(*Teste intermédio e exames Nacionais 2012*)

79. Relativamente à Figura 2, sabe-se que:
- o segmento de reta [AC] tem comprimento 4
- o ponto B é o ponto médio de [AC]
- o segmento de reta [BD] é perpendicular a [AC]
- o arco de circunferência CD tem centro em B

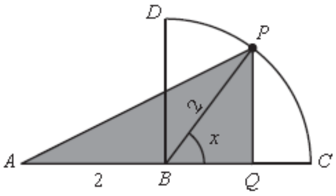

Figura 2

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco CD, nunca coincidindo com C nem com D, e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta [BC] de tal forma que [PQ] é sempre perpendicular a [BC]. Para cada posição do ponto P, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo CBP e seja *A*(*x*) a área do triângulo [APQ]. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $A(x) = 2\ \text{sen}\ x + \text{sen}\ (2x)$ ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Mostre que existe um valor de *x* para o qual a área do triângulo [APQ] é máxima.

(Intermédio 2)

80. Na Figura 5, está representado um trapézio retângulo [ABCD]
Sabe-se que:
- $\overline{BC} = 1$
- $\overline{CD} = 1$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC
- $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

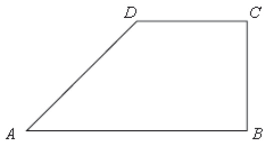

Figura 5

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que o perímetro do trapézio [ABCD] é dado, em função de α, por $P(\alpha) = 3 + \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$

b) Para um certo número real θ, tem-se que $tg\theta = -\sqrt{8}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Determine o valor exato de $P'(\theta)$

Comece por mostrar que $P'(\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{sen^2\alpha}$

(1.ª fase)

81. Considere a função f , de domínio R, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, x}{1-\sqrt{1-x^3}} & \text{se } x<0 \\ 1-e^{k+1} & \text{se } x=0 \\ \dfrac{1-e^{4x}}{x} & \text{se } x>0 \end{cases} \qquad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine *k*, de modo que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

b) Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

c) Seja *g* uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g', de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por $g'(x) = f(x) - \frac{1}{x}$. Estude a função *g* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

(2.ª fase)

82. Na Figura 4, está representado o quadrado [ABCD]
Sabe-se que:
- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
- *x* é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB
- $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$

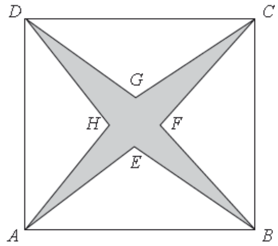

Figura 4

a) Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de *x*, por $a(x) = 16(1 - \text{tg}\ x)$

b) Mostre que existe um valor de *x* compreendido entre $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{5}$ para o qual a área da região sombreada é 5. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

(2.ª fase)

E12 Considere as funções *f* e *g*, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = -x + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ e^k - 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine *k* de modo que a função *g* seja contínua.

b) Determine, em]−2π,5π[, as soluções da equação $2f'(x) = (f(x) + x)^2 - 1$

(Época especial)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2013*)

83. Relativamente à Figura 1, sabe-se que:
- o ponto B pertence ao segmento de reta [AC]
- os pontos A e D pertencem à circunferência que tem centro no ponto B e raio igual a 4
- o segmento de reta [BD] é perpendicular ao segmento de reta [AC]
- $\overline{BC} = 2$

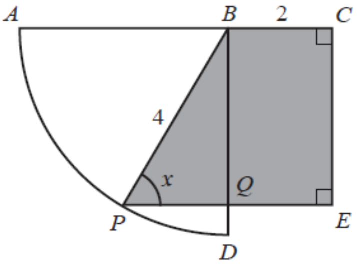

Figura 1

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco AD, nunca coincidindo com A nem com D, e que um ponto E acompanha o movimento do ponto P de forma que o quadrilátero [PBCE] seja um trapézio retângulo. O ponto Q é a intersecção do segmento de reta [PE] com o segmento de reta [BD]. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo EPB e seja S(x) a área do trapézio [PBCE]

a) Mostre que S(x) = 8sen x + 4sen(2x) ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Estude a função S quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Na sua resposta, deve apresentar:
- o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
- os valores de x para os quais a função tem extremos relativos, caso existam.

(Intermédio 2)

84. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 - xe^{x} & \text{se } x < 0 \\ x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine $f'(\frac{\pi}{2})$ recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

b) O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$. Determine a equação reduzida dessa assíntota.

(Intermédio 2)

85. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por

$f(x) = \frac{sen(-x)}{x}$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{n}$. Qual é o valor de lim f (x_n)?

