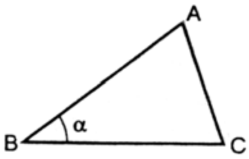
(*Exames Nacionais 2000*)

21.a) Seja [ABC] um triângulo isósceles em que $\overline{BA}=\overline{BC}$. Seja α a amplitude do ângulo ABC. Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada por $\frac{\overline{BC}^2}{2}\times sen\,\alpha$ (α ∈]0,π[)



b) Considere agora um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio 1. Utilize o resultado anterior para mostrar que a área do polígono é dada por $A_n=\frac{n}{2}\times sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

c) Determine e interprete o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

(Prova Modelo)

22. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}$ sen x=0 (B) $\lim\limits_{x\to+\infty}$ sen x=+∞

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}$ sen x=1 (D) Não existe $\lim\limits_{x\to+\infty}$ sen x

(1ªchamada)

23. No presente ano civil, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente, por

$f(n)=12{,}2+2{,}64\ \text{sen}\,\frac{\pi(n-81)}{183}$, n∈{1,2,3,...,366} (o argumento da função seno está expresso em radianos).

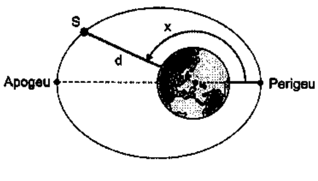
a) No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às 6 e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondado às unidades).

Notas: recorde que, no presente ano, o mês de Fevereiro teve 29 dias; sempre que, nos cálculos, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

b) Em alguns dias do ano, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é superior a 14,7 horas. Recorrendo à sua calculadora, determine em quantos dias do ano é que isso acontece. Indique como procedeu.

(1ªchamada)

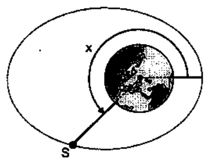
24. Um satélite S tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura. Tenha em atenção que os elementos nela desenhados não estão na mesma escala. Na elipse, estão assinalados 2 pontos: o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra; o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra.



O ângulo x, assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra; o seu lado origem passa no *perigeu*, o seu lado extremidade passa no satélite e a sua amplitude está compreendida entre 0 e 360 graus. A distância d, em km, do satélite ao centro da Terra, é dada por $d=\frac{7820}{1+0{,}07\cos x}$. Considere que a Terra é uma esfera de raio 6378 km.

a) Determine a altitude do satélite (distância à superfície da Terra) quando este se encontra no *apogeu*. Apresente o resultado em km, arredondado às unidades.

b) Num certo instante, o satélite está na posição indicada na figura.
A distância do satélite ao centro da terra é, então, de 8200 km. Determine o valor de x, em graus, arredondado às unidades.



(2ªchamada)

25. Considere a função h definida em R por h(x)=*sen*x. Qual das seguintes equações pode definir uma recta tangente ao gráfico de h?

(A) y=2x+π (B) y=-2

(C) y=√2 x-9 (D) y=x

(2ªfase)

26. Considere a função f, de domínio R, definida por f(x)=2x-cos x

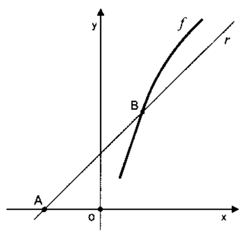
a) Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, 1 zero, no intervalo]0,π[.

b) Seja f ' a função derivada de f. Mostre que f '(x)>0, ∀x∈R, e justifique que o zero de f, cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

c) Na figura abaixo estão representadas: parte do gráfico da função f; parte de uma recta r, cuja inclinação é 45^0, que contém o ponto A(-3,0) e que intersecta o gráfico da função f no ponto B.

Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo [AOB], onde O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades.

(2ªfase)



(*Exames Nacionais 2001*)

27. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{sen\, x}$

(A) -∞ (B) 0 (C) 1 (D) +∞

(Prova Modelo)

28. Considere a função h, de domínio R, definida por

$$h(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x} & se\ x<0 \\ \frac{1}{2} & se\ x=0 \\ \frac{sen\, x}{2x} & se\ x>0 \end{cases}.$$

28.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as 2 alíneas seguintes:

a) Estude a função h quanto à continuidade no ponto 0. (Deve indicar, justificando, se a função h é contínua nesse ponto e, no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto.)

b) Considere a função j, de domínio R\{0}, definida por j(x)= $\frac{1}{3x}$.
Mostre que, no intervalo [-1,1000π], os gráficos de j e de h se intersectam em 1001 pontos.

