(*Testes intermédios e exames 2010/2011*)

211. Os vinte e cinco alunos de uma turma do 12.º ano distribuem-se, por idade e sexo, de acordo com a tabela seguinte.

	17 anos	18 anos
Rapazes	8	2
Raparigas	11	4

Escolhe-se, ao acaso, um dos vinte e cinco alunos da turma.
Sejam A e B os acontecimentos:
A: «O aluno escolhido é do sexo masculino»
B: «O aluno escolhido tem 18 anos»
Qual é o valor da probabilidade condicionada P(B|A)?
(A) $\frac{2}{25}$ (B) $\frac{14}{25}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{5}$

(Intermédio 1)

212. O terceiro elemento de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 55. Qual é o penúltimo elemento dessa linha?
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

(Intermédio 1)

213. A Filipa pratica atletismo. O tempo X, em segundos, que a Filipa demora a correr os 400 metros é uma variável aleatória bem modelada por uma distribuição normal de valor médio 80. Sabe-se que $P(76 < X < 80) = 0,4$. Para um certo valor de a, tem-se $P(X > a) = 0,1$. Qual é o valor de a?
(A) 78 (B) 82 (C) 84 (D) 88

(Intermédio 1)

214. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado quinze vezes. Indique qual dos acontecimentos seguintes tem probabilidade igual a

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{15} - {}^{15}C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{14}$$

(A) A face 4 sai pelo menos uma vez.
(B) A face 4 sai pelo menos duas vezes.
(C) A face 4 sai no máximo uma vez.
(D) A face 4 sai no máximo duas vezes.

(Intermédio 1)

215. A Ana dispõe de sete cartas todas diferentes: quatro cartas do naipe de espadas e três cartas do naipe de copas.
a) A Ana vai dispor essas sete cartas sobre uma mesa, lado a lado, da esquerda para a direita, de modo a formar uma sequência com as sete cartas. A Ana pretende que a primeira e a última cartas da sequência sejam ambas do naipe de espadas. Quantas sequências diferentes, nestas condições, pode a Ana fazer?
b) Admita que a Ana baralha essas sete cartas e, em seguida, tira três, ao acaso. Qual é a probabilidade de, nessas três cartas, haver pelo menos uma carta de copas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.
c) As cartas de que a Ana dispõe são:
• o ás, o rei, a dama e o valete do naipe de espadas;
• o rei, a dama e o valete do naipe de copas.
Depois de introduzir as sete cartas num saco, a Ana retira uma carta ao acaso. Sejam A e B os acontecimentos:
A: «A carta retirada é do naipe de espadas»
B: «A carta retirada é um rei»
Averigúe se os acontecimentos A e B são independentes.

(Intermédio 1)

216. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos. Sabe-se que:
• P(B) = 0,3
• P(A|B)= 0,2
• $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 0,4$
Determine P(B|A). Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(Intermédio 1)

217. Uma caixa contém quatro bolas brancas e quatro bolas pretas. Considere a experiência seguinte. *Tira-se, ao acaso, uma bola da caixa. Se a bola for branca, repõe-se na caixa; se a bola for preta, deixa-se ficar fora da caixa. Em seguida, tira-se, também ao acaso, uma segunda bola da caixa, e procede-se do mesmo modo: se a bola for branca, repõe-se na caixa; se a bola for preta, deixa-se ficar fora da caixa.*
Seja X o número de bolas que, no final da experiência, estão fora da caixa. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X Apresente as probabilidades na forma de fracção.

(Intermédio 1)

218. Para um certo número real a, a tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	-1	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	a

Qual é o valor de a?
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{6}$

(Intermédio 2)

219. Um saco contém dezasseis bolas, numeradas de 1 a 16. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas dessas dezasseis bolas e adicionam-se os respectivos números.
Qual é a probabilidade de a soma obtida ser igual a 7?
(A) $\frac{1}{35}$ (B) $\frac{1}{40}$ (C) $\frac{1}{45}$ (D) $\frac{1}{50}$

(Intermédio 2)

220. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos, ambos com probabilidade diferente de zero. Prove que

$$P(A \cup B) < P(A \mid B) \times P(\overline{B}) \Leftrightarrow P(A) + P(B) < P(A \mid B)$$

(Intermédio 2)

221. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) independentes, com $P(A) \neq 0$. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?
(A) P(A)+P(B) = 1 (B) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(C) $P(A) \neq P(B)$ (D) P(B |A)=P(B)

(1ª fase)

222. O código de um auto-rádio é constituído por uma sequência de quatro algarismos. Por exemplo, 0137. Quantos desses códigos têm dois e só dois algarismos iguais a 7 ?
(A) 486 (B) 810 (C) 432 (D) 600

(1ª fase)

223. Uma companhia aérea vende bilhetes a baixo custo exclusivamente para viagens cujos destinos sejam Berlim ou Paris.

a) Nove jovens decidem ir a Berlim e escolhem essa companhia aérea. Cada jovem paga o bilhete com cartão multibanco, ou não, independentemente da forma de pagamento utilizada pelos outros jovens. Considere que a probabilidade de um jovem utilizar cartão multibanco, para pagar o seu bilhete, é igual a 0,6. Determine a probabilidade de exactamente 6 desses jovens utilizarem cartão multibanco para pagarem o seu bilhete. Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

b) A companhia aérea constatou que, quando o destino é Berlim, 5% dos seus passageiros perdem o voo e que, quando o destino é Paris, 92% dos passageiros seguem viagem. Sabe-se que 30% dos bilhetes a baixo custo que a companhia aérea vende têm por destino Berlim. Determine a probabilidade de um passageiro, que comprou um bilhete a baixo custo nessa companhia aérea, perder o voo. Apresente o resultado na forma de dízima.

(1ª fase)

224. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A\subset\Omega$ e $B\subset\Omega$) , com $P(A) \neq 0$. Mostre que

$$P(B \mid A) \geq 1 - \frac{1-P(B)}{P(A)}$$

(1ª fase)

225. Os medicamentos produzidos num laboratório são embalados em caixas de igual aspecto exterior e indistinguíveis ao tacto. Um lote contém dez caixas de um medicamento X e vinte caixas de um medicamento Y. Desse lote, retiram-se, ao acaso, simultaneamente, quatro caixas para controlo de qualidade. Qual é a probabilidade de as caixas retiradas serem todas do medicamento Y?

(A) $\frac{^{10}C_4}{^{30}C_4}$ (B) $\frac{^{20}C_4}{^{30}C_4}$ (C) $\frac{4}{^{30}C_4}$ (D) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

(2ª fase)

226. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$2a$	a	b	b	b	$\frac{1}{10}$

Sabe-se que:
- *a* e *b* são números reais
- $P(X \leq 1) = 3P(X = 5)$

Qual é o valor de *b* ?

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{4}{15}$ (C) $\frac{7}{30}$ (D) $\frac{1}{5}$

(2ª fase)

227. Seja *a* um número real positivo e seja X uma variável aleatória com distribuição Normal N(0, 1). Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $P(X\leq a)+P(X\geq -a)= 0$ (B) $P(X\leq a)=P(X\geq -a)$
(C) $P(X\leq a)+P(X\geq -a)= 1$ (D) $P(X\leq a)=P(X>a)$

(2ª fase)

228. A MatFinance é uma empresa de consultoria financeira.

a)Dos funcionários da MatFinance, sabe-se que:
- 60% são licenciados;
- dos que são licenciados, 80% têm idade inferior a 40 anos;
- dos que não são licenciados, 10% têm idade inferior a 40 anos.