(A) −1 (B) 0 (C) 1 (D) +∞

(1.ª fase)

86. Considere a função g, de domínio $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, definida por g(x) = sen(2x) − cos x. Seja *a* um número real do domínio de g. A reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa *a* é paralela à reta de equação $y = \frac{x}{2} + 1$. Determine o valor de *a*, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(1.ª fase)

87. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x e^{3+x} + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1 - \sqrt{x} + \text{sen}(x-1)}{1 - x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue se a função f é contínua em x = 1

b) Mostre que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para −∞

(2.ª fase)

88. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, o triângulo [OAB] e a reta r.
Sabe-se que:
- a reta r é definida por x = −3
- o ponto A pertence à reta r e tem ordenada positiva;
- o ponto B é o simétrico do ponto A em relação ao eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$
- a função P, de domínio $]\frac{\pi}{2}, \pi[$, é definida por $P(x) = -6tgx - \frac{6}{\cos x}$

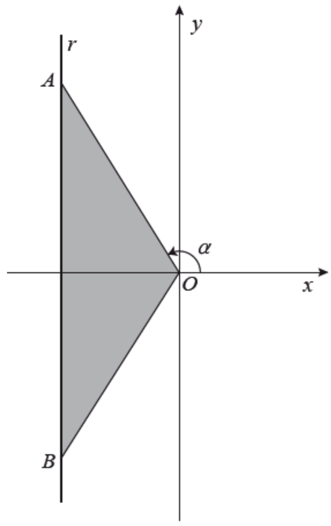

Figura 4

a) Mostre que o perímetro do triângulo [OAB] é dado, em função de α, por P(α)

b) Determine o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, sem utilizar a calculadora.

(2.ª fase)

$\boxed{\text{E13}}$ Considere a função f, de domínio]0,π[, definida por f(x) = ln x + cos x – 1. Sabe-se que:

• A é um ponto do gráfico de f
• a reta tangente ao gráfico de f, no ponto A, tem inclinação $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

(Época especial)

$\boxed{\text{E14}}$ Na Figura 2, estão representados a circunferência de centro no ponto C e de raio 1, a semirreta $\dot{C}B$, a reta AD e o triângulo [ACE]

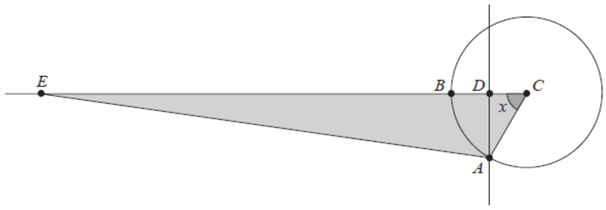

Figura 2

Sabe-se que:

• os pontos A e B pertencem à circunferência;
• os pontos D e E pertencem à semirreta $\dot{C}B$
• a reta AD é perpendicular à semirreta $\dot{C}B$
• o ponto A desloca-se sobre a circunferência, e os pontos D e E acompanham esse movimento de modo que $\overline{DE} = 6$
• x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACB
• $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

a) Mostre que a área do triângulo [ACE] é dada, em função de x, por $f(x) = 3sen x + \frac{1}{4}sen(2x)$

b) Mostre, sem resolver a equação, que f(x) = 2 tem, pelo menos, uma solução em $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$

(Época especial)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2014*)

89. Seja g a função, de domínio ℝ, definida por $g(x) = \cos^2(\frac{x}{12}) - sen^2(\frac{x}{12})$

Qual das expressões seguintes também define a função g ?

(A) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{24}\right)$ **(B)** $\cos\left(\frac{x}{24}\right)$

(C) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{6}\right)$ **(D)** $\cos\left(\frac{x}{6}\right)$

(Intermédio 2)

90. Na Figura 4, está representada uma planificação de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas laterais medem 4

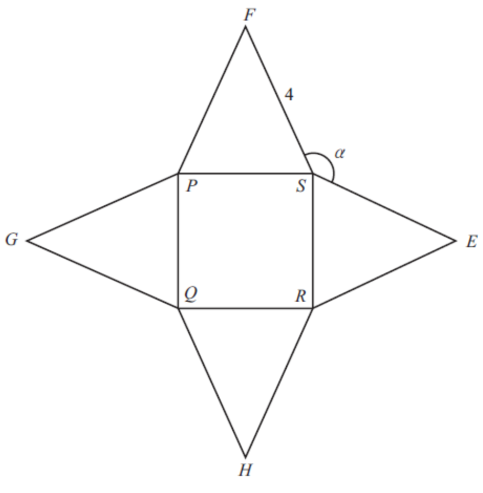

Figura 4

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo FSE ($\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$).