28.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor abcissa positiva. Determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, com aproximação às décimas).

(Prova Modelo)

29. Considere a função f, de domínio R, definida por

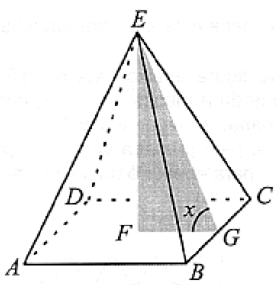
f(x)= $\dfrac{x+3sen\,\frac{x}{2}}{\ln(e^x+4)}$

a) Sabe-se que existe $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x) e que o seu valor é um número inteiro. Recorrendo à sua calculadora, conjecture-o. Explique como procedeu.

b) Será conclusivo, para a determinação do valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x), um método que se baseie exclusivamente na utilização da calculadora? Justifique a sua resposta.

(Prova Modelo)

30. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.
Sabe-se que: a base da pirâmide tem centro F e lado 2; G é o ponto médio da aresta [BC]; x designa a amplitude do ângulo FGE.



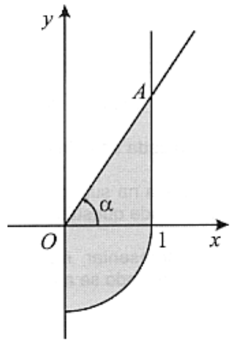
a) Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x, por A(x)= $\dfrac{4\cos x+4}{\cos x}$

($x\in\ ]0,\pi/2[$)

b) Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}$ A(x) e interprete geometricamente o valor obtido.

(1ª chamada)

31. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy: um quarto de círculo, de centro na origem e raio1; uma semi-recta paralela ao eixo Oy, com origem no ponto (1,0); um ponto A pertencente a esta semi-recta; um ângulo de amplitude α, cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta AO.
Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada, em função de α?

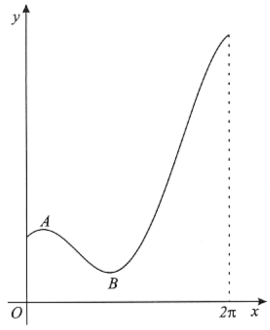


(A) $\frac{\pi}{4}+\frac{tg\,\alpha}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}+\frac{2}{tg\,\alpha}$

(C) $\pi+\frac{tg\,\alpha}{2}$ (D) $\pi+\frac{2}{tg\,\alpha}$

(2ª chamada)

32. Na figura está representado o gráfico da função f, de domínio [0,2π], definida por f(x)=x+2cosx



A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de f.

32.1. Sem recorrer à calculadora, resolva as 2 alíneas seguintes.

a) Mostre que a ordenada do ponto A é $\frac{\pi+6\sqrt{3}}{6}$ e que a do ponto B é $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{6}$. b) Qual é o contradomínio de f?

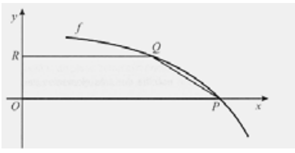
32.2. Considere a recta tangente ao gráfico de f no ponto A. Esta recta intersecta o gráfico num outro ponto C. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa do ponto C (apresente o resultado arredondado às décimas). Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

(2ª chamada)

33. Considere a função f, de domínio]-π,π[, definida por f(x)= $\frac{\cos x}{1+\cos x}$. Sem recorrer à calculadora, resolva as 3 alíneas seguintes.

a) Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

b) Mostre que a função f tem um máximo e determine-o.

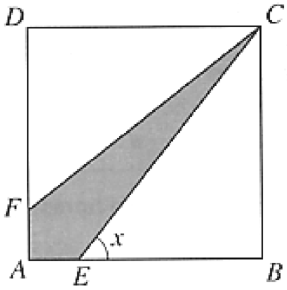


c) Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, uma parte do gráfico da função f. Na mesma figura está também representado um trapézio [OPQR]. O ponto O é a origem do referencial, e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy, respectivamente. Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f. Sabendo que o ponto R tem ordenada 1/3, determine a área do trapézio.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2002*)

