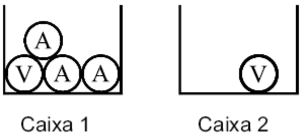
(*Testes intermédios e exames 2007/2008*)

143. Uma caixa 1 tem uma bola verde e três bolas amarelas. Uma caixa 2 tem apenas uma bola verde. Considere a experiência que consiste em tirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa 1, colocá-las na caixa 2 e, em seguida, tirar, também ao acaso, uma bola da caixa 2. Sejam M e V os acontecimentos:




M: «as bolas retiradas da caixa 1 têm a mesma cor»
V: «a bola retirada da caixa 2 é verde»

Indique o valor da probabilidade condicionada $P(V \mid \overline{M})$

(*Não necessita de recorrer à fórmula da probabilidade condicionada*)

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 1

(Intermédio 1)

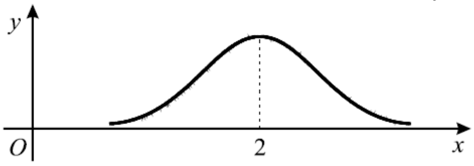
144. Os códigos dos cofres fabricados por uma certa empresa consistem numa sequência de cinco algarismos como, por exemplo, 07757. Um cliente vai comprar um cofre a esta empresa. Ele pede que o respectivo código satisfaça as seguintes condições:
• tenha exactamente três algarismos 5
• os restantes dois algarismos sejam diferentes
• a soma dos seus cinco algarismos seja igual a dezassete
Quantos códigos diferentes existem satisfazendo estas condições?
(A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80

(Intermédio 1)

145. A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 31. Qual é o quinto elemento da linha anterior?
(A) 23751 (B) 28416 (C) 31465 (D) 36534

(Intermédio 1)

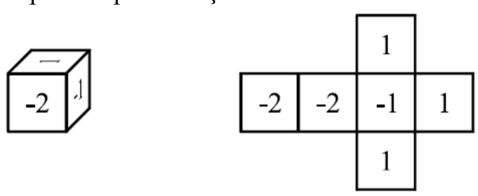
146. A Curva de Gauss representada na figura está associada a uma variável aleatória X, com distribuição Normal.




Tal como a figura sugere, a curva é simétrica relativamente à recta de equação $x = 2$. Para um certo valor de $a$, tem-se que $P(X>a)=15\%$. Qual dos seguintes pode ser o valor de $a$?
(A) 1 (B) 1,5 (C) 2 (D) 2,5

(Intermédio 1)

147. Na figura está representado um dado equilibrado e a respectiva planificação.




Lança-se este dado uma única vez. Seja X o número escrito na face que fica voltada para cima. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X e, seguidamente, determine, <u>sem recorrer à calculadora</u>, o valor médio desta variável. Apresente o valor médio na forma de fracção irredutível.

(Intermédio 1)

148. Doze amigos vão passear, deslocando-se num automóvel e numa carrinha, ambos alugados. O automóvel dispõe de cinco lugares: o do condutor e mais quatro. A carrinha dispõe de sete lugares: o do condutor e mais seis. Apenas dois elementos do grupo, a Filipa e o Gonçalo, têm carta de condução, podendo qualquer um deles conduzir, quer o automóvel, quer a carrinha.

a) Os doze amigos têm de se separar em dois grupos, de modo a que um grupo viaje no automóvel e o outro na carrinha. De quantas maneiras diferentes podem ficar constituídos os dois grupos de amigos?

b) Admita agora que os doze amigos já se encontram devidamente instalados nos dois veículos. O Gonçalo vai a conduzir a carrinha. Numa operação STOP, a Brigada de Trânsito mandou parar cinco viaturas, entre as quais a carrinha conduzida pelo Gonçalo. Se a Brigada de Trânsito escolher, ao acaso, dois dos cinco condutores para fazer o teste de alcoolémia, qual é a probabilidade de o Gonçalo ter de fazer o teste? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(Intermédio 1)

149. Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), ambos com probabilidade não nula. Utilizando a fórmula da probabilidade condicionada e as propriedades das operações com conjuntos, prove que

$$P(\overline{(\overline{A} \cap B)} \mid B) = P(A \mid B)$$

(Intermédio 1)

150. Lança-se cinco vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. Seja $p$ a probabilidade de, nos cinco lançamentos, sair face 6 exactamente duas vezes. Qual é o valor de $p$ arredondado às centésimas?
(A) 0,12 (B) 0,16 (C) 0,23 (D) 0,27

(Intermédio 2)

151. Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. De dois acontecimentos A e B ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), de probabilidade não nula, sabe-se que:
• $P(A) = P(B)$
• $P(A \cup B) = 5P(A \cap B)$
Determine a probabilidade de acontecer A, sabendo que B aconteceu. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(Intermédio 2)

152. Considere o seguinte problema: *Lança-se três vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e multiplicam-se os números saídos. Qual é a probabilidade de o produto obtido ser igual a 6?*

Uma resposta correcta a este problema é $\frac{3!+3}{6^3}$

Numa pequena composição, explique porquê. A sua composição deve incluir:
• uma referência à Regra de Laplace;
• uma explicação do número de casos possíveis;
• uma explicação do número de casos favoráveis.