A aresta da base da pirâmide e, consequentemente, a área de cada uma das faces laterais variam em função de α. Mostre que a área lateral da pirâmide é dada, em função de α, por −32cos α

Sugestão – Comece por exprimir a área de uma face lateral em função da amplitude do ângulo FSP, que poderá designar por β

(Intermédio 2)

91. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio 1.

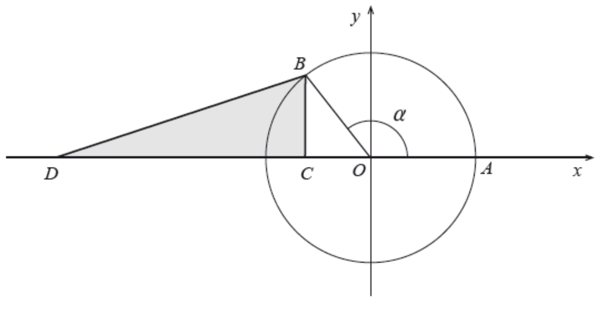

Figura 1

Sabe-se que:

• os pontos A e B pertencem à circunferência;
• o ponto A tem coordenadas (1, 0)
• os pontos B e C têm a mesma abcissa;
• o ponto C tem ordenada zero;
• o ponto D tem coordenadas (−3, 0)

• α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área do triângulo [BCD] ?

(A) $\frac{1}{2}(-3 - \operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$ **(B)** $\frac{1}{2}(-3 + \operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$

(C) $\frac{1}{2}(3 + \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$ **(D)** $\frac{1}{2}(3 - \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

(1.ª fase)

92. Seja f uma função cuja derivada f', de domínio ℝ, é dada por $f'(x) = x - sen(2x)$

a) Determine o valor de $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{2x - \pi}$

b) Estude o gráfico da função f , quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima, o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo e, caso existam, as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função f

(1.ª fase)

93. Considere, para um certo número real k, a função f, contínua em $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{x - \dfrac{\pi}{2}} & \text{se } \dfrac{\pi}{4} \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ k - 3 & \text{se } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

(2.ª fase)

94. Na Figura 4, está representado um pentágono regular [ABCDE]. Sabe-se que $\overline{AB} = 1$. Mostre que

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

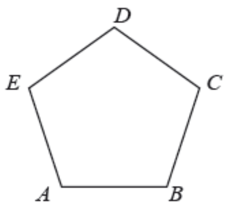

Figura 4

(2.ª fase)

95. Na Figura 5, estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P, Q, R e S. Sabe-se que:

• os pontos P, Q, R e S pertencem à circunferência;

• [PR] é um diâmetro da circunferência;

• $\overline{PQ} = \overline{PS}$

• α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR

• $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

• A(α) é a área do quadrilátero [PQRS], em função de α

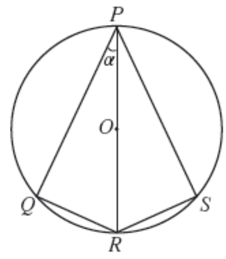

Figura 5

Para um certo número real θ, com $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tem-se que $tg\theta = 2\sqrt{2}$.

Determine o valor exato de A(θ), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Comece por mostrar que A(α) = 16senα cos α

(2.ª fase)

$\boxed{\text{E15}}$ Na Figura 1, estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e a reta r. Sabe-se que:

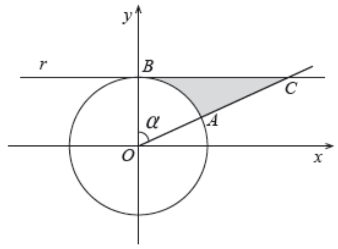

Figura 1

• os pontos A e B pertencem à circunferência;

• o ponto B tem coordenadas (0, 1)

• a reta r é tangente à circunferência no ponto B

• o ponto C é o ponto de intersecção da reta r com a semirreta $\dot{O}A$

• α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área da região a sombreado?

(A) $\frac{\operatorname{sen}\alpha - \alpha}{2}$ **(B)** $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}{2}$

(C) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$ **(D)** $\frac{\alpha}{2}$

(Época especial)

$\boxed{\text{E16}}$ Considere, para um certo número real k, a função f , de domínio]–∞,e[, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{x-2} & \text{se } x \le 2 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2 + x - 6} + k & \text{se } 2 < x < e \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine k, de modo que a função f seja contínua em x = 2

b) Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal do seu gráfico e, caso exista, indique uma equação dessa assíntota.

