressões seguintes define f' :

(A) $2x\cos(x^2)$ (B) $\cos(x^2)$

(C) $2x\cos(2x)$ (D) $-\cos(x^2)$

(Exame Nacional 98-2ªchamada)

14. A figura abaixo representa um canteiro de forma circular com 5 m de raio. O canteiro tem uma zona rectangular, que se destina à plantação de flores, e uma zona relvada, assinalada a sombreado na figura. Os vértices A, B, C e D do rectângulo pertencem à circunferência que limita o canteiro. Na figura estão também assinalados: 2 diâmetros de circunferência, [EG] e



[HF], que contém os pontos médios dos lados do rectângulo; o centro O da circunferência; o ângulo BOF, de amplitude x ($x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

a) Mostre que a área (em m^2) da zona relvada é dada, em função de x, por $g(x)=25\pi-50sen(2x)$.

b) Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que existe um valor de x compreendido entre $\pi/6$ e $\pi/4$ para a qual a área da zona relvada é 30 m^2.

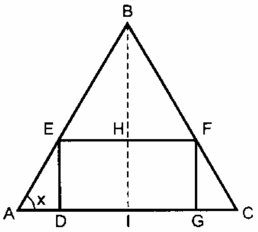
(Exame Nacional 98-2ªchamada)

15. Para um certo nº real k, é contínua a função m definida por $m(x) = \begin{cases} e^{2x}+k & se\ x \le 0 \\ \frac{senx}{x} & se\ x > 0 \end{cases}$. O valor de k é

(A) −1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(Exame Nacional 98-2ªfase)

16. Na figura, o triângulo [ABC] é isósceles ($\overline{AB} = \overline{BC}$); [DEFG] é um rectângulo, $\overline{DG} = 2$ e $\overline{DE} = 1$; x designa a amplitude do ângulo BAC.



a) Mostre que a área do triângulo [ABC], é dada em função de x, por $f(x)= 2 + tgx + \frac{1}{tgx}$ ($x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$)

(Nota: pode ser-lhe útil reparar que $B\hat{E}F = B\hat{A}C$)

b) Mostre que $f'(x) = -\frac{\cos(2x)}{sen^2 x \cos^2 x}$

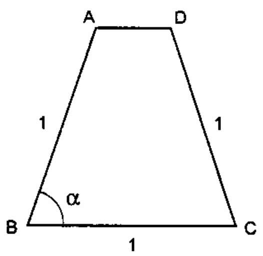
c) Determine o valor de x para a qual a área do triângulo [ABC] é mínima.

(Exame Nacional 98-2ªfase)

17. Considere a função f: R→R, definida por f(x)=senx – ½ sen(2x)

a) Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine $f'(0)$.

b) [ABCD] é um trapézio isósceles; os lados [AD] e [BC] são paralelos. Tem-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$; $\overline{AD} \le 1$.



Seja α a amplitude do ângulo ABC ($\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$).

b_1) Mostre que, para cada $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, a área do trapézio é igual a f(α).

b_2) Determine f(π/2) e interprete geometricamente o resultado obtido, caracterizando o quadrilátero que se obtém para α = π/2.

(Prova Modelo 99)

18. Considere a função f: R→R, definida por

$f(x)=\begin{cases} 1+x^2e^{x+1} & se\ x \le 0 \\ \frac{x+sen\,x}{x} & se\ x > 0 \end{cases}$

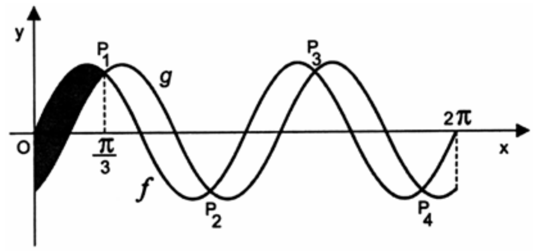
a) Estude a função f quanto à continuidade.

b) Mostre que f admite um único máximo no intervalo]-∞,0] e determine-o.

c) Seja r a recta de equação y=1. Mostre que existem infinitos pontos de intersecção da recta r com o gráfico de f.

(Exame Nacional 99-1ªchamada)

19. Na figura estão as representações gráficas de 2 funções, f e g, de domínio [0,2π], definidas por f(x)=sen(2x) e g(x)=cos(2x-5π/6). P_1, P_2, P_3 e P_4 são os pontos de intersecção dos gráficos de f e de g. A abcissa de P_1 é π/3.



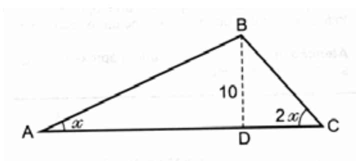
a) Mostre que são perpendiculares as rectas tangentes aos gráficos de f e de g no ponto P_1.

b) Determine as coordenadas de P_2.

c) Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.

(Exame Nacional 99-2ªchamada)

20. Na figura está representado um triângulo [ABC]. Seja $g(x)=\frac{75-25tg^2x}{tg\,x}$.



a) Mostre que a área de [ABC] é dada por g(x), para qualquer x∈]0,π/4[.

b) Considere o triângulo [ABC] quando x=π/4. Classifique-o quanto aos ângulos e quanto aos lados e prove que a sua área ainda é dada por g(x).

(Exame Nacional 99-2ªfase)