34. Na figura está representado um quadrado [ABCD], de lado 1.



O ponto E desloca-se sobre o lado [AB], e o ponto F desloca-se sobre o lado [AD], de tal forma que se tem sempre $\overline{AE} = \overline{AF}$. Para cada posição do ponto E, seja x a amplitude do ângulo BEC (x∈]π/4,π/2[).
Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva as 3 alíneas seguintes:

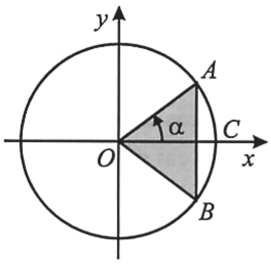
a) Mostre que o perímetro do quadrilátero [CEAF] é dado, em função de x, por $f(x) = 2 - \frac{2}{tgx} + \frac{2}{senx}$.

b) Calcule $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

c) Mostre que $f'(x) = \frac{2-2\cos x}{sen^2 x}$ e estude a função quanto à monotonia.

(1ª chamada)

35. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico e um triângulo [OAB].



Os pontos A e B pertencem à circunferência; o segmento [AB] é perpendicular ao semieixo positivo Ox; o ponto C é o ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox.
Seja α a amplitude do ângulo COA (α∈0,π/2[). Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo [OAB], em função de α?

(A) senα·cosα (B) $\frac{tg\alpha \cdot \cos\alpha}{2}$

(C) tgα·senα (D) $\frac{tg\alpha \cdot sen\alpha}{2}$

(2ª chamada)

36. De uma função f, de domínio [-π,π], sabe-se que a sua derivada f ´ está definida igualmente no intervalo [-π,π] e é dada por f ´(x)=x+2cos x

a) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as 2 alíneas seguintes:

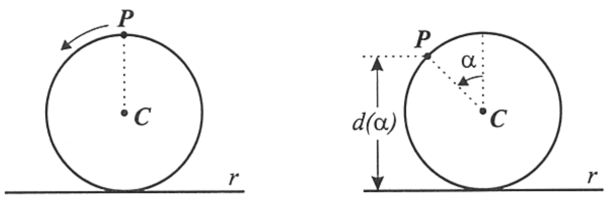
a1) Determine o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.

a2) Estude a função f quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão.

b) O gráfico de f contém um único ponto onde a recta tangente é paralela ao eixo Ox. Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto. Explique como procedeu.

(2ª chamada)

37. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma recta r. Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se à distância de 2 unidades da recta r.



Seja d(α) a distância de P a r, após uma rotação de amplitude α. Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer nº real positivo α?

(A) d(α)=1+cosα (B) d(α)=2+senα
(C) d(α)=1-cosα (D) d(α)=2-senα

(2ª fase)

38. Considere as funções f e g, de domínio R, definidas por
$f(x)=\frac{1}{3}+2e^{1-x}$ g(x)=2sen x-cos x

a) Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as 2 alíneas seguintes:

a1) Estude a função f quanto à existência de assimptotas paralelas aos eixos coordenados.

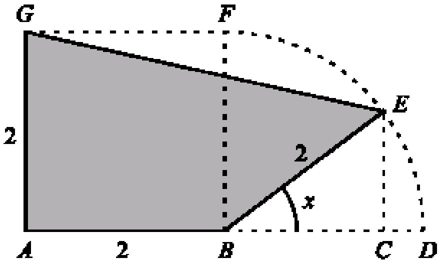
a2) Resolva a equação f(x)=g(π), apresentando a solução na forma ln(ke), onde k representa um nº real positivo.

b) Recorrendo à calculadora, determine as soluções inteiras da inequação f(x)>g(x), no intervalo [0,2π]. Explique como procedeu.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2003*)

39. Na figura está representado a sombreado um polígono [ABEG].



Tem-se que: [ABFG] é um quadrado de lado 2; FD é um arco de circunferência de centro em B; o ponto E move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento [BD], de tal forma que se tem sempre
[EC]⊥[BD]; x designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBE, $x \in [0,\pi/2]$

a) Mostre que a área do polígono [ABEG] é dada, em função de x, por $A(x)=2(1+\operatorname{sen}x+\cos x)$

Sugestão: pode ser-lhe útil considerar o trapézio [ACEG]

b) Determine A(0) e A(π/2). Interprete geometricamente cada um dos valores obtidos.

c) Recorra à calculadora para determinar graficamente as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Quais são os valores de x para os quais a área do polígono [ABEG] é 4,3?

