(*Exames Nacionais 2005*)

47. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

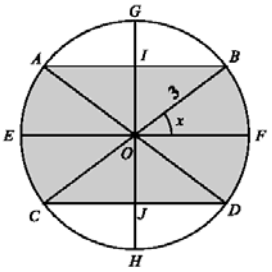
f(x) = cos x. Qual das expressões seguintes dá a derivada de *f*, no ponto π?

(A) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{x-\pi}$ (B) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-\pi}{x}$

(C) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x}{x-\pi}$ (D) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x+\pi}$

(1ªfase)

48. Na figura está representada uma circunferência com centro no ponto O e raio 3. Os diâmetros [EF] e [GH] são perpendiculares.



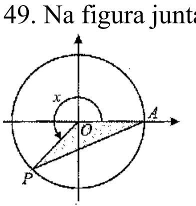
Considere que o ponto B se desloca sobre o arco FG.
Os pontos A, C e D acompanham o movimento do ponto B, de tal forma que: as cordas [AB] e [CD] permanecem paralelas a [EF]; [AD] e [BC] são sempre diâmetros da circunferência.
Os pontos I e J também acompanham o mesmo movimento, de tal forma que são sempre os pontos de intersecção de [GH] com [AB] e [CD], respectivamente. Para cada posição do ponto B, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo FOB ($x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$).

a) Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por A(x)=18(x+sen x·cos x)
Sugestão: use a decomposição sugerida na figura.

b) Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: Qual é o valor de x para o qual a área da região sombreada é igual a metade da área do círculo?
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

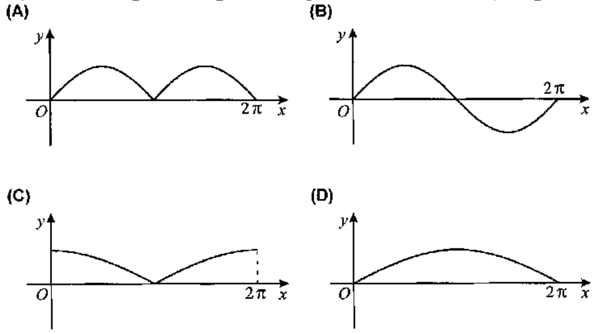
(1ªfase)

49. Na figura junta está representado o círculo trigonométrico.



Considere que um ponto P parte de A(1,0) e se desloca sobre uma circunferência, dando uma volta completa, em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é a semi-recta $\dot{O}A$ e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}P$ ($x\in\left]0,2\pi\right[$). Seja g a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área da região sombreada (região limitada pelo segmentos de recta [OP], [PA] e [AO]).

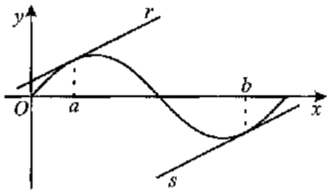
Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função *g*?



(2ªfase)

50. Seja *f* a função, de domínio [0,2π], definida por *f*(x)=sen x

a) Na figura estão representados: o gráfico da função *f*; duas rectas, *r* e *s*, tangentes ao gráfico de *f*, nos pontos de abcissa *a* e *b*, respectivamente.

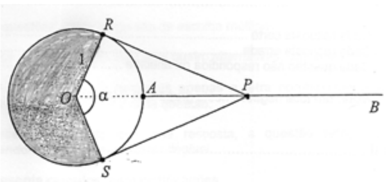


Prove que, se *a*+*b*=2π, então as rectas *r* e *s* são paralelas.

b) Sem recorrer à calculadora, estude, quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, a função *g*, de domínio]0,2π[\{π}, definida por $g(x) = \frac{x}{f(x)}$

(2ªfase)

$\boxed{\text{E1.}}$ Na figura estão representadas uma semi-recta $\dot{A}B$ e uma circunferência de centro O e raio 1 (os pontos O, A e B são colineares; o ponto A pertence à circunferência).