(Intermédio 2)

153. O João e a Maria convidaram três amigos para irem, com eles, ao cinema. Compraram cinco bilhetes com numeração seguida, numa determinada fila, e distribuíram-nos ao acaso. Qual é a probabilidade de o João e a Maria ficarem sentados um ao lado do outro?
(A) 1/5 (B) 2/5 (C) 3/5 (D) 4/5

(1ª fase)

154. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos. Sabe-se que:
• $P(A\cup B) = 80\%$
• $P(B) = 60\%$
• $P(A\cap B) = 10\%$
Qual é o valor de P(A)?
(A) 10% (B) 20% (C) 30% (D) 40%

(1ª fase)

155. Admita que a variável peso, expressa em gramas, das maçãs de um pomar é bem modelada por uma distribuição normal N (60;5), em que 60 é o valor médio e 5 é o valor do desvio-padrão da distribuição. Retira-se, ao acaso, uma dessas maçãs. Considere os acontecimentos:
A : «o peso da maçã retirada é superior a 66 gramas»
B : «o peso da maçã retirada é inferior a 48 gramas»
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
(A) $P(A) = P(B)$ (B) $P(A) < P(B)$
(C) $P(B) < P(A)$ (D) $P(A) + P(B) = 1$

(1ª fase)

156. Uma turma do 12.º ano de uma Escola Secundária está a organizar uma viagem de finalistas.

a) Os alunos da turma decidiram vender rifas, para angariarem fundos para a viagem. A numeração das rifas é uma sequência de três algarismos (como, por exemplo, 099), iniciando-se em 000. De entre as rifas, que foram todas vendidas, será sorteada uma, para atribuir um prémio. Qual é a probabilidade de a rifa premiada ter um único algarismo cinco? Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às centésimas.

b) A turma é constituída por doze raparigas e dez rapazes, que pretendem formar uma comissão organizadora da viagem. Sabe-se que a comissão terá obrigatoriamente três raparigas e dois rapazes. A Ana e o Miguel, alunos da turma, não querem fazer parte da comissão em simultâneo. Explique, numa composição, que o número de comissões diferentes que se pode formar é dado por:
$^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9$

(1ª fase)

157. Em duas caixas, A e B, introduziram-se bolas indistinguíveis ao tacto:
• na caixa A: algumas bolas verdes e algumas bolas azuis;
• na caixa B: três bolas verdes e quatro azuis.
Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa A e coloca-se na caixa B. De seguida, retira-se, também ao acaso, uma bola da caixa B. Sabendo que a probabilidade de a bola retirada da caixa B ser azul é igual a 1/2, mostre que a bola que foi retirada da caixa A e colocada na caixa B tinha cor verde.

(1ª fase)

158. Ao disputar um torneio de tiro ao alvo, o João tem de atirar sobre o alvo quatro vezes. Sabe-se que, em cada tiro, a probabilidade de o João acertar no alvo é 0,8. Qual é a probabilidade de o João acertar sempre no alvo, nas quatro vezes em que tem de atirar?
(A) 0,0016 (B) 0,0064 (C) 0,0819 (D) 0,4096

(2ª fase)

159. Uma caixa A contém duas bolas verdes e uma bola amarela. Outra caixa B contém uma bola verde e três bolas amarelas. As bolas colocadas nas caixas A e B são indistinguíveis ao tacto. Lança-se um dado cúbico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 6. Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A; caso contrário, tira-se uma bola da caixa B. Qual é a probabilidade de a bola retirada ser verde, sabendo que saiu o número 5 no lançamento do dado?
(A) ¼ (B) 1/3 (C) 3/7 (D) 2/3

(2ª fase)

160. Uma linha do Triângulo de Pascal tem quinze elementos. Quantos elementos dessa linha são inferiores a 100?
(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8

(2ª fase)

161. a) Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A\subset\Omega$ e $B\subset\Omega$)). Prove que:
$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B)$

b) Numa determinada cidade, das 160 raparigas que fizeram o exame nacional de Matemática, 65% tiveram classificação positiva, e, dos 120 rapazes que fizeram o mesmo exame, 60% também tiveram classificação positiva. Escolhendo, ao acaso, um dos estudantes que realizaram o exame, qual é a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva? Apresente o resultado em forma de dízima, com aproximação às centésimas.
Nota: Se o desejar, utilize a igualdade referida em a). Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada; no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo.