Determine a probabilidade de um desses funcionários, escolhido ao acaso, ser licenciado, sabendo que tem idade não inferior a 40 anos. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Considere o problema seguinte. «*Foi pedido a 15 funcionários da MatFinance que se pronunciassem sobre um novo horário de trabalho. Desses 15 funcionários, 9 estão a favor do novo horário, 4 estão contra, e os restantes estão indecisos. Escolhe-se, ao acaso, 3 funcionários de entre os 15 funcionários considerados. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os 3 funcionários, de forma que pelo menos 2 dos funcionários escolhidos estejam a favor do novo horário de trabalho?*»

Apresentam-se, em seguida, duas respostas.

Resposta I: $^{15}C_3 - {^6C_3}$ Resposta II: $6 \times {^9C_2} + {^9C_3}$

Apenas uma das respostas está correcta. Elabore uma composição na qual:
- identifique a resposta correcta;
- explique um raciocínio que conduza à resposta correcta;
- proponha uma alteração na expressão correspondente à resposta incorrecta, de modo a torná-la correcta;
- explique, no contexto do problema, a razão da alteração proposta.

(2ª fase)

E22 Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A\subset\Omega$ e $B\subset\Omega$). Sabe-se que:
- $P(\overline{A})= 0,9$
- $P(A\cup B)= 0,73$
- A e B são acontecimentos independentes

Qual é o valor de P(B)?

(A) 0,63 (B) 0,657 (C) 0,073 (D) 0,7

(1ª fase especial)

E23 Uma turma do 12.º ano de uma escola secundária tem 18 raparigas e 10 rapazes. Nessa turma, 20 alunos têm Inglês. Dos alunos da turma que têm Inglês só 4 são rapazes. Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa turma. Qual é a probabilidade de o aluno escolhido não ter Inglês, sabendo que é rapariga?

(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{1}{4}$

(1ª fase especial)

E24 O terceiro elemento de uma linha do triângulo de Pascal é 61 075. A soma dos três primeiros elementos dessa linha é 61 426. Qual é a soma dos três últimos elementos da linha seguinte?

(A) 61 425 (B) 61 426 (C) 61 777 (D) 122 501

(1ª fase especial)

E25 Na Figura 3, está representado um tetraedro com as faces numeradas de 1 a 4.

a) O João tem um catálogo de tintas com 12 cores diferentes, uma das quais é a sua preferida.

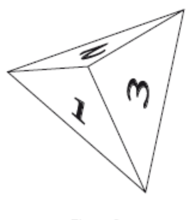

Figura 3

O João selecciona, ao acaso, 4 cores diferentes para pintar as quatro faces do tetraedro. Cada uma das faces é pintada com uma única cor. Determine a probabilidade de o tetraedro ter uma das faces pintadas com a cor preferida do João. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Considere a experiência aleatória que consiste em lançar 3 vezes o tetraedro representado na Figura 3 e registar, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo. Seja X a variável aleatória «número de vezes que, nesses três lançamentos do tetraedro, se regista o número 1». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fracção.

c) Considere, agora, a experiência aleatória que consiste em lançar 4 vezes o tetraedro representado na Figura 3 e registar, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo. Sejam I e J os acontecimentos seguintes.

I : «o número registado nos três primeiros lançamentos do tetraedro é o número 2»;

J : «a soma dos números registados nos quatro lançamentos do tetraedro é menor do que 10».

Indique o valor de P(J|I) sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada. Numa composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de P(J|I) no contexto da situação descrita.

(1ª fase especial)

E26 Num determinado clube desportivo praticam-se apenas dois desportos, futebol e andebol. Dos jovens inscritos nesse clube, 28 jogam apenas futebol, 12 jogam apenas andebol e 12 jogam futebol e andebol. Escolhe-se, ao acaso, um dos jovens inscritos. Qual é a probabilidade de o jovem escolhido jogar andebol sabendo que joga futebol?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{7}{10}$ (D) $\frac{3}{7}$

(especial normal)

E27 Lança-se cinco vezes consecutivas um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e regista-se, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para cima. Considere os acontecimentos seguintes.

I: «sair face ímpar em exactamente dois dos cinco lançamentos»;

J: «sair face 4 em exactamente dois dos cinco lançamentos».

Qual dos acontecimentos seguintes é mais provável?

(A) acontecimento I (B) acontecimento I

(C) acontecimento J (D) acontecimento J

(especial normal)

E28 Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e B⊂Ω) incompatíveis. Sabe-se que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}3$ e que P(A) =0,5. Qual é o valor de P(B)?

(A) 0,2 (B) 0 (C) 0,5 (D) 0,4

(especial normal)

E29 Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos tais que A⊂Ω e B⊂Ω, com P(B)≠0. Mostre que

$$P(\overline{A \cap B} \mid B) = P(\bar{A} \mid B)$$

(especial normal)

E30 Considere as 13 cartas do naipe de copas: ás, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do 2 ao 10).

a) As cartas vão ser dispostas, ao acaso, sobre uma mesa, lado a lado, de modo a formarem uma sequência de 13 cartas. Determine o número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas.

b) Determine a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, 4 das 13 cartas do naipe de copas, obter pelo menos duas figuras. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(especial normal)

(*Testes intermédios e exames 2011/2012*)

229. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos incompatíveis (A⊂Ω e ⊂Ω). Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) P(A∪B) = P(A∩B) (B) P(A) + P(B) = 1

(C) P(A∩B) = 0 (D) P(A∩B) = P(A)× P(B)

(Intermédio 1)

230. O comprimento, em centímetros, das peças produzidas por uma máquina é uma variável aleatória X com distribuição normal, de valor médio 6. Sabe-se que P(X > 7) = 0,1. Escolhe-se ao acaso uma peça produzida por essa máquina e mede-se o seu comprimento. Considere os acontecimentos:

A: «o comprimento da peça escolhida é inferior a 7cm»

B: «o comprimento da peça escolhida é superior a 6cm»

Qual é o valor da probabilidade condicionada P(A|B)?

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{7}{9}$ (D) $\frac{8}{9}$

(Intermédio 1)

231. Uma turma de 12.º ano é constituída por 14 raparigas e 10 rapazes.

a) Os alunos da turma vão dispor-se em duas filas para tirarem uma fotografia de grupo. Combinaram que:

• os rapazes ficam sentados na fila da frente;

• as raparigas ficam na fila de trás, em pé, ficando a delegada numa das extremidades e a subdelegada na outra extremidade, podendo cada uma destas duas alunas ocupar qualquer uma

das extremidades. Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de, nestas condições, os jovens se poderem dispor para a fotografia.

Nota – Não calcule o valor da expressão que escreveu.

b) Vão ser escolhidos aleatoriamente dois jovens desta turma, para constituirem uma comissão que participará num congresso. Seja X o número de raparigas que integram a comissão. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X. Apresente as probabilidades na forma de fração irredutível.