Considere que um ponto P se desloca ao longo da semi-recta $\dot{A}B$, nunca coincidindo com o ponto A.
Os pontos R e S acompanham o movimento do ponto P, de tal forma que as rectas PR e PS são sempre tangentes à circunferência, nos pontos R e S, respectivamente. Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo SOR (α∈]0,π[).

a) Mostre que a área do quadrilátero [ORPS] é dada, em função de α, por $f(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

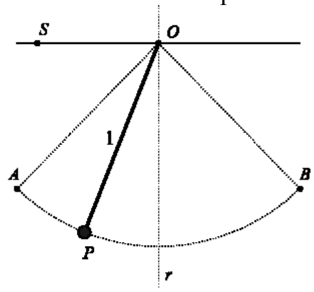
b) Calcule $\lim\limits_{\alpha\to\pi^-} f(\alpha)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

c) Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução que lhe permite resolver o seguinte problema: Qual é o valor de α para o qual a área do quadrilátero [ORPS] é igual à área da região sombreada? Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às décimas.

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2006*)

51. Na figura está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto O.



O centro da esfera oscila entre os pontos A e B, que são simétricos relativamente à recta vertical *r*. A recta *r* passa pelo ponto O e é perpendicular à recta OS. No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto A. Admita que, *t* segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto P tal que a amplitude, em radianos, do ângulo SOP é dada (aproximadamente) por $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos(\sqrt{9{,}8}\,t)$

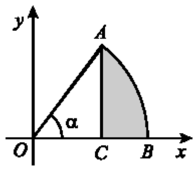
Nas duas alíneas seguintes, <u>não utilize a calculadora</u>, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.

a) Determine a distância do centro da esfera à recta OS, no instante inicial.

b) Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na recta *r*. Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

(1ªfase)

52. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco AB, que está contido na circunferência de equação $x^2+y^2=1$.



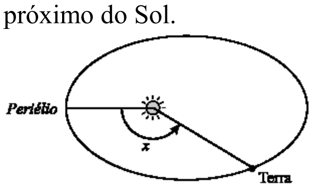
O ponto C pertence ao eixo Ox e o segmento de recta [AC] é perpendicular a este eixo. α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB. Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α?

(A) π×α+sen α+cos α (B) π×α+sen α+1−cos α

(C) 1+α−sen α+cos α (D) 1+α+sen α−cos α

(2ªfase)

53. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.



Na figura está assinalado um ângulo de amplitude *x* radianos ($x \in [0,2\pi[$) . Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra. A distância , em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de *x*, por

d = 149,6(1−0,0167cos *x*)

a) <u>Sem recorrer à calculadora</u>, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

b) Sabe-se que *x* verifica a relação

$\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\,\text{sen}\,x$, em que

• *t* é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo *x*;

• *T* é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (365,24 dias).

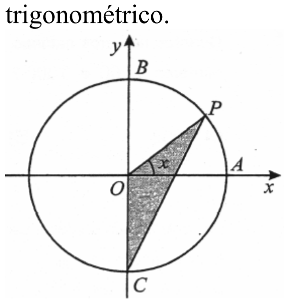
b_1) Mostre que, para *x* = π, se tem $t = \frac{T}{2}$. Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

b_2) Sabe-se que a última passagem da Terra pelo *periélio* ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

<u>Nota</u>: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

(2ªfase)

$\boxed{\text{E2}}$. Na figura junta, está representado o círculo trigonométrico.



Os pontos A, B e C têm coordenadas (1,0), (0,1) e (0,−1), respectivamente. O ponto P desloca-se ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto B. Para cada posição do ponto P, seja *x* a amplitude do ângulo AOP, e seja f(*x*) a área do triângulo [OPC]. Qual das expressões seguintes define a função f?

(A) $\frac{\text{sen}\,x}{2}$ (B) $\frac{\cos x}{2}$ (C) $\frac{\text{sen}\,x+\cos x}{2}$ (D) $\frac{\text{sen}\,x\cdot\cos x}{2}$

(Época especial)

$\boxed{\text{E3}}$. Considere a expressão f(*x*)=A+Bcos(C*x*). Sempre que se atribuem valores reais positivos a A, B e C, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}$.

a) Prove que $\frac{2\pi}{C}$ é período de qualquer função definida por uma expressão do tipo indicado.

b) Num certo rio, existe um ancoradouro para atracagem de barcos. A distância do ancoradouro ao fundo do rio varia com a maré. Admita que, num certo dia, a distância do ancoradouro ao fundo do rio, x horas depois das zero horas desse dia, pode ser modelada por uma função do tipo f(*x*)=A+Bcos(C*x*), com *x* ∈ [0,24[.