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2015*)

96. Na Figura 1, está representado o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

• o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
• o ponto B pertence ao eixo Ox
• o ponto C tem coordenadas (1, 0)
• o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$
• os segmentos de reta [AB] e [DC] são paralelos ao eixo Oy

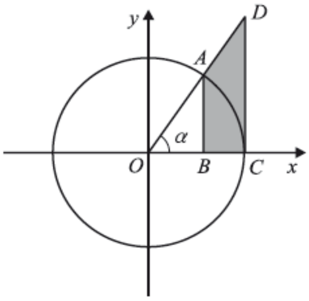

Figura 1

Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero [ABCD], representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$ **(B)** $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(C) $\operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$ **(D)** $\operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

(1.ª fase)

97. Sejam f e g as funções, de domínio R, definidas, respetivamente, por f(x) = 1 – cos(3x) e g(x) = sen(3x)

Seja *a* um número real pertencente ao intervalo $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$.

Considere as retas r e s tais que:

• a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa *a*
• a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$

Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.

Mostre que $sen(3a) = -\frac{1}{3}$

(1.ª fase)

98. Seja f a função, de domínio R, definida por f (x) = 3sen^2 (x). Qual das expressões seguintes define a função f ´´, segunda derivada de f ?

(A) 6sen(2x) cos(x) (B) 6sen(x) cos(2x)

(C) 6 cos(2x) (D) 6sen(2x)

(2.ª fase)

99. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.

A Figura 2 esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\dot{O}A$

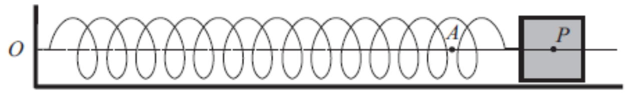

Figura 2

Admita que não existe qualquer resistência ao movimento. Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por $d(t) = 1 + \frac{1}{2} sen(\pi t + \frac{\pi}{6})$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo (t ∈[0, +∞[). Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) No instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A. Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais do que uma vez. Determine os instantes, diferentes do inicial, em que tal aconteceu. Apresente os valores exatos das soluções, em segundos.

b) Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

(2.ª fase)

$\boxed{\text{E17}}$ Seja *a* um número real. Considere a função f , de domínio ℝ, definida por f (x) = *a* sen x. Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$. Sabe-se que a inclinação da reta r é igual a $\frac{\pi}{6}$ radianos. Determine o valor de *a*

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2016*)

100. Na Figura 1, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo [OPQR]. Sabe-se que:

- o ponto P tem coordenadas (0,1)
- o ponto R pertence ao quarto quadrante e à circunferência.

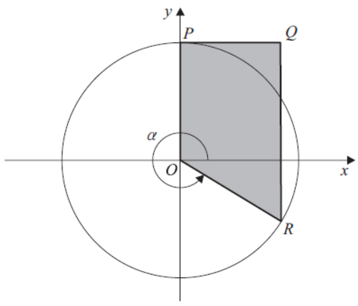

Figura 1

Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$. Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio [OPQR], em função de α?

(A) $\frac{\cos\alpha}{2}+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ **(B)** $\frac{\cos\alpha}{2}-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

(C) $\cos\alpha+\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$ **(D)** $\cos\alpha-\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$

(1.ª fase)

101. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale. Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto. Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t)=20+\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)+t\operatorname{sen}(2\pi t)$$

(t é medido em minutos e pertence a [0,1])

a) Sejam M e m, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos da função h no intervalo [0,1]. A amplitude A da oscilação do tabuleiro da ponte, neste intervalo, é dada por A=M−m. Determine o valor de A, recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos. Apresente o resultado em metros.

b) Em [0,1], o conjunto solução da inequação h(t)≤19,5 é um intervalo da forma]a,b[. Determine o valor de b−a arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.
Na sua resposta:
– reproduza o gráfico da função h visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere y∈[19,21];
–apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;
–apresente o valor de b−a arredondado às centésimas;
– interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

(1.ª fase)

102. Na Figura 1, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1. Sabe-se que:

- os diâmetros [AC] e [BD] são perpendiculares;
- o ponto P pertence ao arco AB
- [PQ] é um diâmetro da circunferência;
- o ponto R pertence a [OD] e é tal que [QR] é paralelo a [AC]

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP

$$\left(\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$$

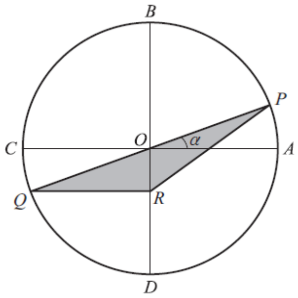

Figura 1

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo [PQR], representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{\cos(2\alpha)}{4}$ **(B)** $\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(C) $\frac{\cos(2\alpha)}{2}$ **(D)** $\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