(Intermédio 1)

232. Uma escola secundária tem alunos de ambos os sexos em todos os anos de escolaridade. Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola. Sejam A e B os acontecimentos:
A: «O aluno é do sexo feminino»
B: «O aluno está no 12.º ano»
Qual das expressões seguintes designa o acontecimento «o aluno é do sexo masculino e não está no 12.º ano»?
(A) $A \cap B$ (B) $\overline{A \cap B}$ (C) $A \cup B$ (D) $\overline{A \cup B}$

(Intermédio 2)

233. Uma caixa, que designaremos por caixa 1, tem uma bola branca e duas bolas pretas.
a) Considere a experiência que consiste em tirar, ao acaso, uma bola da caixa 1, observar a sua cor e voltar a colocar a bola na caixa. Efetua-se esta experiência cinco vezes. Qual é a probabilidade de sair bola preta pelo menos quatro vezes?
b) Outra caixa, que designaremos por caixa 2, tem três bolas brancas e quatro bolas pretas. Realiza-se a seguinte experiência: ao acaso, tiram-se duas bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2; em seguida, tiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2. Sejam A e B os acontecimentos:
A: «As bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor»
B: «As bolas retiradas da caixa 2 são da mesma cor»
Determine o valor de $P(\overline{B} \mid A)$, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada. Numa pequena composição, justifique a sua resposta. A sua composição deve contemplar:
- o significado de $P(\overline{B} \mid A)$, no contexto da situação descrita;
- a explicação do conteúdo da caixa 2 após a realização do acontecimento A
- a explicação do número de casos possíveis;
- a explicação do número de casos favoráveis;
- a apresentação do valor da probabilidade pedida.

(Intermédio 2)

234. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e ⊂Ω). Sabe-se que:
- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$
- $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

Qual é o valor de $P(B)$?
(A) $\frac{5}{14}$ (B) $\frac{9}{14}$ (C) $\frac{9}{20}$ (D) $\frac{11}{20}$

(1.ª fase)

235. Para assistirem a um espetáculo, o João, a Margarida e cinco amigos sentam-se, ao acaso, numa fila com sete lugares.
Qual é a probabilidade de o João e a Margarida não ficarem sentados um ao lado do outro?
(A) $\frac{2\times 5!}{7!}$ (B) $\frac{5!}{7!}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$

(1.ª fase)

236. Numa caixa com 12 compartimentos, pretende-se arrumar 10 copos, com tamanho e forma iguais: sete brancos, um verde, um azul e um roxo. Em cada compartimento pode ser arrumado apenas um copo. De quantas maneiras diferentes se podem arrumar os 10 copos nessa caixa?
(A) ${}^{12}A_7 \times 3!$ (B) ${}^{12}A_7 \times {}^{5}C_3$ (C) ${}^{12}C_7 \times {}^{5}A_3$ (D) ${}^{12}C_7 \times {}^{12}A_3$

237. Numa escola, realizou-se um estudo sobre os hábitos alimentares dos alunos. No âmbito desse estudo, analisou-se o peso de todos os alunos. Sabe-se que:
- 55% dos alunos são raparigas;
- 30% das raparigas têm excesso de peso;
- 40% dos rapazes não têm excesso de peso.

a) Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola. Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz, sabendo que tem excesso de peso. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
b) Considere agora que a escola onde o estudo foi realizado tem 200 alunos. Pretende-se escolher, ao acaso, três alunos para representarem a escola num concurso. Determine a probabilidade de serem escolhidos duas raparigas e um rapaz. Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

(1.ª fase)

238. Num saco estão cinco bolas, indistinguíveis ao tato, cada uma delas numerada com um número diferente: –2, –1, 0, 1 e 2. Extraem-se, ao acaso e em simultâneo, quatro bolas do saco. Seja X a variável aleatória «produto dos números inscritos nas bolas extraídas». A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte.

x_i	0	4
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Elabore uma composição na qual:
- explique os valores da variável X
- justifique cada uma das probabilidades.

(1.ª fase)

239. O código de acesso a uma conta de e-mail é constituído por quatro letras e três algarismos. Sabe-se que um código tem quatro «a», dois «5» e um «2», como, por exemplo, o código 2aa5a5a. Quantos códigos diferentes existem nestas condições?
(A) 105 (B) 210 (C) 5040 (D) 39

(2.ª fase)

240. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	b^3	a	$2a$

Sabe-se que:
- a e b são números reais;
- o valor médio da variável aleatória X é $\frac{35}{24}$

Qual é o valor de b?
(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{5}$

(2.ª fase)

241. Numa certa linha do triângulo de Pascal, o penúltimo elemento é 111. Escolhe-se, ao acaso, um elemento dessa linha. Qual é a probabilidade de esse elemento ser maior do que 10^5 ?
(A) $\frac{3}{56}$ (B) $\frac{53}{56}$ (C) $\frac{2}{37}$ (D) $\frac{35}{37}$

(2.ª fase)

(1.ª fase)

242. A empresa AP comercializa pacotes de açúcar.

a) Seja Y a variável aleatória «massa, em gramas, de um pacote de açúcar comercializado pela empresa AP». A variável aleatória Y segue uma distribuição normal de valor médio 6,5 gramas e desvio padrão 0,4 gramas. Um pacote de açúcar encontra-se em condições de ser comercializado se a sua massa estiver compreendida entre 5,7 gramas e 7,3 gramas. Determine o valor aproximado da probabilidade de, em 10 desses pacotes de açúcar, exatamente oito estarem em condições de serem comercializados. Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

b) Considere o problema seguinte. «A empresa AP pretende aplicar, junto dos seus funcionários, um programa de reeducação alimentar. De entre os 500 funcionários da empresa AP vão ser selecionados 30 para formarem um grupo para frequentar esse programa. A Joana e a Margarida são irmãs e são funcionárias da empresa AP. Quantos grupos diferentes podem ser formados de modo que, pelo menos, uma das duas irmãs, a Joana ou a Margarida, não seja escolhida para esse grupo?» Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.

I) ${}^{500}C_{30} - {}^{498}C_{28}$ II) $2 \times {}^{498}C_{29} + {}^{498}C_{30}$

Numa composição, apresente o raciocínio que conduz a cada uma dessas respostas.

(2.ª fase)

243. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e ⊂Ω), com P(B) ≠ 0. Mostre que

$$P(\overline{A \cap B} \mid B) + P(A \mid B) = 1$$

(2.ª fase)

$\boxed{\text{E31}}$ Uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número designa-se por capicua. Por exemplo, 103301 é capicua. Quantos números com seis algarismos são capicuas?

(A) 729 (B) 900 (C) 810 000 (D) 900 000

(especial)

$\boxed{\text{E32}}$. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	-1	0	1
$P(X = x_i)$	$1-3a$	$2a$	a

Sabe-se que P(X = 0 ∨ X = 1) = 0,81. Qual é o valor médio de X ?

(A) 0,46 (B) 0,27 (C) 0,08 (D) 0

(especial)

$\boxed{\text{E33}}$. Considere um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e um saco que contém cinco bolas, indistinguíveis ao tato, cada uma delas numerada com um número diferente: 0, 1, 2, 3 e 4. Lança-se o dado uma vez e retira-se, ao acaso, uma bola do saco, registando-se os números que saíram. Qual é a probabilidade de o produto desses números ser igual a zero?