Admita ainda que, no intervalo de tempo $[0,24[$:
• a distância máxima do ancoradouro ao fundo do rio é de 17 metros, e a mínima é de 11 metros;
• ocorrem apenas duas marés altas, uma às 0 horas e outra às 12 horas;
• ocorrem apenas duas marés baixas, uma às 6 horas e outra às 18 horas.

Justifique que, no modelo f(*x*)=A+Bcos(C*x*), se tem $C = \frac{\pi}{6}$ (tenha em conta a alínea a) e o facto de que não existe nenhum período positivo inferior a $\frac{2\pi}{C}$). Em seguida, determine os valores de A e B (positivos) adequados ao modelo.

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2007*)

54. Considere as funções *f* e *g*, definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^{x-1}$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. Considere ainda a função *h*, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = f'(x) - g'(x)$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

a) Mostre que a função *h* tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0,\frac{\pi}{2}[$

b) Tendo em conta a), justifique que existe $a \in]0,\frac{\pi}{2}[$ tal que as rectas tangentes aos gráficos de *f* e *g*, nos pontos de abcissa *a*, são paralelas.

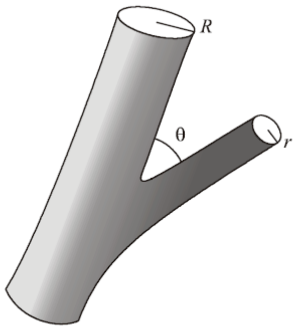
(1ªfase)

55. Seja $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 3 - 2\cos x$. Indique o valor de *x* para o qual *f*(*x*) é máximo.

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (B) $\frac{3\pi}{2}$

(2ªfase)

56. Na figura seguinte está representada uma artéria principal do corpo humano, cuja secção é um círculo com raio R, e uma sua ramificação, mais estreita, cuja secção é um círculo com raio r.

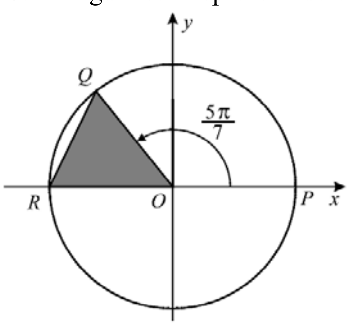


A secção da artéria principal tem área A e a da ramificação tem área *a*. Seja $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$ a amplitude, em radianos, do ângulo que a artéria principal faz com a sua ramificação (medida relativamente a duas geratrizes complanares dos dois cilindros). Sabe-se que $a = A\sqrt{\cos\theta}$. Admitindo que o modelo descrito se adequa com exactidão à situação real, determine θ no caso em que os raios referidos verificam a relação $R = \sqrt[4]{2}\ r$

(2ª fase)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2008*)

57. Na figura está representado o círculo trigonométrico.



Tal como a figura sugere, *O* é a origem do referencial, Q pertence à circunferência, P é o ponto de coordenadas (1,0) e R é o ponto de coordenadas (–1,0). A amplitude, em radianos, do ângulo POQ é $\frac{5\pi}{7}$. Qual é o valor, arredondado às centésimas, da área do triângulo [OQR]?

(A) 0,39 (B) 0,42 (C) 0,46 (D) 0,49

(Intermédio 2)

58. Seja *f* a função de domínio $[-\pi,+\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-4x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{3\operatorname{sen}(x)}{x^2} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Estude a função *f* quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados, escrevendo as suas equações, caso existam. (1ªfase)

59. Na figura 4 estão representadas duas rectas paralelas, a recta AB (em que A e B são pontos fixos) e a recta s. O ponto S é um ponto móvel, deslocando-se ao longo de toda a recta s. Para cada posição do ponto S , seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo BAS e seja *a*(*x*) a área do triângulo [ABS]. Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função *a*.
Numa composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função *a*.