(2ª fase)

162. Numa caixa temos três fichas com o número 1 e quatro fichas com o número 2, indistinguíveis ao tacto. Retiram-se, ao acaso e de uma só vez, duas fichas. Seja X a variável aleatória: «*a soma dos números inscritos nas duas fichas*». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Indique, justificando, o valor mais provável da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.

(2ª fase)

E7 Quantos números ímpares, de quatro algarismos diferentes, se pode formar com os algarismos 1, 3, 5 e 8?
(A) 4 (B) 6 (C) 18 (D) 24

(Especial)

E8 O 14.º elemento de uma linha do Triângulo de Pascal é igual ao 15.º elemento dessa mesma linha. Quantos elementos tem essa linha?
(A) 14 (B) 15 (C) 28 (D) 30

(Especial)

E9 Em cada semana, a chave do Totoloto é formada por seis números inteiros distintos, escolhidos aleatoriamente entre 1 e 49. Qual é a probabilidade de, na próxima semana, a chave do totoloto incluir os números 1, 2 e 3?

(A) $\frac{^{46}C_3}{^{46}C_6}$ (B) $\frac{^{46}C_3}{^{49}C_6}$ (C) $\frac{^{46}C_6}{^{49}C_6}$ (D) $\frac{^{49}C_3}{^{49}C_6}$

(Especial)

E10 Três rapazes, o João, o Rui e o Paulo, e três raparigas, a Ana, a Maria e a Francisca, decidem passar a tarde juntos.
a) De quantas maneiras se podem sentar os seis amigos, uns ao lado dos outros, num banco corrido com seis lugares, ficando um rapaz em cada uma das extremidades?
b) Depois de ouvirem algumas músicas, os seis jovens resolveram dançar aos pares. Admita que, numa dança:
• cada rapaz dança com uma rapariga;
• todos os jovens dançam;
• todos os pares são escolhidos ao acaso.
A probabilidade de, nessa dança, a Ana dançar com o João é igual a $\frac{2}{3!}$.
Explique, numa pequena composição, o raciocínio que conduziu a esta expressão.
Nota: Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:
• referência à Regra de Laplace;
• explicação do número de casos possíveis;
• explicação do número de casos favoráveis.

(Especial)

E11 Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis (A⊂Ω e B⊂Ω). Mostre que:
$1 - P(\overline{A \cup B}) + P(A \mid B) \times P(B) = P(A) + P(B)$

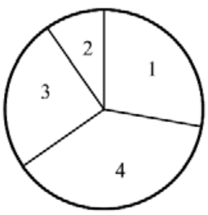
(Especial)

## (*Testes intermédios e exames 2008/2009*)

163. A soma dos dois primeiros elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 13. Quantos elementos dessa linha são menores do que 70?
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

(Intermédio 1)

164. Na figura está representado um círculo dividido em quatro sectores circulares diferentes, numerados de 1 a 4. Estão disponíveis cinco cores para pintar este círculo. Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições:




• todos os sectores devem ser pintados;
• cada sector é pintado com uma única cor;
• sectores com um raio em comum não podem ficar pintados com a mesma cor;
• o círculo deve ficar pintado com duas ou com quatro cores.
De quantas maneiras diferentes pode o círculo ficar pintado?
(A) 140 (B) 230 (C) 310 (D) 390

(Intermédio 1)

165. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos. Sabe--se que P(A)=0,5 e que P(B)=0,7. Podemos então garantir que ...
(A) A e B são acontecimentos contrários
(B) A e B são acontecimentos compatíveis
(C) A está contido em B
(D) o acontecimento A ∪ B é certo

(Intermédio 1)

166. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $a$ | $b$ | 0,5 |

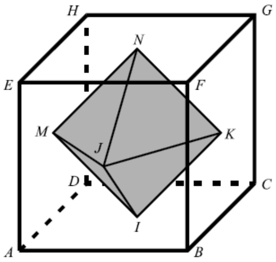
(*a* e *b* designam números reais). O valor médio desta variável aleatória é 1,4. Qual é o valor de *a*?
(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,5

(Intermédio 1)

167. O diâmetro, em milímetros, dos parafusos produzidos por uma certa máquina é uma variável aleatória X com distribuição normal, de valor médio 9. Qualquer parafuso produzido por essa máquina passa por um controle de qualidade. Ao passar por esse controle, o parafuso é aprovado se o seu diâmetro estiver compreendido entre 8,7 e 9,3 milímetros. Caso contrário, é rejeitado. Sabe-se que 99,73% dos parafusos são aprovados. Qual é o desvio padrão da variável aleatória X?
(A) 0,1 (B) 0,3 (C) 0,6 (D) 0,9

(Intermédio 1)

168. Na figura estão representados dois poliedros, o cubo [ABCDEFGH] e o octaedro [IJKLMN] (o vértice L do octaedro não está visível). Cada vértice do octaedro pertence a uma face do cubo.




a) Considere todos os conjuntos que são constituídos por cinco dos catorze vértices dos dois poliedros (como, por exemplo, {A,B,C,K,L}).