(A) 0 (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{1}{5}$

(especial)

$\boxed{\text{E34}}$ Considere uma empresa em que:

• 80% dos funcionários apostam no euromilhões;

• dos funcionários que apostam no euromilhões, 25% apostam no totoloto;

• 5% dos funcionários não apostam no euromilhões nem no totoloto.

a) Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário dessa empresa, ele apostar no totoloto.

b) Considere agora que essa empresa tem 50 funcionários. Escolhem-se, ao acaso, oito funcionários dessa empresa. Determine a probabilidade de, pelo menos, sete desses funcionários serem apostadores no euromilhões. Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

(especial)

$\boxed{\text{E35}}$. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e ⊂Ω). Mostre que, se A e B são dois acontecimentos independentes, então

$$P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A}) \times (1 - P(B)) = P(\overline{A})$$

(especial)

(*Testes intermédios e exames 2012/2013*)

244. Os três irmãos Andrade e os quatro irmãos Martins vão escolher, de entre eles, dois elementos de cada família para um jogo de matraquilhos, de uma família contra a outra. De quantas maneiras pode ser feita a escolha dos jogadores de modo que o Carlos, o mais velho dos irmãos da família Andrade, seja um dos escolhidos?
(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 20

(Intermédio 1)

245. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio μ e desvio padrão σ ($X \sim N(\mu,\sigma)$). Sabe-se que:
• $\mu = 5$
• $P(4,7 < X < 5) < 0,3$
Qual dos números seguintes pode ser o valor de σ?
(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4

(Intermédio 1)

246. Relativamente a uma turma de 12.º ano, sabe-se que:
• o número de rapazes é igual ao número de raparigas;
• ¾ dos alunos pretendem frequentar um curso da área de saúde e os restantes alunos pretendem frequentar um curso da área de engenharia;
• dos alunos que pretendem frequentar um curso da área de engenharia, dois em cada sete são raparigas.
a) Escolhe-se, ao acaso, uma rapariga da turma. Qual é a probabilidade de essa rapariga pretender frequentar um curso da área de saúde? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
b) Escolhem-se, ao acaso, dois alunos da turma para estarem presentes nas comemorações do aniversário da escola. Sabe-se que a probabilidade de esses dois alunos serem rapazes é $\frac{13}{54}$. Seja n o número de rapazes da turma.
Determine o valor de n. Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:
• equacione o problema;
• resolva a equação, sem utilizar a calculadora.

(Intermédio 1)

247. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• $P(A) = 0,3$
• $P(\overline{B}) = 0,6$
• $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,4$
Averigue se os acontecimentos A e B são independentes.

(Intermédio 1)

248. Considere todos os números que se podem obter alterando a ordem dos algarismos do número 12 345. Quantos desses números são ímpares e maiores do que 40 000 ?
(A) 18 (B) 30 (C) 120 (D) 240

(Intermédio 2)

249. Um saco contém quatro bolas com o número 0, uma bola com o número 2 e duas bolas com o número 3.
a) Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco. Seja X a variável aleatória «produto dos números das duas bolas retiradas». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X. Apresente cada uma das probabilidades na forma de fração irredutível.
b) Considere agora a experiência que consiste em retirar, ao acaso, uma a uma, sucessivamente e sem reposição, todas as bolas do saco. Sejam A e B os acontecimentos seguintes.
A: «Não saem bolas com o número 0 em extrações consecutivas»
B: «A segunda bola retirada tem o número 2»
Determine $P(B|A)$, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada. Numa pequena composição, justifique a sua resposta. A sua composição deve contemplar:
• o significado de $P(B|A)$, no contexto da situação descrita;
• a explicação da ordem de saída das bolas com o número 0
• a explicação do número de casos possíveis;
• a explicação do número de casos favoráveis;
• a apresentação do valor da probabilidade na forma de fração.

(Intermédio 2)

250. Num grupo de nove pessoas, constituído por seis homens e três mulheres, vão ser escolhidos três elementos para formarem uma comissão. Quantas comissões diferentes se podem formar com exatamente duas mulheres?
(A) ${}^3C_2$ (B) $6 \times {}^3C_2$ (C) ${}^9A_3$ (D) $6 \times {}^3A_2$

(1.ª fase)

251. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	a	$2a$	b	b

Sabe-se que:
• a e b são números reais;
• $P(X > 1) = P(X < 2)$
Qual é o valor médio da variável aleatória X ?
(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{17}{9}$ (D) $\frac{19}{12}$

(1.ª fase)

252. Considere uma variável aleatória X com distribuição normal de valor médio 11 e desvio padrão σ. Sabe-se que σ é um número natural e que $P(X > 23) \approx 0,02275$. Qual é o valor de σ ?
(A) 12 (B) 11 (C) 6 (D) 4

(1.ª fase)

253. Uma caixa contém apenas bolas brancas e bolas pretas, indistinguíveis ao tato. Todas as bolas estão numeradas com um único número natural. Sabe-se que:
• duas bolas em cada cinco são pretas;
• 20% das bolas pretas têm um número par;
• 40% das bolas brancas têm um número ímpar.
a) Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa. Determine a probabilidade de essa bola ser preta, sabendo que tem um número par. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
b) Admita agora que a caixa tem n bolas. Extraem-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa. Determine n, sabendo que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é igual a $\frac{7}{20}$

(1.ª fase)

254. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).
Sabe-se que:
- $P(B) = \frac{1}{4}$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{15}{16}$
- $P(A \mid \overline{B}) = \frac{7}{12}$

Determine P(A).

(1.ª fase)

255. Na Figura 1, está representado um tabuleiro quadrado dividido em dezasseis quadrados iguais, cujas linhas são A, B, C e D e cujas colunas são 1, 2, 3 e 4. O João tem doze discos, nove brancos e três pretos, só distinguíveis pela cor, que pretende colocar no tabuleiro, não mais do que um em cada quadrado. De quantas maneiras diferentes pode o João colocar os doze discos nos dezasseis quadrados do tabuleiro?

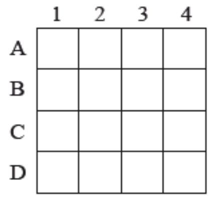

Figura 1

(A) ${}^{16}C_{12}$ (B) ${}^{16}C_9 \times {}^{7}C_3$ (C) ${}^{16}A_{12}$ (D) ${}^{16}A_9 \times {}^{7}A_3$

(2.ª fase)

256. Considere a linha do triângulo de Pascal em que o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento é 484. Qual é a probabilidade de escolher, ao acaso, um elemento dessa linha que seja superior a 1000 ?

(A) $\frac{15}{23}$ (B) $\frac{6}{11}$ 6 (C) $\frac{17}{23}$ (D) $\frac{8}{11}$

(2.ª fase)

257. Na Figura 3, está representado um dado cúbico, não equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 3, em que faces opostas têm o mesmo número. Lança-se o dado uma única vez e observa-se o número da face voltada para cima. Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

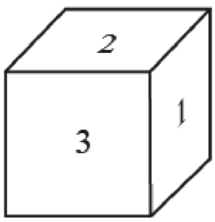

Figura 3

A: «sair número ímpar»
B: «sair número menor do que 3»
Sabe-se que:
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cap B) = \frac{5}{9}$
- $P(B \mid A) = \frac{2}{7}$

Determine a probabilidade de sair o número 3

(2.ª fase)

258. Numa conferência de imprensa, estiveram presentes 20 jornalistas.
a) Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos 20 jornalistas presentes nessa conferência de imprensa. Seja X a variável aleatória «número de jornalistas do sexo feminino escolhidos». A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Considere agora a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, dois dos 20 jornalistas presentes nessa conferência de imprensa. Seja Y a variável aleatória «número de jornalistas do sexo feminino escolhidos». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável Y. Apresente as probabilidades na forma de fração.
b) Considere o problema seguinte.
«*Admita que a conferência de imprensa se realiza numa sala, cujas cadeiras se encontram dispostas em cinco filas, cada uma com oito cadeiras. Todos os jornalistas se sentam, não mais do que um em cada cadeira, nas três primeiras filas. De quantas maneiras diferentes se podem sentar os 20 jornalistas, sabendo que as duas primeiras filas devem ficar totalmente ocupadas?*»
Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.
Resposta I)) ${}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_4$
Resposta II) ${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4$
Numa composição, apresente os raciocínios que conduzem a cada uma dessas respostas.