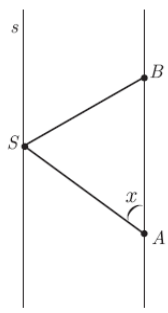
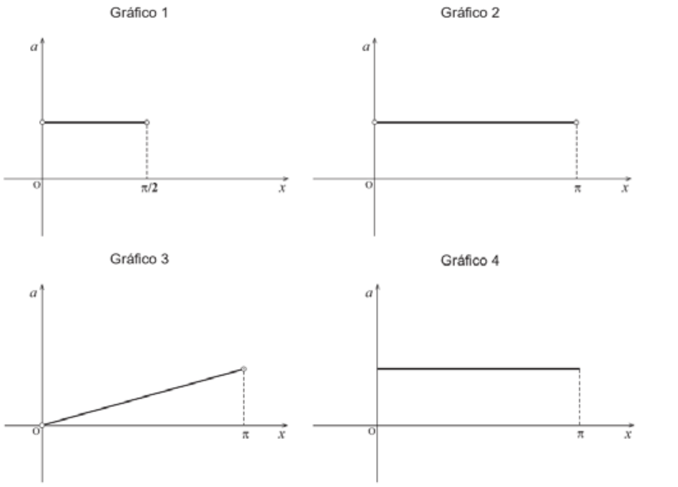


Fig. 4



(2ªfase)

60. Considere a função *g*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2 + sen(4x)$. Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

a) Determine $g'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

b) Estude a monotonia da função *g*, no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

(2ªfase)

E4 Seja a função *f*, de domínio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$, definida por $f(x) = \cos(x)$. Qual é o contradomínio de *f* ?

(A) [−1,0] (B) [0, 1] (C) $[0, \frac{1}{2}]$ (D) $[0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

(Época especial)

E5 Seja a função *f*, de domínio [0, π], definida por $f(x) = 2sen(x) \cdot \cos(x) + 2$. O gráfico da função *f* intersecta a recta y = 1 num só ponto. Determine, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, as coordenadas desse ponto.

(Época especial)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2009*)

61. Sejam *a*, *b*, *c*, e *d* as funções reais de variável real definidas por: $a(x) = 3 + \ln x$, $b(x) = e^x$, $c(x) = 10senx$ e $d(x) = 2 + tgx$
Considere que o domínio de cada uma das quatro funções é o conjunto dos números reais para os quais tem significado a expressão que a define. Qual é a função cujo gráfico tem mais do que uma assimptota?
(A) A função *a* (B) A função *b*
(C) A função *c* (D) A função *d*

(Intermédio 3)

62. Na figura 3 estão representados: • uma circunferência de centro *O* e raio 1; • dois pontos, *A* e *B*, sobre a circunferência, tais que [*AB*] é um diâmetro; • uma semi-recta $\dot{O}A$; • um segmento de recta [*PQ*]

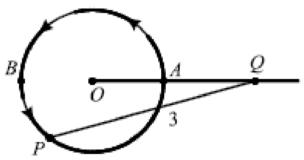


Figura 3

Considere que:
• o ponto *P*, partindo de *A*, se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado pelas setas da figura 3
• o ponto *Q* se desloca sobre a semi-recta $\dot{O}A$, acompanhando o movimento do ponto *P*, de tal forma que se tem sempre $\overline{PQ} = 3$
Para cada posição do ponto *P*, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem a semi-recta $\dot{O}A$ e por lado extremidade a semi-recta $\dot{O}P$ (ver figura 4).

Seja *d* a função que, a cada valor de *x* pertencente a [0,2π], associa a distância, *d*(*x*), do ponto *Q* ao ponto *O*.