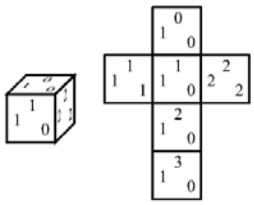
$a_1$) Quantos desses conjuntos são constituídos por três vértices do cubo e dois vértices do octaedro?

$a_2$) Quantos desses conjuntos são constituídos por cinco vértices do mesmo poliedro?

b) Escolhem-se ao acaso cinco dos catorze vértices dos dois poliedros. Qual é a probabilidade de os cinco vértices escolhidos pertencerem todos à mesma face do cubo? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(Intermédio 1)

169. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação. Conforme se pode observar na figura, existem três números em cada face. Lança-se este dado uma só vez e observam-se os números da face que fica voltada para cima. Diz-se então que saíram esses três números.



a) Seja X a variável aleatória «*produto dos três números saídos*». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X. Apresente as probabilidades na forma de fracção.

b) Seja R o acontecimento «*os números saídos são todos iguais*». Seja S o acontecimento «*a soma dos números saídos é igual a 3*». Os acontecimentos V e W são independentes? Justifique.

(Intermédio 1)

170.a) Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos de probabilidade não nula. Considere que $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B e que P(A|B) e P(B|A) designam probabilidades condicionadas. Mostre que

$$P(A \mid B) - P(\overline{B}) \times P(A \mid B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

b) Relativamente a uma turma do 12.º ano, sabe-se que:
- 60% dos alunos da turma praticam desporto;
- 40% dos alunos da turma são raparigas;
- metade dos praticantes de desporto são raparigas.

Escolhendo ao acaso um aluno da turma, qual é a probabilidade de ser praticante de desporto, sabendo que é uma rapariga? Apresente o resultado na forma de percentagem.

Nota: Se desejar, pode utilizar a fórmula da alínea anterior na resolução deste problema. Nesse caso, comece por explicitar o significado dos acontecimentos A e B, no contexto do problema. Também pode resolver o problema através de um diagrama, de uma tabela, ou utilizando qualquer outro processo.

(Intermédio 1)

171. Um saco contém bolas brancas e bolas pretas, pelo menos uma de cada cor, num total de cinco. Tiram-se, simultaneamente e ao acaso, três bolas do saco. Seja X a variável aleatória «número de bolas brancas retiradas». Sabendo que a variável X toma exclusivamente os valores 2 e 3, indique o número de bolas brancas e o número de bolas pretas que estão inicialmente no saco. Numa pequena composição, explique o seu raciocínio.

(Intermédio 1)

172. A Ana, a Bárbara, a Catarina, o Diogo e o Eduardo vão sentar-se num banco corrido, com cinco lugares. De quantas maneiras o podem fazer, ficando uma rapariga no lugar do meio?

(A) 27 (B) 72 (C) 120 (D) 144

(Intermédio 2)

173. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{3}{n}$ | $\frac{4}{n}$ | $\frac{5}{n}$ |

Qual é o valor de *n*?

(A) 4 (B) 5 (C) 12 (D) 15

(Intermédio 2)

174. Um saco contém onze bolas, numeradas de 1 a 11.

a) Ao acaso, tiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco. Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o número da primeira bola retirada é par»

B: «o número da segunda bola retirada é par»

Indique o valor de $P(B \mid \overline{A})$, na forma de fracção irredutível, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada. Justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B \mid \overline{A})$ no contexto da situação descrita.

b) Considere novamente o saco com a sua constituição inicial. Ao acaso, extraem-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respectivos números. Qual é a probabilidade de o produto desses números ser ímpar? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

(Intermédio 2)

175. Uma certa linha do Triângulo de Pascal tem exactamente oito elementos. Escolhem-se ao acaso dois desses oito elementos. Qual é a probabilidade de escolher dois números cujo produto seja igual a 7?