(2.ª fase)

E36 Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
- P(A) = 0,3
- $P(\overline{A} \cap B) = 0,55$
- A e B são acontecimentos incompatíveis.

Qual é o valor de $P(\overline{A} \cap \overline{B})$?
(A) 0,85 (B) 0,25 (C) 0,15 (D) 0

(especial)

E37 As classificações obtidas pelos alunos de uma escola num teste de Português seguem, aproximadamente, uma distribuição normal, de valor médio 11,5 valores. Vai ser escolhido, ao acaso, um desses testes. Considere os acontecimentos seguintes.
I: «a classificação do teste é superior a 12 valores»
J: «a classificação do teste é superior a 16,5 valores»
K: «a classificação do teste é inferior a 9 valores»
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
(A) P(J) < P(K) < P(I) (B) P(K) < P(I) < P(J)
(C) P(I) < P(K) < P(J) (D) P(K) < P(J) < P(I)

(especial)

E38 Numa turma com 15 raparigas e 7 rapazes, vai ser formada uma comissão com 5 elementos. Pretende-se que essa comissão seja mista e que tenha mais raparigas do que rapazes. Quantas comissões diferentes se podem formar?
(A) ${}^{15}A_3 + {}^{15}A_4$ (B) ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 + {}^{15}C_4 \times 7$
(C) ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 \times {}^{15}C_4 \times 7$ (D) ${}^{22}C_3 \times {}^{19}C_2$

(especial)

E39 Uma empresa produz apenas dois tipos de lâmpadas: lâmpadas fluorescentes e lâmpadas LED (Díodos Emissores de Luz). As lâmpadas de cada tipo podem ter a forma tubular ou ser compactas. Sabe-se que:
- 55% das lâmpadas produzidas nessa empresa são fluorescentes;
- das lâmpadas fluorescentes produzidas nessa empresa, 50% têm a forma tubular;
- das lâmpadas LED produzidas nessa empresa, 90% são compactas.

Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, ela ser fluorescente, sabendo que tem a forma tubular. Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

(especial)

$\boxed{\text{E40}}$ Num saco estão doze bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 12.

a) O João retira três bolas do saco, ao acaso, de uma só vez. Seja X a variável aleatória «número de bolas retiradas com um número múltiplo de 5». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fração.

b) Considere agora o saco com a sua constituição inicial. O João retira, ao acaso, uma bola do saco, regista o número da bola retirada e repõe essa bola no saco. Em seguida, retira, ao acaso, uma segunda bola do saco, regista o número da bola retirada e repõe essa bola no saco, e assim sucessivamente, até registar uma série de 8 números. Considere a afirmação seguinte:

«A probabilidade de o João registar exatamente 5 números que sejam múltiplos de 3 é dada por $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times {}^8C_5$*, aplicando o modelo binomial.»*

Elabore uma composição na qual:

- apresente um raciocínio que justifique a veracidade da afirmação;
- refira as condições de aplicabilidade do modelo binomial.

(especial)

(*Testes intermédios e exames 2013/2014*)

259. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	2	4
$P(X = x_i)$	a	b	0,3

Sabe-se que:

- a e b designam números reais positivos;
- o valor médio da variável X é igual a 2,2

Qual é o valor de a ?

(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4

(Intermédio 1)

260. A soma de todos os elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é igual a 256. Qual é o terceiro elemento dessa linha?

(A) 28 (B) 36 (C) 56 (D) 84

(Intermédio 1)

261. Do desenvolvimento de $(x^2 + 2)^6$ resulta um polinómio reduzido. Qual é o termo de grau 6 desse polinómio?

(A) $8x^6$ (B) $20x^6$ (C) $64\,x^6$ (D) $160\,x^6$

(Intermédio 1)

262. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. Qual é o valor de $P(\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}))$?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

(Intermédio 1)

263. Uma variável aleatória X tem distribuição normal. Sabe-se que P(X > 40) é inferior a P(X < 30). Qual dos números seguintes pode ser o valor médio da variável aleatória X ?

(A) 32 (B) 35 (C) 38 (D) 41

(Intermédio 1)

264. Numa caixa, estão cinco bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 5.

a) De quantas maneiras diferentes se podem colocar, lado a lado, as cinco bolas, de modo que as bolas com os números 3 e 4 fiquem ao lado uma da outra?

b) Considere a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso e em simultâneo três bolas da caixa e observar os seus números. Sejam X e Y as variáveis aleatórias seguintes.

X : «número de bolas retiradas com número ímpar»

Y : «soma dos números das bolas retiradas»

b1) Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X. Apresente as probabilidades na forma de fração irredutível.

b2) Determine P(Y < 10| X = 1), sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada. A sua resposta deve incluir:

- o significado de P(Y < 10 | X = 1), no contexto da situação descrita;
- a apresentação dos casos possíveis que considerou;
- a apresentação dos casos favoráveis;
- o valor da probabilidade pedida.

(Intermédio 1)

265. O João tem uma coleção de dados, uns com a forma de um cubo (dados cúbicos) e os outros com a forma de um octaedro (dados octaédricos).

a) Os dados cúbicos são equilibrados e têm as faces numeradas de 1 a 6. O João lança oito vezes um dos dados cúbicos. Qual é a probabilidade de a face com o número 1 sair pelo menos duas vezes? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

b) Alguns dados da coleção do João são verdes e os restantes são amarelos. Sabe-se que:

- 10% dos dados da coleção são amarelos;
- o número de dados cúbicos é igual ao triplo do número de dados octaédricos;
- 20% dos dados amarelos são cúbicos.

O João seleciona ao acaso um dos dados da coleção e verifica que é verde.

Qual é a probabilidade de esse dado ser octaédrico? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

(Intermédio 1)

266. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• A e B são incompatíveis;
• $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$
Mostre que as probabilidades $P(A)$, $P(A|B)$ e $P(\overline{B} \mid A)$ são todas diferentes e escreva-as por ordem crescente.
(Intermédio 1)

267. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. Oxyz , um octaedro regular [ABCDEF], cujos vértices pertencem aos eixos coordenados.

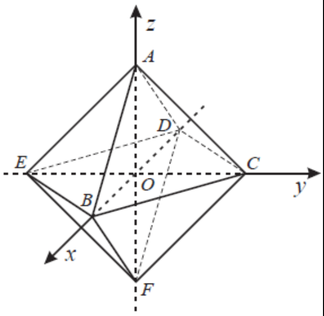

Figura 1

a) Escolhem-se ao acaso dois vértices distintos do octaedro. Qual é a probabilidade de a reta definida por esses dois vértices ser paralela à reta definida por $x = 1 \wedge y = 2$? Apresente o resultado na forma de fração.
b) Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos vértices do octaedro. Sejam X e Y os acontecimentos seguintes.
X : «o vértice escolhido pertence ao plano definido por $y = 0$»
Y : «a soma das coordenadas do vértice escolhido é positiva»
Averigue se os acontecimentos X e Y são independentes. Justifique. Na sua justificação, deve indicar os vértices que pertencem a cada um dos acontecimentos X, Y e $X \cap Y$
c) Admita agora que a face [ABC] do octaedro está numerada com o número 1, como se observa na Figura 2. Pretende-se numerar as restantes faces do octaedro com os números de 2 a 8 (um número diferente em cada face). De quantas maneiras diferentes se podem numerar as restantes sete faces, de modo que, depois de o octaedro ter todas as faces numeradas, pelo menos três das faces concorrentes no vértice A fiquem numeradas com números ímpares?