(2.ª fase)

103. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{\cos x} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2}<x\leq 0\\ x-\ln x & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$.

c) Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$. Além do ponto de tangência, a reta r intersecta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ (considere que o ponto A é o de menor abcissa). Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B. Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas. Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

(2.ª fase)

E18 Para um certo número real k, é contínua em ℝ a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(3x+3)}{4x+4} & \text{se } x\neq -1\\ k+2 & \text{se } x=-1\end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) $-\frac{5}{3}$ **(B)** $-\frac{5}{4}$ **(C)** $\frac{5}{4}$ **(D)** $\frac{5}{3}$

(Época especial)

E19 Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{3\pi}{2},+\infty\right[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x^2+\cos x & \text{se } -\dfrac{3\pi}{2}<x<0\\ \ln(e^x+x) & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$. Interprete o valor obtido em termos de assíntotas do gráfico de f.

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$. Na sua resposta, indique:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

c) Na Figura 3, estão representados:

• parte do gráfico da função f
• um ponto A, pertencente ao gráfico de f, de abcissa a
• a reta t, tangente ao gráfico da função f no ponto A

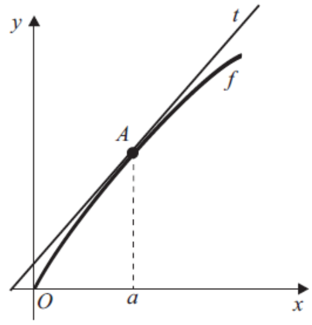

Figura 3

Sabe-se que:

• $a\in]0,1[$
• a reta t tem declive igual a 1,1

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A. Na sua resposta:

– equacione o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, que lhe permite(m) resolver a equação;
– apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

(Época especial)

Soluções: 1. 5 cm; 1/4 em 1/4”; ≈44,4cm/s; t∈[0,1/24[∪]5/24,7/24[∪]11/24,1/2] 2. π/4; não ∃ $\log(-a^2)$; 1 e ±3 3. C 4. B; D
5. B 6. D 7. A 8. D 9. 7m; 1’; {5,25,65} e 5’’; 5m 10. C 11. {0,2π/3,π}; x=π/2 12. 12 km; π/6
13. A 15. B 16. π/4 17. 0; 1 (quadrado) 18. f cont. em R\{0}; máx=1+4/e 19. P_2(5π/6,-√3/2); cos(2x-5π/6)≤y≤sen(2x) ∧ 0≤x≤π/3 20. triang . rect. e isósc. 21. π 22. D 23. 18h50m; 38 24. 2031; 229^0
25. D 26. 8 27. A 28. cont. direita; (0,7;0,5) 29. 1 30. +∞ 31. A 32. [(5π-6√3)/6,2π+2]; 3,8 33. x=±π; ½; 5π/36
34. 4; crescente 35. A 36. 2; π/6 e 5π/6; -1,03 37. A 38. y=1/3; ln(3e); {0,1,4,5,6} 39. 4; 0,2 e 1,4 40. 1; 1 e -4
41. B 42. 2; 0 e π; π/4 e 5π/4 43. sim 44. 503; 3,4; 98; B 45. D 46. 6; 3,4 47. A 48. 0,42
49. A 50. x=π e x=2π 51. √3/2; 0,5 52. D 53. 152,1 e 147,1; 147,7 55. C 56. π/3 57. A 58. x=0; y=0
59. 2 60. 4; 1 e 3 61. B 62. I Verd.; $d(x)=\cos x+\sqrt{9-\text{sen}^2 x}$ 63. D 64. A 65. y=2x; 0,2 66. –10/3; 0,24
67. –2 68. π/4 69. π/2 70. É; y=2x; ln3 71. Verd. 72. 2,63 73. D 74. 7π/12 75. A 76. C
77. 0,91 79. π/3 80. 3/2 81. ln5–1; x=0; ¼ 83. π/3 84. 0; y=3x+1 85. A 86. -π/6 87. Não
88. -12 89. D 91. C 92. π/4; -π/6 e π/6 93. C 95. 32√2/9 96. B 98. C 99. 2, 2/3 e 8/3 100. D 101. 1; -e
102. D 103. Não tem; -π/6; -1,19 e -0,17

E1. +∞; 2,2 E2. B E3. 14 e 3 E4. B E5. (3π/4,1) E6. A E7. 1; 1,4 E8. 0,27
E9. 8; 6 E10. A E11. –1/20; não tem; 1,6 E12. ln(1/2) E13. 0,63 E15. B E16. 11/5; y=0
E17. –2√3/3 E18. B E19. 0; -π/3; 0,72

O professor: Roberto Oliveira