(A) $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) 0

(Intermédio 2)

176. Efectua-se um único lançamento de um dado tetraédrico, com as faces numeradas de 1 a 4. Considere que o «número que sai» é o número que está na face que fica voltada para baixo. O dado não é equilibrado, pelo que os quatro números não têm a mesma probabilidade de sair. Sejam A e B os acontecimentos seguintes:

A: «sair número par»;

B: «sair número menor do que 3».

Sabe-se que:

• P(A∩B)=0,1
• P(A)= $P(\overline{A})$
• P(A∪B)=0,7
Seja X a variável aleatória «número saído no lançamento efectuado». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X.
Nota: apresente todas as justificações e todos os cálculos que efectuar na determinação dos valores das probabilidades.

(Intermédio 2)

177. De um baralho com 40 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus), em que cada naipe contém um Ás, uma Dama, um Valete, um Rei e seis cartas (do Dois ao Sete), foram dadas sucessivamente, ao acaso, seis cartas a um jogador, que as coloca na mão, pela ordem que as recebe. Qual é a probabilidade de o jogador obter a sequência 2 – 4 – 6 – 7 – Dama – Rei , nas cartas recebidas?

(A) $\frac{4^6}{^{40}A_6}$ (B) $\frac{4^6}{^{40}C_6}$ (C) $\frac{1}{^{40}A_6}$ (D) $\frac{1}{^{40}C_6}$

(1ª fase)

178. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A ⊂ Ω e B ⊂ Ω). Sabe-se que:
• P(A) = 0,3
• P(B ) = 0,4
• P(A ∪ B) = 0,5
Qual é a probabilidade de se realizar A, sabendo que B se realiza?

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

(1ª fase)

179. Considere uma variável aleatória X, cuja distribuição de probabilidades é dada pela tabela seguinte.

| $x_i$ | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{k}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{k}{4}$ |

Qual é o valor de k ?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(1ª fase)

180. De um bilhete de lotaria sabe-se que o seu número é formado por sete algarismos, dos quais três são iguais a 1, dois são iguais a 4 e dois são iguais a 5 (por exemplo: 1551414 ). Determine quantos números diferentes satisfazem as condições anteriores.

(1ª fase)

181. Uma caixa contém bolas, indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 20. As bolas numeradas de 1 a 10 têm cor verde, e as bolas numeradas de 11 a 20 têm cor amarela. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente, duas bolas da caixa, não repondo a primeira bola retirada, e em registar a cor das bolas retiradas.

a) Determine a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa terem cores diferentes. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Na mesma experiência aleatória, considere os acontecimentos:

A: «A 1.ª bola retirada é verde.»
B: «A 2.ª bola retirada é amarela.»
C: «O número da 2.ª bola retirada é par.»
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P((B \cap C) \mid A)$?

A resposta correcta a esta questão é $P((B \cap C) \mid A) = \frac{5}{19}$.

Numa pequena composição, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, explique o valor dado, começando por interpretar o significado de , no contexto da situação descrita e fazendo referência:
• à Regra de Laplace;
• ao número de casos possíveis;
• ao número de casos favoráveis.

(1ª fase)

182. A Maria gravou nove CD, sete com música *rock* e dois com música popular, mas esqueceu-se de identificar cada um deles. Qual é a probabilidade de, ao escolher dois CD ao acaso, um ser de música *rock* e o outro ser de música popular?

(A) $\frac{7}{36}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{7}{18}$

(2ª fase)

183. Admita que um estudante tem de realizar dois testes no mesmo dia. A probabilidade de ter classificação positiva no primeiro teste é 0,7, a de ter classificação positiva no segundo teste é 0,8 e a de ter classificação negativa em ambos os testes é 0,1. Qual é a probabilidade de o estudante ter negativa no segundo teste, sabendo que teve negativa no primeiro teste?

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

(2ª fase)

184. Uma certa linha do Triângulo de Pascal é constituída por todos os elementos da forma $^{14}C_p$. Escolhido, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser o número 14?

(A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{1}{14}$ (C) $\frac{2}{15}$ (D) $\frac{4}{15}$

(2ª fase)

185. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos tais que A ⊂ Ω, B ⊂ Ω e P(B) ≠ 0 . Mostre que
$1-P(A|B)\times P(B)-P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{A})$

(2ª fase)

186. Considere um baralho com 52 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus). Em cada naipe, há um Ás, três figuras (uma Dama, um Valete, um Rei) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).

a) Retiram-se cinco cartas do baralho, que são colocadas lado a lado, em cima de uma mesa, segundo a ordem pela qual vão sendo retiradas. Quantas sequências se podem formar com as cinco cartas retiradas, caso a primeira carta e a última
carta sejam ases, e as restantes sejam figuras?

b) Admita que, num jogo, cada jogador recebe três cartas, por qualquer ordem. Qual é a probabilidade de um determinado jogador receber exactamente dois ases?