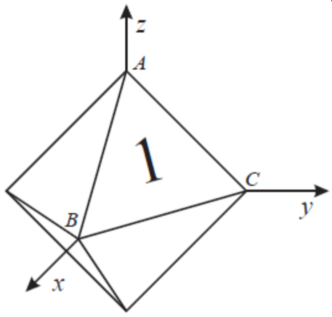

Figura 2

(Intermédio 1)

268. Escolhe-se, ao acaso, um professor de uma certa escola secundária. Sejam A e B os acontecimentos:
A : «o professor escolhido é do sexo masculino»
B : «o professor escolhido ensina Matemática»
Sabe-se que:
• $P(A) = 0{,}44$
• $P(A \cup \overline{B}) = 0{,}92$
Qual é a probabilidade de o professor escolhido ensinar Matemática, sabendo que é do sexo feminino?
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{8}$
(Intermédio 1)

269. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• $P(A) = 0{,}4$
• $P(A \cap B) = 0{,}2$
• $P(B|\overline{A}) = 0{,}8$
Qual é o valor de P(B)?
(A) 0,28 (B) 0,52 (C) 0,68 (D) 0,80
(1.ª fase)

270. Considere todos os números naturais de dez algarismos que se podem escrever com os algarismos de 1 a 9. Quantos desses números têm exatamente seis algarismos 2 ?
(A) ${}^{10}C_6 \times 8^4$ (B) ${}^{10}C_6 \times {}^{8}A_4$ (C) ${}^{10}A_6 \times {}^{8}A_4$ (D) ${}^{10}A_6 \times 8^4$
(1.ª fase)

271. Uma caixa tem nove bolas distinguíveis apenas pela cor: seis pretas, duas brancas e uma amarela.
a) Considere a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa, simultaneamente e ao acaso, três bolas. Determine a probabilidade de as bolas retiradas não terem todas a mesma cor. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
b) Considere a caixa com a sua composição inicial. Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa uma bola de cada vez, ao acaso e sem reposição, até ser retirada uma bola preta. Seja X a variável aleatória «número de bolas retiradas dessa caixa». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fração.
(1.ª fase)

272. Na Figura 3, está representada uma planificação de um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas com os números −1, 1, 2 e 3. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar esse dado duas vezes consecutivas e registar, após cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo. Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

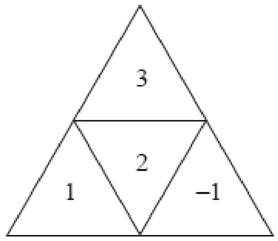

Figura 3

A: «o número registado no primeiro lançamento é negativo»
B: «o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo»
Elabore uma composição, na qual indique o valor de P(A|B), sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada. Na sua resposta, explique o significado de P(A|B) no contexto da situação descrita, explique o número de casos possíveis, explique o número de casos favoráveis e apresente o valor de P(A|B)
(1.ª fase)

273. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• A e B são acontecimentos independentes;
• $P(A) = 0{,}4$
• $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}48$

Qual é o valor de P(B) ?
(A) 0,08 (B) 0,12 (C) 0,2 (D) 0,6

(2.ª fase)

274. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um octaedro [ABCDEF], cujos vértices pertencem aos eixos coordenados. Escolhem-se, ao acaso, três vértices desse octaedro. Qual é a probabilidade de esses três vértices definirem um plano paralelo ao plano de equação z = 5 ?

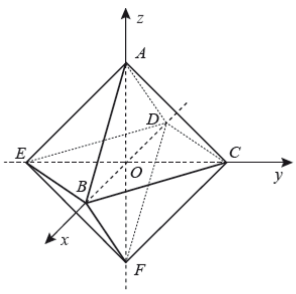

Figura 1

(A) $\frac{1}{{}^6C_3}$ (B) $\frac{4}{{}^6C_3}$ (C) $\frac{8}{{}^6C_3}$ (D) $\frac{12}{{}^6C_3}$

(2.ª fase)

275. Um dos termos do desenvolvimento de $(\frac{2}{x}+x)^{10}$, com $x \neq 0$, não depende da variável *x*. Qual é esse termo?
(A) 10 240 (B) 8064 (C) 1024 (D) 252

(2.ª fase)

276. Uma caixa tem seis bolas distinguíveis apenas pela cor: duas azuis e quatro pretas.
a) Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma a uma, sucessivamente e sem reposição, todas as bolas da caixa. À medida que são retiradas da caixa, as bolas são colocadas lado a lado, da esquerda para a direita. Determine a probabilidade de as duas bolas azuis ficarem uma ao lado da outra. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
b) Considere a caixa com a sua composição inicial. Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa, simultaneamente e ao acaso, três bolas. Seja X a variável aleatória «número de bolas azuis que existem no conjunto das três bolas retiradas». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fração.

(2.ª fase)

E41 Considere todos os números ímpares com cinco algarismos. Quantos desses números têm quatro algarismos pares e são superiores a 20 000 ?
(A) 5^4 (B) 5^5 (C) 3×5^4 (D) 4×5^4

(especial)

E42 Considere a linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 20. Escolhendo, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser par?
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

(especial)

E43 De uma turma de 12.º ano, sabe-se que:
• 60% dos alunos são rapazes;
• 80% dos alunos estão inscritos no desporto escolar;
• 20% dos rapazes não estão inscritos no desporto escolar.
a) Determine a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ser rapariga, sabendo que está inscrito no desporto escolar. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
b) Considere agora que essa turma de 12.º ano tem 25 alunos. Pretende-se escolher, ao acaso, três alunos dessa turma para a representarem num evento do desporto escolar. Determine a probabilidade de serem escolhidos, pelo menos, dois alunos que estão inscritos no desporto escolar. Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

(especial)

E44 Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis;
• A e B são acontecimentos independentes.
Mostre que $2P(A \cup B) = 1 + P(B)$

(especial)

(*Exames Nacionais 2015*)

277. Dois rapazes e quatro raparigas vão sentar-se num banco corrido com seis lugares. De quantas maneiras o podem fazer, de modo que fique um rapaz em cada extremidade do banco?
(A) 12 (B) 24 (C) 48 (D) 60

(1.ª fase)

278. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A ⊂Ω e B ⊂Ω). Sabe-se que:
• P(A) = 0,4
• $P(\overline{B}) = 0,7$
• P(A∪B) = 0,5
Qual é o valor de $P(\overline{A} \cup \overline{B})$?
(A) 0,6 (B) 0,7 (C) 0,8 (D) 0,9

(1.ª fase)

279. De uma empresa com sede em Coimbra, sabe-se que:
• 60% dos funcionários residem fora de Coimbra;
• os restantes funcionários residem em Coimbra.
a) Relativamente aos funcionários dessa empresa, sabe-se ainda que:
• o número de homens é igual ao número de mulheres;
• 30% dos homens residem fora de Coimbra.
Escolhe-se, ao acaso, um funcionário dessa empresa. Qual é a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
b) Considere agora que a empresa tem oitenta funcionários. Escolhem-se, ao acaso, três funcionários dessa empresa. A probabilidade de, entre esses funcionários, haver no máximo dois a residir em Coimbra é igual a

$$\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$$

Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.
Na sua resposta:
• enuncie a regra de Laplace;
• explique o número de casos possíveis;
• explique o número de casos favoráveis.