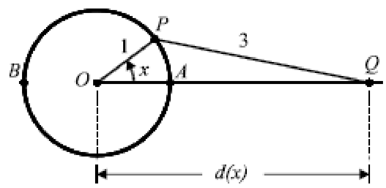


Figura 4

a) Considere as seguintes afirmações sobre a função *d* e sobre a sua derivada, *d'* (a função *d* tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio).
I. $d(0) = 2d(\pi)$
II. $\forall x \in [0, 2\pi], d'(x) < 0$
Elabore uma pequena composição na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira, ou falsa.
Nota: neste item, não defina analiticamente a função *d*; a sua composição deve apoiar-se na forma como esta função foi apresentada (para cada valor de *x*, tem-se que *d*(*x*) é a distância do ponto *Q* ao ponto *O*).

b) Defina analiticamente a função *d* no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ (isto é, determine uma expressão que dê o valor de *d*(*x*), para cada *x* pertencente a este intervalo).
Sugestão: trace a altura do triângulo [*OPQ*] relativa ao vértice *P*, designe por *R* o ponto de intersecção desta altura com a semi-recta $\dot{O}A$, e tenha em conta que $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ}$.

(Intermédio 3)

63. Para um certo número real positivo k , é contínua a função f, de domínio R, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_2 (k+x) & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{sen(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(1ª fase)

64. Na figura 1, está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1. Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência. Qual das expressões seguintes representa, em função de x, a área da parte sombreada?

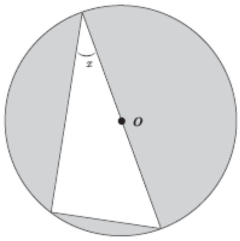


Fig. 1

(A) $\pi - sen(2x)$

(B) $\frac{\pi}{2} - sen(2x)$ (C) $\pi - 2sen(2x)$ (D) $\pi - \frac{sen(2x)}{4}$

(1ª fase)

65. Seja f a função, de domínio $[0, \frac{\pi}{2}]$, definida por

$f(x) = sen(2x)\cos x$.

a) Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 0.

b) No domínio indicado, determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo [ABC], em que:

• A é o ponto do gráfico da função f cuja ordenada é máxima;

• B e C são os pontos de intersecção do gráfico da função f com a recta de equação $y = 0{,}3$.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial. Desenhe o triângulo [ABC], assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

(2ª fase)

E6 Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = sen(2x)$. Qual é o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa ?

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

(Época especial)

E7 Seja a função f, de domínio $[0,\pi[$, definida por $f(x) = e^x \cdot \cos x$.

a) Estude, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, a função f, quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e, caso existam, os extremos relativos.

b) Determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, um valor, aproximado às décimas, da área do trapézio [OABC], em que:

• O é a origem do referencial;

• A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Oy;

• B é o ponto do gráfico de f, tal que a recta AB é paralela ao eixo Ox;

• C é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Ox.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico visualizado na calculadora, incluindo o referencial. Desenhe o trapézio [OABC] , assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

(Época especial)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2010*)

66. Na figura 2, está representado um triângulo rectângulo [ABC], cujos catetos, [AB] e [BC], medem 5 unidades. Considere que um ponto P se desloca sobre o cateto [BC], nunca coincidindo com B nem com C. Para cada posição do ponto P, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo BAP ($x \in]0, \frac{\pi}{4}[$). Seja *f* a função que, a cada valor de *x*, faz corresponder o perímetro do triângulo [APC]. Resolva os itens a) e b), usando exclusivamente métodos analíticos.

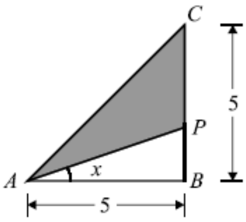


Figura 2

a) Mostre que $f(x) = \frac{5}{\cos x} - 5tgx + \sqrt{50} + 5$

b) Seja *r* a recta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$. Determine o declive da recta *r*

c) Existe um valor de *x* para o qual o perímetro do triângulo [APC] é igual a 16. Determine esse valor, arredondado às centésimas, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora. Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o ponto relevante para a resolução do problema.

(Intermédio 3)

67. Considere a função *f* , de domínio]–∞,2π], definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + e^x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \frac{x - \text{sen}(2x)}{x} & \text{se} \quad 0 < x \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Prove que a recta de equação *y*=*ax*+*b*, com *a* ≠ 0, é uma assimptota oblíqua do gráfico de *f*

b) Determine o valor de *b*, de modo que *f* seja contínua em $x = 0$

(1ª fase)

68. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência e o triângulo [OAB]. Sabe-se que:

• a circunferência tem diâmetro [OA];

• o ponto A tem coordenadas (2, 0);

• o vértice O do triângulo [OAB] coincide com a origem do referencial;

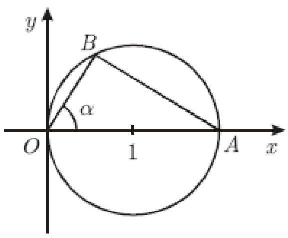


Figura 4

• o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.

Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que o perímetro do triângulo [OAB] é dado, em função de α, por $f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + sen\alpha)$

b) Determine o valor de α para o qual o perímetro do triângulo [OAB] é máximo.

(1ª fase)

69. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.
A Figura 6 e a Figura 7 representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas. Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.

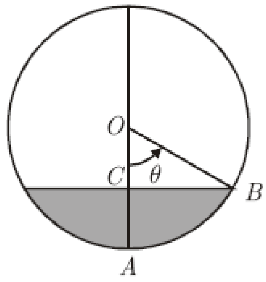


Figura 6

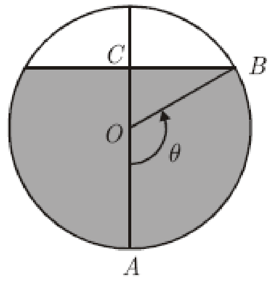


Figura 7

Sabe-se que:

• o ponto O é o centro da esfera;

• a esfera tem 6 metros de diâmetro;

• a amplitude θ, em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente.

A altura $\overline{AC}$, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ , por *h*, de domínio [0,π].

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $h(\theta) = 3 - 3\cos\theta$, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$

b) Resolva a condição $h(\theta) = 3$, $\theta \in]0, \pi[$. Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

(2ª fase)

$\boxed{\text{E8}}$ Considere a função *f*, de domínio]0,π[, definida por $f(x) = \ln x \times \cos x$. Sabe-se que:

• O é a origem do referencial;

• A é o ponto de intersecção do gráfico da função *f* com o eixo *Ox*, que se situa mais próximo da origem O;

• B é o ponto de intersecção do gráfico da função *f* com a recta bissectriz dos quadrantes pares.

Determine a área do triângulo [OAB], recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Na sua resposta, deve:

• reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar as coordenadas dos pontos A e B, arredondando às milésimas as coordenadas do ponto B ;

• desenhar o triângulo [OAB], assinalando os pontos que representam os seus vértices;

• apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

(Época especial)

$\boxed{\text{E9}}$ Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, *t* horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2\cos(\frac{\pi}{6}t) + 8$, em que $t \in [0, 24]$. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine a profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia.
b) Determine, recorrendo ao estudo da função derivada, a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

(Época especial)

(*Teste intermédio e exames Nacionais 2011*)

70. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{e\,x-e} & \text{se } 0<x<1 \\ x\,e^{-x}+2x & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes sem recorrer à calculadora.
a) Averigúe se a função f é contínua em $x = 1$
b) O gráfico da função f tem uma assimptota oblíqua. Determine a equação reduzida dessa assimptota.
c) Resolva, no intervalo $[1,+\infty[$, a equação $\dfrac{f(x)}{x} = e^x - \dfrac{2}{3}$

(Intermédio 3)

71. Na Figura 3, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1.

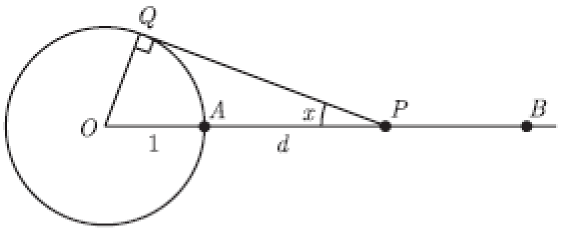


Figura 3

Sabe-se que:
• o ponto A pertence à circunferência;
• os pontos O, A, e B são colineares;
• o ponto A está entre o ponto O e o ponto B
• o ponto P desloca-se ao longo da semi-recta $\dot{A}B$, nunca coincidindo com o ponto A
• d é a distância do ponto A ao ponto P
• para cada posição do ponto P, o ponto Q é um ponto da circunferência tal que a recta PQ é tangente à circunferência;
• x é a amplitude, em radianos, do ângulo OPQ ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

Seja f a função, de domínio $]0, \frac{\pi}{2}[$, definida por $f(x) = \dfrac{1-senx}{senx}$. Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.
a) Mostre que $d = f(x)$
b) Considere a seguinte afirmação: «Quanto maior é o valor de x, menor é o valor de d»
Averigúe a veracidade desta afirmação, começando por estudar a função f quanto à monotonia.