Uma resposta correcta a esta questão é $\dfrac{{}^{4}C_{2} \times 48}{{}^{52}C_{3}}$ .

Numa pequena composição, justifique esta resposta, fazendo referência:

• à Regra de Laplace;
• ao número de casos possíveis;
• ao número de casos favoráveis.

(2ª fase)

E12 Considere uma turma de uma escola secundária, com 8 rapazes e 12 raparigas. Pretende-se eleger o Delegado e o Subdelegado da turma. De quantas maneiras se pode fazer essa escolha, de modo a que os alunos escolhidos sejam de sexos diferentes?

(A) 96 (B) 190 (C) 192 (D) 380

(especial)

E13 Duas crianças escrevem, em segredo e cada uma em seu papel, uma letra da palavra VERÃO. Qual é a probabilidade de as duas crianças escreverem a mesma letra?

(A) $\frac{1}{25}$ (B) $\frac{2}{25}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

(especial)

E14 Seja X a variável peso, expressa em quilogramas (kg), dos bebés de uma creche. Admita que a variável X é bem modelada por uma distribuição normal de valor médio 5. Escolhido um dos bebés ao acaso, sabe-se que a probabilidade de o seu peso estar entre 5kg e 6kg é 0,4. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $P(X \geq 6) = 0{,}2$ (B) $P(4 \leq X \leq 5) = 0{,}4$
(C) $P(4 \leq X \leq 6) < 0{,}5$ (D) $P(X \leq 4) > 0{,}1$

(especial)

E15 Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Mostre que

$$P(B) + P(\bar{A}) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 2P(\bar{A}) + P(A \cup B)$$

(especial)

E16 Considere o conjunto A = {1, 3, 5, 6, 8}.

a) Com os elementos do conjunto A, quantos números pares de quatro algarismos se podem formar, que tenham dois e só dois algarismos iguais a 5?

b) De entre os elementos do conjunto A, escolhe-se um deles, ao acaso. Considere a variável aleatória X: «número de divisores do elemento escolhido». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X e determine o seu valor médio. Apresente o resultado na forma de dízima.

Nota: Apresente o valor das probabilidades na forma de fracção irredutível.

(especial)

Soluções: 1. D 2. 210; 6; 1/28 3. 60%; 25% 4. 2/9 5. $4{,}13 \times 10^{-4}$ 6. B 7. 4845; 61/969 8. C 9. A
10. A 11. B 12. A 13. 1/5 14. A 15. C 16. 0,216% 17. D 18. B 19. 0,1(63)
20. 2/21 21. C 22. B 23. 75075; 0,114 24. B 25. 2916; 0,504 26. D 27. A 28. 3% 29. C 30. A
31. 1º 32. D 33. B 34. 120; 1/3 35. D 36. A 37. 70; 51% 38. C 39. C 40. 72; 2/9
41. A 42. C 43. 2/5 45. B 46. B 47. 3628800; 103680; 1/15 48.C 49. A 50. 0,134 51. A
52. A 53.16/17; 4% 54. C 55. D 56. 35%; 1/3; 1/15 57. C 58. A 59. 0,0000079
60. D 61.C 62. 1/9 63. C 64. B 65. 1656; 10350; 13/23. 66. D 67. B 68. 7/12; 64084800 69. B
70. D 71. 6%; 0,006 72. C 73. D 74. 0,336; 1/17 75. C 76. A 77. 604800; 2400 78. 6/7 79. A
80.C 81. 58%; 44% 83. D 84. A 85. 48; 480 87. C 88. A 89. 2/5, 8/15, 1/15; 1/7 90. C 91. D
92. 1/3; 11,6% 94. D 95. C 96. 9/22; 1/22 98. B 99. B 100. 72; 16; $x_i$: 0 e 1; $p_i$: 5/7 e 2/7 101. D 102. B
103. C 104. C 105. A 106. B 107. C 108. 180; 648 109. 0,42 110. $x_i$: 0, 1, 2 e $p_i$: 4/15, 8/15, 1/5; 8/15; 10
111. D 112. B 113. C 114. C 115. B 116. 60; 1/11 117. 11 118. A 119. D 120. 81/253; 2/9 121. 4
122. B 123. B 124. A 125. A 126. B 127. C 128. C 129. 1437004800; 0,34 130. $x_i$: 1, 2 e 3; 0,4, 0,5 e 0,1; 16/45; 7/10
131. 11/12 132. D 133. A 134. D 135. A 136. C 137. Sim 138. 0,68 139. A 140. C 141. 16/49
142. 8/15 143. C 144. A 145. A 146. D 147. –2, –1 e 1; 1/3, 1/6 e ½; $\mu = -1/3$ 148. 420; 2/5 150. B 151. 1/3
153. B 154. C 155. C 156. 0,24 158. D 159. D 160. C 161. 0,74 162. 2, 3 e 4; 1/7, 4/7 e 2/7; 3
163. C 164. A 165. B 166. A 167. A 168. 840; 62; 3/1001 169. $x_i$: 0,1,8 e $P(X=x_i)$: 2/3, 1/6,1/6; não 17. 75%
171. 4 e 1 172. B 173. C 174. 1/2; 0,12 175. C 176. $x_i$: 1,2,3,4 e $P(X=x_i)$: 0,2;0,1;0,3;0,4 177. A 178. D
179. B 180. 210 181. 10/19 182. D 183. C 184. C 186. ou 0 ou 1 ou 120 ou 12 ou 15840