(1.ª fase)

280. A tabela de distribuição de probabilidades de uma certa variável aleatória X é

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	a	$2a$	0,4

(*a* designa um número real)
Qual é o valor médio desta variável aleatória?
(A) 2,1 (B) 2,2 (C) 2,3 (D) 2,4

(2.ª fase)

281. Um saco contém nove bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9. As bolas numeradas de 1 a 5 são pretas e as restantes são brancas. Retira-se, ao acaso, uma bola do saco e observa-se a sua cor e o seu número. Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:
A: «a bola retirada é preta»
B: «o número da bola retirada é um número par»
Qual é o valor da probabilidade condicionada P(A| B) ?
(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$

(2.ª fase)

282. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A ⊂Ω e B ⊂Ω), com P(A)≠ 0. Prove que

$$P(A \cup \overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times P(B|A)$$

(2.ª fase)

283. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o poliedro [NOPQRSTUV] que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.
Sabe-se que:
• o vértice P pertence ao eixo Ox
• o vértice N pertence ao eixo Oy
• o vértice T pertence ao eixo Oz
• o vértice R tem coordenadas (2, 2, 2)

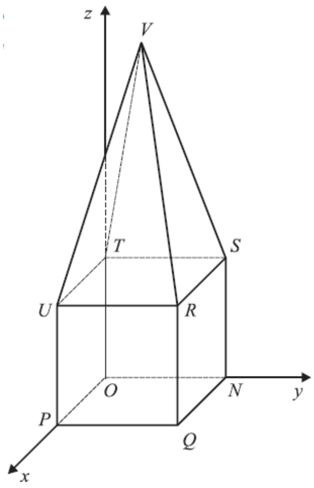

Figura 3

Dispõe-se de sete cores diferentes, das quais uma é branca e outra é azul, para colorir as nove faces do poliedro [NOPQRSTUV]. Cada face vai ser colorida com uma única cor. Considere a experiência aleatória que consiste em colorir, ao acaso, as nove faces do poliedro, podendo cada face ser colorida por qualquer uma das sete cores. Determine a probabilidade de, no final da experiência, o poliedro ficar com exatamente duas faces brancas, ambas triangulares, exatamente duas faces azuis, ambas quadradas, e as restantes faces coloridas com cores todas diferentes. Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas de milésima.

(2.ª fase)

E45 Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A ⊂Ω e B ⊂Ω). Sabe-se que:
• P(A∪B) = 0,7
• P(B) = 0,4
• P(A∩B) = 0,2
Qual é o valor de P(B|A) ?
(A) 0,25 (B) 0,3 (C) 0,35 (D) 0,4

(especial)

E46 Nove jovens, três rapazes e seis raparigas, vão dispor-se, lado a lado, para uma fotografia. De quantas maneiras o podem fazer, de modo que os rapazes fiquem juntos?
(A) 40 140 (B) 30 240 (C) 20 340 (D) 10 440

(especial)

E47 Um saco contém nove bolas numeradas de 1 a 9, indistinguíveis ao tato.
a) Retiram-se, sucessivamente e ao acaso, três bolas do saco. As bolas são retiradas com reposição, isto é, repõe-se a primeira bola antes de se retirar a segunda e repõe-se a segunda bola antes de se retirar a terceira.

Qual é a probabilidade de o produto dos números das três bolas retiradas ser igual a 2? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

b) Considere agora a seguinte experiência aleatória: retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco, adicionam-se os respetivos números e colocam-se novamente as bolas no saco. Considere que esta experiência é repetida dez vezes. Seja X o número de vezes em que a soma obtida é igual a 7. A variável aleatória X tem distribuição binomial, pelo que

$$P(X=n)={}^{10}C_n\left(\frac{1}{12}\right)^n\left(\frac{11}{12}\right)^{10-n}\quad \left(n\in\{0,1,\ldots,10\}\right)$$

Elabore uma composição em que explique:

• como se obtém o valor $\frac{1}{12}$ (probabilidade de sucesso);

• o significado de $\frac{11}{12}$, no contexto da situação descrita;

• o significado da expressão ${}^{10}C_n$, tendo em conta a sequência das dez repetições da experiência.

(especial)

(*Exames Nacionais 2016*)

284. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:

• $P(A) = \frac{2}{5}$

• $P(B) = \frac{3}{10}$

• $P(A \mid B) = \frac{1}{6}$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{13}{20}$ (D) $\frac{19}{30}$

(1.ª fase)

285. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 10. Sabe-se que $P(7<X<10)=0,3$. Qual é o valor de $P(X>13)$?

(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4

(1.ª fase)

286. Considere nove bolas, quatro numeradas com o número 1, quatro com o número 2 e uma com o número 4.

a) Colocam-se as nove bolas, que são indistinguíveis ao tato, num saco vazio. Em seguida, retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas desse saco. Seja X a variável aleatória: «produto dos números das duas bolas retiradas». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fração irredutível.

b) Considere agora que se colocam as nove bolas lado a lado, de modo a formar um número com nove algarismos. Quantos números ímpares diferentes se podem obter?

(1.ª fase)

287. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:

• $P(A) = 0,2$

• $P(B) = 0,3$

• $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6$

Qual é o valor de $P(A|B)$?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$

(2.ª fase)

288. O Carlos joga basquetebol na equipa da sua escola. Admita que, em cada lance livre, a probabilidade de o Carlos encestar é 0,4. Num treino, o Carlos vai executar uma série de cinco lances livres. Qual é a probabilidade de o Carlos encestar exatamente quatro vezes?

(A) 0,01536 (B) 0,05184 (C) 0,0768 (D) 0,2592

(2.ª fase)

289. Considere nove fichas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9.

a) Considere duas caixas, U e V. Colocam-se as fichas numeradas de 1 a 5 na caixa U e as fichas numeradas de 6 a 9 na caixa V. Realiza-se a seguinte experiência.

Retira-se, ao acaso, uma ficha da caixa U e retira-se, também ao acaso, uma ficha da caixa V. Sejam A e B os acontecimentos:

A : «A soma dos números das fichas retiradas é igual a 10»

B : «O produto dos números das fichas retiradas é ímpar»

Determine o valor de $P(B|A)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada. Na sua resposta:

– explique o significado de $P(B|A)$ no contexto da situação descrita;

– indique os casos possíveis, apresentando cada um deles na forma (u,v), em que u designa o número da ficha retirada da caixa U e v designa o número da ficha retirada da caixa V

– indique os casos favoráveis;

– apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

b) Na Figura 2, está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais (A, B, C e D) e em quatro filas verticais (1, 2, 3 e 4). Pretende-se dispor as nove fichas (numeradas de 1 a 9) no tabuleiro, de modo que cada ficha ocupe uma única casa e que cada casa não seja ocupada por mais do que uma ficha. De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal?

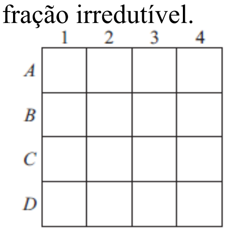

Figura 2

(2.ª fase)

$\boxed{\text{E48}}$ Uma pessoa lança um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e regista o número da face que ficou voltada para cima. Uma outra pessoa lança um dado com a forma de um tetraedro regular, com as faces numeradas de 1 a 4, e regista o número da face que ficou voltada para baixo. Admita que ambos os dados são equilibrados.

Qual é a probabilidade de, pelo menos, uma dessas pessoas registar o número 4?

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{7}{12}$

(especial)

E49 Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 2 e desvio padrão 0,5. Qual é o valor, arredondado às centésimas, de $P(X>2,5)$?