(Intermédio 3)

72. Seja f a função, de domínio $]0,3[$, definida por $f(x) = x\ln x + sen(2x)$. O ponto A pertence ao gráfico da função f. Sabe-se que a recta tangente ao gráfico da função f no ponto A tem declive 3. Determine a abcissa do ponto A
Na resolução deste item deve:
• traduzir o problema por uma equação;
• resolver graficamente essa equação, recorrendo à calculadora;
• indicar o valor pedido arredondado às centésimas.
Deve reproduzir e identificar o gráfico, ou os gráficos, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, incluindo o referencial, e deve assinalar, no(s) gráfico(s), o(s) ponto(s) relevante(s).

(Intermédio 3)

73. Qual é o valor de $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\,sen^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$?

(A) 4 (B) 0 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

(1ª fase)

74. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

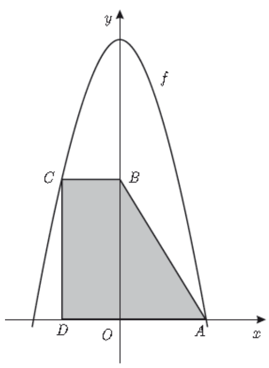


Figura 5

$f(x) = 4\cos(2x)$. Sabe-se que:
• os vértices A e D do trapézio [ABCD] pertencem ao eixo Ox
• o vértice B do trapézio [ABCD] pertence ao eixo Oy
• o vértice D do trapézio [ABCD] tem abcissa $-\frac{\pi}{6}$
• os pontos A e C pertencem ao gráfico de f
• a recta CD é paralela ao eixo Oy
Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.
a) Determine o valor exacto da área do trapézio [ABCD]
b) Seja f' a primeira derivada da função f, e seja f'' a segunda derivada da função f. Mostre que
$f(x) + f'(x) + f''(x) = -4(3\cos(2x) + 2sen(2x))$,
para qualquer número real x

(1ª fase)

75. Para um certo número real positivo, k, a função g definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}x}{3x} & \text{se} \quad x>0\\ \ln(k-x) & \text{se} \quad x\leq 0\end{cases}$$

é contínua.

Qual é o valor de k ?

(A) $\sqrt[3]{e}$ (B) e^3 (C) $\frac{e}{3}$ (D) $3e$

(2ª fase)

76. Na Figura 2, está representado, num referencial o. n. xOy, o círculo trigonométrico.

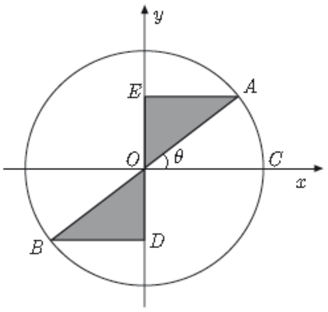


Figura 2

Sabe-se que:
- C é o ponto de coordenadas (1, 0)
- os pontos D e E pertencem ao eixo Oy
- [AB] é um diâmetro do círculo trigonométrico
- as rectas EA e BD são paralelas ao eixo Ox
- θ é a amplitude do ângulo COA
- $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Qual das expressões seguintes dá o perímetro da região sombreada na Figura 2?

(A) 2 (cos θ + senθ) (B) cos θ + sen θ

(C) 2 (1 + cos θ + sen θ) (D) 1 + cos θ + sen θ

(2ª fase)

77. Considere a função *f*, de domínio $]0, \frac{\pi}{2}[$, definida por

$f(x) = e^{2x} + \cos x - 2x^2$

Sabe-se que:
- B é um ponto do gráfico de *f*
- a recta de equação $y = 8x$ é paralela à recta tangente ao gráfico de *f* no ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto B

Na sua resposta, deve:
- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

(2ª fase)

78. Para *a*, *b* e *n*, números reais positivos, considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a\cos(nx) + b\operatorname{sen}(nx)$

Seja f'' a segunda derivada da função *f*. Mostre que $f''(x) + n^2 f(x) = 0$, para qualquer número real *x*

(2ª fase)

$\boxed{\text{E10}}$ Na Figura 2, estão representados, num referencial o. n. xOy, uma circunferência e o triângulo [OAB].