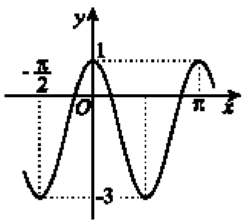
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente os valores pedidos na forma de dízima, arredondados às décimas.

(1ª chamada)

40. Considere a expressão $f(x)=a+b\operatorname{sen}^2x$. Sempre que se atribui um valor real a a e um valor real a b, obtemos uma função de domínio R.

a) Nesta alínea, considere $a=2$ e $b=-5$. Sabe-se que $\operatorname{tg}\theta=1/2$. Sem recorrer à calculadora, calcule $f(\theta)$.

b) Para um certo valor de a e um certo valor de b, a função f tem o seu gráfico parcialmente representado na figura junta.

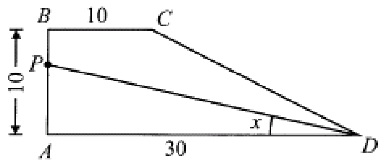


Conforme essa figura sugere, tem-se: o contradomínio de f é [-3,1]; 0 e π e são maximizantes; -π/2 e π/2 são minimizantes.

Determine a e b.

(2ª chamada)

41. Na figura está representado um trapézio rectângulo [ABCD], cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento. Considere que um ponto P se desloca sobre o lado [AB]. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PDA. Pretende-se determinar o valor de x para o qual o segmento [PD] divide o trapézio em 2 figuras com a mesma área. Qual das equações seguintes traduz este problema?



(A) $\frac{30^2 \operatorname{sen} x}{2} = 100$ (B) $\frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2} = 100$

(C) $\frac{30 \times 10 \operatorname{sen} x}{4} = 150$ (D) $\frac{30 \times 10 \operatorname{tg} x}{4} = 150$

(2ª fase)

42. Considere a função f, de domínio [-π/2,3π/2], definida por $f(x)=x+\operatorname{sen} x$. Sem recorrer à calculadora, resolva as 3 alíneas seguintes.

a) Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $f'(0)$.

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

c) Determine os valores de x, pertencentes ao intervalo [-π/2,3π/2], tais que $f(x)=x + \cos x$.

(2ª fase)

43. A Rita está a participar num concurso de lançamentos de papagaios de papel. No regulamento do concurso, estão as condições de apuramento para a final, que se reproduzem a seguir.

Após um certo instante, indicado pelo júri:
- o papagaio não pode permanecer no ar mais do que um minuto;
- o papagaio tem de permanecer, pelo menos durante 12 segundos seguidos, a uma altura superior a 10 metros;
- o papagaio tem de ultrapassar os 20 metros de altura.

Admita que a distância, em metros, do papagaio da Rita ao solo, t segundos após o instante indicado pelo júri, é dado por $d(t)=9{,}5+7\operatorname{sen}(t^2/200)+5\cos(t/4)$

(os argumentos das funções seno e co-seno estão expressos em radianos).

Note-se que, a partir do instante em que o papagaio atinge o solo, a distância deixa de ser dada por esta expressão, uma vez que passa a ser (naturalmente) igual a zero.

Deverá a Rita ser apurada para a final?

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, com cerca de 10 linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2004*)

44. A figura 1 representa um depósito de forma cilíndrica, que contém um certo volume de um combustível.

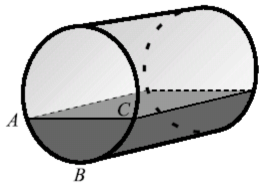


Figura 1

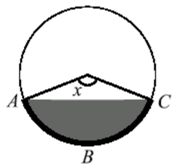


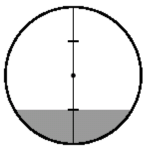
Figura 2

Admita que a função V, de domínio $[0,2\pi]$, definida por $V(x)=80(x-\operatorname{sen}x)$, dá o volume, em metros cúbicos, de combustível existente no depósito, em função da amplitude x, em radianos, do arco ABC (que, como se sabe, é igual à amplitude do ângulo ao centro correspondente, assinalado na figura 2).

a) Qual é a capacidade total do depósito, em metros cúbicos? Apresente o resultado arredondado às unidades.
Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

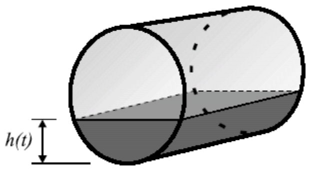
b) Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: *Qual terá de ser a amplitude, em radianos, do arco ABC, para que existam 300 m^3 de combustível no depósito*? Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

c) Determine, em metros cúbicos, o volume do combustível existente no depósito, no momento em que a sua altura é ¼ da altura máxima.