E1. C E2. A E3. 1/10; 1/3; 1701 E4. D E5. C E6. por exemplo, A:«sair 2 vezes o 4» e B:«saírem 2 n.ºs pares»; 1/12; 1/6 e ½
E7. C E8. C E9. B E10. 144 E12. C E13. C E14. B E16. 24; 13/5

## *As Probabilidades e a Combinatória na Literatura* (http://www.prof2000.pt/users/roliveira0/Literat0.htm)

“*Entre irmãos, há 25% de probabilidade de os tecidos* [da medula óssea] *serem compatíveis* (...) ”

AS CHAVES DA RUA, Ruth Rendell

“*O Dr. Kilvan* [explicou que] *relativamente aos americanos, o risco de contrair cancro do pulmão para um fumador de quinze cigarros por dia durante vinte anos é dez vezes maior do que para um não-fumador. No caso de dois maços por dia, o risco é vinte vezes maior, e no caso de três* (...) *o risco é vinte e cinco vezes maior* ”

O JÚRI, John Grisham

“*O homem inseriu a placa no leitor de cartões e ligou o instrumento.*
*- Experimenta todas as combinações possíveis – explicou.* ”

O TERCEIRO GÉMEO, Ken Follet

“*O rótulo do novo factor dizia qualquer coisa acerca de menos de um por cento de probabilidade de se contrair sida.*”

VENCENDO AS LÁGRIMAS, Jeanne White e Susan Dworkin

"(...)*sem contar com a argúcia e a experiência da gente pedinchante, sempre que é preciso recorrer ao cálculo de probabilidades, mínimas neste caso.*"
O EVANGELHO SEGUNDO JESUS CRISTO, José Saramago

"(...)*por isso a mulher foi-se. Ou morreu, ou divorciou-se, por isso eu tinha cinquenta por cento de probabilidades de acertar.*"
JOGO MORTÍFERO, Lee Child

"*Por fim, a selecção do alvo pode ser específica ou aleatória. É óbvio que o terramoto mataria muita gente indiscriminadamente, portanto é aleatória.*"
O MARTELO DO PARAÍSO, Ken Follet

"*No jogo da roleta da pena de morte, uma hipótese de cinquenta porcento era quase uma certeza.*"
A CÂMARA, John Grisham

" (...) *mas que as probabilidades de sermos bem-sucedidos se ficam pelos cinquenta porcento. E as de sairmos ilesos são ainda mais baixas.*"
SOMBRAS SOBRE A BABILÓNIA, David Mason

"*- Põe-te mais na vertical, Jeff – instruí-o – Nesse ângulo, o teu peso empurra-te os pés para o lado e tens mais probabilidades de escorregar.*"
STINGER, John Nichol

"*Provavelmente verá a rapariga da mão paralisada, logo à noite, na sala de jantar, é uma probabilidade, como também o são o homem gordo, o magro de luto, as crianças pálidas e seus pletóricos pais*[...]"
"[...]*Não estou a brincar, aliás, não percebo esse espanto, se um homem vai para a cama com uma mulher, persistentemente, são muitas as probabilidades de virem a fazer um filho, foi o que aconteceu neste caso* [...]"
O ANO DA MORTE DE RICARDO REIS, José Saramago

"*-Portanto, ele introduziu na nota, ao acaso, frases soando a estrangeiro a fim de nos despistar.*"
"*Uma das câmaras de vídeo estava apontada aos olhos de Czisman e fazia continuamente testes à retina para análise das 'probabilidades de verdade', ou seja, para detecção de mentiras.*"
"*-Tenho tentado ampliá-la para lhe ver o rosto. Tenho noventa por cento de certeza de que ele é branco.*"
"*A seguir a esta frase, o computador inseria combinações de letras extraídas dos fragmentos de cinza. Acabara de acrescentar a letra i a seguir ao R. Outra estava já a formar-se à frente dessa.*"
A LÁGRIMA DO DIABO, Jeffery Deaver