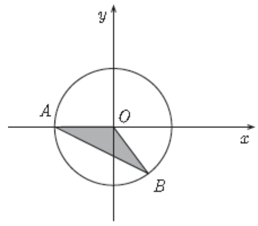


Figura 2

Sabe-se que:
- O é a origem do referencial;
- a circunferência tem centro no ponto O e raio 1
- A é o ponto de coordenadas (-1, 0)
- B pertence à circunferência e tem ordenada negativa;
- o ângulo AOB tem amplitude igual a $\frac{2\pi}{3}$ radianos. Qual é a área do triângulo [OAB]?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\sqrt{3}$

(Época especial)

$\boxed{\text{E11}}$ De duas funções *f* e *g* sabe-se que:
- *f* tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f(x) = \pi - 4\operatorname{sen}(5x)$
- *g* tem domínio $]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$ e g', primeira derivada de *g*, tem domínio $]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$, $g'(x) = \log_2(-\frac{\pi}{6} - x)$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Calcule o valor de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{f(x)-\pi}$

b) Estude a função *g* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$

Resolva o item c) recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

c) Seja *h* a função, de domínio $]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$

O ponto A pertence ao gráfico da função h

Sabe-se que a recta tangente ao gráfico da função *h* no ponto A é paralela ao eixo Ox

Determine a abcissa do ponto A.

Na sua resposta, deve:
- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto com arredondamento às décimas.

(Época especial)

Soluções: 1. 5 cm; 1/4 em 1/4”; ≈44,4cm/s; t∈[0,1/24[∪]5/24,7/24[∪]11/24,1/2] 2. π/4; não ∃ log(-a²); 1 e ±3 3. C 4. B; D
5. B 6. D 7. A 8. D 9. 7m; 1’; {5,25,65} e 5’’; 5m 10. C 11. {0,2π/3,π}; x=π/2 12. 12 km; π/6
13. A 15. B 16. π/4 17. 0; 1 (quadrado) 18. f cont. em R\{0}; máx=1+4/e 19. P_2(5π/6,-√3/2); cos(2x-5π/6)≤y≤sen(2x) ∧ 0≤x≤π/3 20. triang . rect. e isósc. 21. π 22. D 23. 18h50m; 38 24. 2031; 229^0
25. D 26. 8 27. A 28. cont. direita; (0,7;0,5) 29. 1 30. +∞ 31. A 32. [(5π-6√3)/6,2π+2]; 3,8 33. x=±π; ½; 5π/36
34. 4; crescente 35. A 36. 2; π/6 e 5π/6; -1,03 37. A 38. y=1/3; ln(3e); {0,1,4,5,6} 39. 4; 0,2 e 1,4 40. 1; 1 e -4
41. B 42. 2; 0 e π; π/4 e 5π/4 43. sim 44. 503; 3,4; 98; B 45. D 46. 6; 3,4 47. A 48. 0,42
49. A 50. x=π e x=2π 51. √3/2; 0,5 52. D 53. 152,1 e 147,1; 147,7 55. C 56. π/3 57. A 58. x=0; y=0
59. 2 60. 4; 1 e 3 61. B 62. I Verd.; $d(x)=\cos x+\sqrt{4-\text{sen}^2 x}$ 63. D 64. A 65. y=2x; 0,2 66. –10/3; 0,24
67. –2 68. π/4 69. π/2 70. É; y=2x; ln3 71. Verd. 72. 2,63 73. D 74. 7π/12 75. A 76. C
77. 0,91 79.

E1. +∞; 2,2 E2. B E3. 14 e 3 E4. B E5. (3π/4,1) E6. A E7. 1; 1,4 E8. 0,27
E9. 8; 6 E10. A E11. –1/20; não tem; 1,6

O professor: RobertOliveira