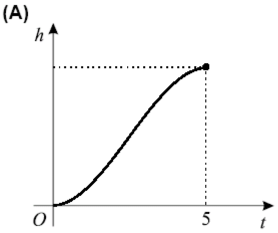
Apresente o resultado arredondado às unidades.
Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

d) Admita agora que o depósito está vazio e que, num certo instante, se começa a introduzir combustível a uma taxa constante, até ficar cheio, o que acontece ao fim de cinco horas.

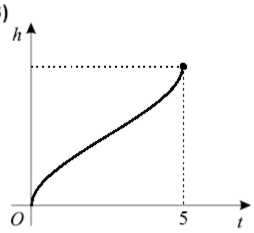


Seja h(t) a altura do combustível no depósito, t horas após o instante em que começa a ser introduzido.
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h?
Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, indique as razões que o levam a rejeitar os restantes gráficos (indique três razões, uma por cada gráfico rejeitado).

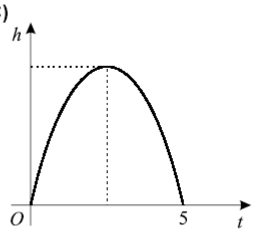
(A)



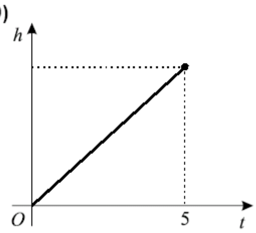
(B)



(C)

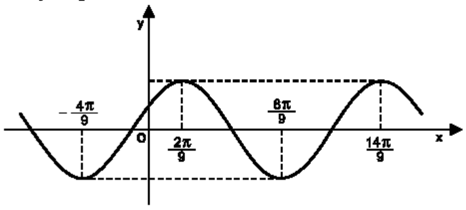


(D)



(1ª fase)

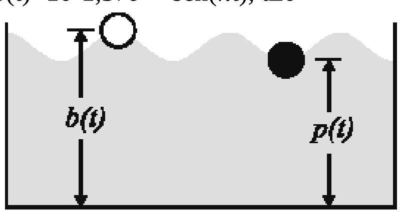
45. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.



Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?
(A) $\pi/9$ (B) $2\pi/9$ (C) $2\pi/3$ (D) $4\pi/3$

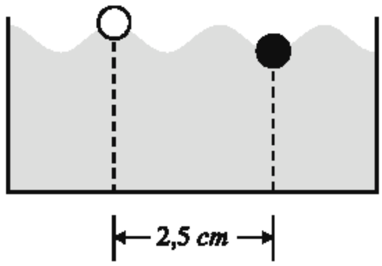
(2ª fase)

46. Duas bolas de plástico com o mesmo raio, uma branca e outra preta, flutuam na superfície de um líquido contido num recipiente. Por acção de uma força exterior, o líquido perdeu o estado de repouso em que se encontrava, tendo a distância de cada uma das bolas à base do recipiente deixado de ser constante.
Designando por b(t) e p(t) as distâncias, em cm, dos centros das bolas (branca e preta, respectivamente) à base do recipiente, t segundos após o início da perturbação, admita que se tem: $b(t)=10+e^{-0,1t}\operatorname{sen}(\pi t),\ t\geq 0$
$p(t)=10-1,37e^{-0,1t}\operatorname{sen}(\pi t),\ t\geq 0$



a) Sem recorrer à calculadora, resolva o seguinte problema:
Durante os primeiros cinco segundos após o início da perturbação (instantes 0 e 5 incluídos), houve alguns instantes em que as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente. Quantas vezes isso aconteceu?

b) Determine a distância que vai do centro da bola branca ao centro da bola preta, meio segundo após o início da perturbação, sabendo que, nesse instante, a distância entre as respectivas projecções horizontais (na base do recipiente) é de 2,5 cm. Apresente o resultado em cm, arredondado às décimas.



Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(2ª fase)