(A) 0,68 (B) 0,34 (C) 0,32 (D) 0,16

(especial)

E50 Um saco contém *n* bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a n, sendo n um número par maior do que 3.

a) Retiram-se, em simultâneo e ao acaso, três bolas do saco. Escreva uma expressão, em função de *n*, que dê a probabilidade de, dessas três bolas, duas terem número par e uma ter número ímpar. Não simplifique a expressão que escrever.

b) Admita agora que *n* = 8. Ao acaso, extraem-se sucessivamente duas bolas do saco (primeiro uma e depois outra) e observa-se o número de cada uma delas. Sejam A e B os acontecimentos:

A : «A primeira bola extraída tem número par.»

B : «A segunda bola extraída tem número par.»

Determine o valor de $P(A\cap B)$ no caso em que a extração é feita com reposição e no caso em que a extração é feita sem reposição. Justifique a sua resposta, tendo em conta que $P(A\cap B) = P(A) \times P(B|A)$. Na sua resposta:

– interprete o significado de $P(A\cap B)$, no contexto da situação descrita;

– indique o valor de $P(B|A)$, no caso de a extração ser feita com reposição;

– indique o valor de $P(B|A)$, no caso de a extração ser feita sem reposição;

– apresente o valor de $P(A\cap B)$, em cada uma das situações (designe esse valor por *a* no caso de a extração ser feita com reposição e por *b* no caso de a extração ser feita sem reposição).

(especial)

Soluções: 1. D 2. 210; 6; 1/28 3. 60%; 25% 4. 2/9 5. $4,13\times10^{-4}$ 6. B 7. 4845; 61/969 8. C 9. A
10. A 11. B 12. A 13. 1/5 14. A 15. C 16. 0,216% 17. D 18. B 19. 0,1(63)
20. 2/21 21. C 22. B 23. 75075; 0,114 24. B 25. 2916; 0,504 26. D 27. A 28. 3% 29. C 30. A
31. 1º 32. D 33. B 34. 120; 1/3 35. D 36. A 37. 70; 51% 38. C 39. C 40. 72; 2/9
41. A 42. C 43. 2/5 45. B 46. B 47. 3628800; 103680; 1/15 48.C 49. A 50. 0,134 51. A
52. A 53.16/17; 4% 54. C 55. D 56. 35%; 1/3; 1/15 57. C 58. A 59. 0,0000079
60. D 61.C 62. 1/9 63. C 64. B 65. 1656; 10350; 13/23. 66. D 67. B 68. 7/12; 64084800 69. B
70. D 71. 6%; 0,006 72. C 73. D 74. 0,336; 1/17 75. C 76. A 77. 604800; 2400 78. 6/7 79. A
80.C 81. 58%; 44% 83. D 84. A 85. 48; 480 87. C 88. A 89. 2/5, 8/15, 1/15; 1/7 90. C 91. D
92. 1/3; 11,6% 94. D 95. C 96. 9/22; 1/22 98. B 99. B 100. 72; 16; x_i: 0 e 1; p_i: 5/7 e 2/7 101. D 102. B
103. C 104. C 105. A 106. B 107. C 108. 180; 648 109. 0,42 110. x_i: 0, 1, 2 e p_i: 4/15, 8/15, 1/5; 8/15; 10
111. D 112. B 113. C 114. C 115. B 116. 60; 1/11 117. 11 118. A 119. D 120. 81/253; 2/9 121. 4
122. B 123. B 124. A 125. A 126. B 127. C 128. C 129. 1437004800; 0,34 130. x_i: 1, 2 e 3; 0,4, 0,5 e 0,1; 16/45; 7/10
131. 11/12 132. D 133. A 134. D 135. A 136. C 137. Sim 138. 0,68 139. A 140. C 141. 16/49
142. 8/15 143. C 144. A 145. A 146. D 147. –2, –1 e 1; 1/3, 1/6 e ½; $\mu=-1/3$ 148. 420; 2/5 150. B 151. 1/3
153. B 154. C 155. C 156. 0,24 158. D 159. D 160. C 161. 0,74 162. 2, 3 e 4; 1/7, 4/7 e 2/7; 3
163. C 164. A 165. B 166. A 167. A 168. 840; 62; 3/1001 169. x_i: 0,1,8 e $P(X=x_i)$: 2/3, 1/6,1/6; não 17. 75%
171. 4 e 1 172. B 173. C 174. 1/2; 0,12 175. C 176. x_i: 1,2,3,4 e $P(X=x_i)$: 0,2;0,1;0,3;0,4 177. A 178. D
179. B 180. 210 181. 10/19 182. D 183. C 184. C 186. ou 0 ou 1 ou 120 ou 12 ou 15840 187. B 188. C
189. A 190. B 191. C 192. 114240; 1/3; 2/5 193. 0,1 e 0,25; não 194. 40 196. B 197. 0; x_i: 0,1,2
e $P(X=x_i)$: 4/5, 1/15,2/15 198. André 199. D 200. C 201. B 202. C 203. B 204. 7/15; 195671700
206. C 207. B 208. D 209. x_i: -3,-2, -1, 0, 1 e $P(X=x_i)$: 1/36, 1/36, ¼, 5/36, 5/9; 1/6 211. D 212. B 213. C 214. B
215. 1440; 31/35; não 216. 1/8 217. ¼; 15/28; 3/14 218. D 219. B 221. D 222. A 223. 0,25; 0,071
225. B 226. D 227. B 228. ¼; II 229. C 230. B 231. $10!\times12!\times2$; x_i: 0,1,2 e $P(X=x_i)$: 15/92,35/69,91/276
232. D 233. 112/243; ½ 234. B 235. D 236. C 237. 18/29; 0,41 239. A 240. C 241. B 242. 0,064
243. B 244. D 246. 6/7; 14 247. Não 248. B 249. 1/3 250. B 251. D 252. C 253. 2/11; 25 254. ½
255. B 256. C 257. 5/9 258. 0,1,2; 14/95,48/95,33/95 259. B 260. A 261. D 262.D 263. A 264. 48; 1,2,3 e 3/10,3/5,1/10;
2/3 265. 0,4; 17/90 266. $P(A|B)< P(A)< P(\overline{B} \mid A)$ 267. 1/15; são; 1872 268. C 269. C 270. A 271. 16/21; 1,2,3,4 e
2/3,1/4,1/14,1/84 272. 1/10 273. C 274. B 275. B 276. 1/3; 0,1,2 e 1/5,3/5,1/5 277. C 278. C 279. 1/8 280. B 281.B
283. 0,0002 284. C 285. B 286. 1/6,4/9,5/18,1/9; 280 287. A 288. C 289. 1/2; 9123840

E1. C E2. A E3. 1/10; 1/3; 1701 E4. D E5. C E6. por exemplo, A:«sair 2 vezes o 4» e B:«saírem 2 n.ºs pares»; 1/12; 1/6 e ½
E7. C E8. C E9. B E10. 144 E12. C E13. C E14. B E16. 24; 13/5 E17. D E18. D E19. A E20. 74290
E21. 94 E22. D E23. A E24. C E25. 1/3; x_i[0,1,2,3] e $P(X=x_i)$[27/64;27/64;9/64;1/64]; ¾ E26. B E27. D E28. A
E30. 239 500 800; 29/143 E31. B E32. C E33. D E34. 0,35; 0,49 E36. C E37. A E38. B E39. 0,86
E41. D E42. C E43. 2/5; 0,91 E45. D E46. B E47. 1/243 E48. A E49. D E50. $\dfrac{{}^{\frac{n}{2}}C_2 \times \frac{n}{2}}{{}^{n}C_3}$; 1/2, 3/7, 1/4 e 3/14