"Dez dígitos. *Sophie calculou relutantemente as probabilidades criptográficas. Dez mil milhões de escolhas possíveis. Mesmo que pudesse usar os mais potentes computadores de processamento em rede da DCPJ, precisaria de semanas para decifrar o código.*"
"*- Como vê – continuou Sophie -, a única maneira de obter a informação é conhecer a senha, com cinco letras. E com cinco anéis, cada um deles com vinte e seis letras, temos vinte e seis elevado à quinta potência. – Fez rapidamente as contas. – Cerca de doze milhões de possibilidades.*"
O CÓDIGO DA VINCI, Dan Brown

"*Em Abulafia a palavra de ordem podia ser de sete letras. Quantas combinações de sete letras se podiam dar com as vinte e cinco letras do alfabeto, calculando também as repetições, porque nada impedia que a palavra fosse 'cadabra'? Existe uma fórmula em qualquer parte, e o resultado devia ser de seis biliões e qualquer coisa. Tendo uma calculadora gigante, capaz de encontrar seis mil milhões de combinações a um milhão por segundo, teria porém de comunicá-la a Abulafia uma a uma, para as experimentar, e já sabia que Abulafia demoraria cerca de dez segundos para pedir e depois verificar o password. Portanto, sessenta mil milhões de segundos. Como um ano tem pouco mais de trinta e um milhões de segundos, façamos trinta para arredondar, o tempo de trabalho seria de cerca de dois mil anos. Nada mau.*"
"*- Experimenta, escreve I, H, V, H, quando te pedir o* input*, e põe o programa a trabalhar. Talvez fiques mal: as combinações possíveis são só vinte e quatro.*
*- santos Serafins! E o que fazes tu com vinte e quatro nomes de Deus? Julgas que os nossos sábios não fizeram já o cálculo? Mas lê o* Sefer Jerisah*, décima sexta acção do capítulo quatro. E não tinham calculadoras. 'Duas Pedras constroem duas Casas. Três Pedras constroem seis Casas. Quatro Pedras constroem vinte e quatro Casas. Cinco Pedras constroem cento e vinte Casas. Seis Pedras constroem setecentas e vinte Casas. Sete Pedras constroem cinco mil e quarenta Casas. Daqui para diante vai e pensa no que a boca não pode dizer e a orelha não pode ouvir.' Sabes como é que se chama hoje a isto? Cálculo factorial. E sabes porque é que a Tradição te avisa que daqui para diante é melhor desistires? Porque se as letras do nome de Deus fossem oito as combinações seriam quarenta mil e se fossem dez seriam três milhões e seiscentas mil, e as combinações do teu pobre nome seriam quase quarenta milhões, e agradece a Deus por não teres a* middle initial *como os americanos, senão chegarias a mais de quatrocentos milhões. E se as letras do nome de Deus fossem vinte e sete, porque o alfabeto hebraico não tem vogais, mas sim vinte e dois sons mais cinco variantes – os seus nomes possíveis seriam um número de vinte e nove algarismos. Mas deverias calcular também as repetições, porque não se pode excluir que o nome de Deus seja Alef repetido vinte e sete vezes, então o factorial já não te chegaria e terias de calcular vinte e sete à vigésima sétima: e terias, julgo eu, quatrocentos e quarenta e quatro biliões de biliões de biliões de possibilidades, ou pelo menos, de qualquer modo, um número de trinta e nove algarismos.*"
O PÊNDULO DE FOUCAULT, Umberto Eco

"*Nesta expedição em busca do capitão Grant a soma de probabilidades parecia aumentar todos os dias.*"
"*Visto que a presença de Harry Grant se tornara um facto indiscutível, as consequências da expedição podiam ser grandes. Aumentava o número de probabilidades favoráveis.*"
"*Diz-se que entre um carcereiro que vela e um preso que quer fugir, as probabilidades são a favor do preso.*"
OS FILHOS DO CAPITÃO GRANT, Jules Verne

"*- Use uma média! – gritou Fichter, que se precipitou para o quadro e começou a colocar valores nos cálculos de probabilidades.*"
"*Era só uma probabilidade, tão aleatória como a probabilidade anterior de infiltração no programa do reactor nazi. E essa operação resultara em cheio.*"
A EQUAÇÃO HIMMLER, William P. Kennedy

"*Cheirava a urina – um cheiro comum numa cidade onde os bares excediam os urinóis públicos numa proporção de vinte para um.*"
ANJOS E DEMÓNIOS, Dan Brown

O professor: RobertOliveira