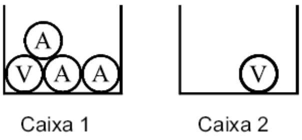
(*Testes intermédios e exames 2007/2008*)

143. Uma caixa 1 tem uma bola verde e três bolas amarelas. Uma caixa 2 tem apenas uma bola verde. Considere a experiência que consiste em tirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa 1, colocá-las na caixa 2 e, em seguida, tirar, também ao acaso, uma bola da caixa 2. Sejam M e V os acontecimentos:



M: «as bolas retiradas da caixa 1 têm a mesma cor»
V: «a bola retirada da caixa 2 é verde»

Indique o valor da probabilidade condicionada $P(V \mid \overline{M})$

(*Não necessita de recorrer à fórmula da probabilidade condicionada*)

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 1

(Intermédio 1)

144. Os códigos dos cofres fabricados por uma certa empresa consistem numa sequência de cinco algarismos como, por exemplo, 07757. Um cliente vai comprar um cofre a esta empresa. Ele pede que o respectivo código satisfaça as seguintes condições:
- tenha exactamente três algarismos 5
- os restantes dois algarismos sejam diferentes
- a soma dos seus cinco algarismos seja igual a dezassete

Quantos códigos diferentes existem satisfazendo estas condições?

(A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80

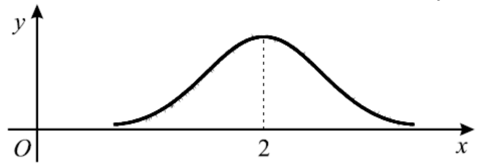
(Intermédio 1)

145. A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 31. Qual é o quinto elemento da linha anterior?

(A) 23751 (B) 28416 (C) 31465 (D) 36534

(Intermédio 1)

146. A Curva de Gauss representada na figura está associada a uma variável aleatória X, com distribuição Normal.

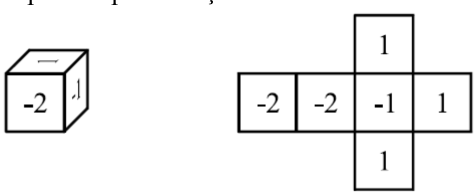


Tal como a figura sugere, a curva é simétrica relativamente à recta de equação $x = 2$. Para um certo valor de a, tem-se que $P(X>a)=15\%$. Qual dos seguintes pode ser o valor de a?

(A) 1 (B) 1,5 (C) 2 (D) 2,5

(Intermédio 1)

147. Na figura está representado um dado equilibrado e a respectiva planificação.



Lança-se este dado uma única vez. Seja X o número escrito na face que fica voltada para cima. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X e, seguidamente, determine, <u>sem recorrer à calculadora</u>, o valor médio desta variável. Apresente o valor médio na forma de fracção irredutível.

(Intermédio 1)

148. Doze amigos vão passear, deslocando-se num automóvel e numa carrinha, ambos alugados. O automóvel dispõe de cinco lugares: o do condutor e mais quatro. A carrinha dispõe de sete lugares: o do condutor e mais seis. Apenas dois elementos do grupo, a Filipa e o Gonçalo, têm carta de condução, podendo qualquer um deles conduzir, quer o automóvel, quer a carrinha.

a) Os doze amigos têm de se separar em dois grupos, de modo a que um grupo viaje no automóvel e o outro na carrinha. De quantas maneiras diferentes podem ficar constituídos os dois grupos de amigos?

b) Admita agora que os doze amigos já se encontram devidamente instalados nos dois veículos. O Gonçalo vai a conduzir a carrinha. Numa operação STOP, a Brigada de Trânsito mandou parar cinco viaturas, entre as quais a carrinha conduzida pelo Gonçalo. Se a Brigada de Trânsito escolher, ao acaso, dois dos cinco condutores para fazer o teste de alcoolémia, qual é a probabilidade de o Gonçalo ter de fazer o teste? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(Intermédio 1)

149. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), ambos com probabilidade não nula. Utilizando a fórmula da probabilidade condicionada e as propriedades das operações com conjuntos, prove que

$$P(\overline{(\overline{A} \cap B)} \mid B) = P(A \mid B)$$

(Intermédio 1)

150. Lança-se cinco vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. Seja p a probabilidade de, nos cinco lançamentos, sair face 6 exactamente duas vezes. Qual é o valor de p arredondado às centésimas?

(A) 0,12 (B) 0,16 (C) 0,23 (D) 0,27

(Intermédio 2)

151. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. De dois acontecimentos A e B ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), de probabilidade não nula, sabe-se que:
- $P(A) = P(B)$
- $P(A \cup B) = 5P(A \cap B)$

Determine a probabilidade de acontecer A, sabendo que B aconteceu. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(Intermédio 2)

152. Considere o seguinte problema: *Lança-se três vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e multiplicam-se os números saídos. Qual é a probabilidade de o produto obtido ser igual a 6?*

Uma resposta correcta a este problema é $\frac{3!+3}{6^3}$

Numa pequena composição, explique porquê. A sua composição deve incluir:
• uma referência à Regra de Laplace;
• uma explicação do número de casos possíveis;
• uma explicação do número de casos favoráveis.

(Intermédio 2)

153. O João e a Maria convidaram três amigos para irem, com eles, ao cinema. Compraram cinco bilhetes com numeração seguida, numa determinada fila, e distribuíram-nos ao acaso. Qual é a probabilidade de o João e a Maria ficarem sentados um ao lado do outro?
(A) 1/5 (B) 2/5 (C) 3/5 (D) 4/5

(1ª fase)

154. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos. Sabe-se que:
• $P(A \cup B) = 80\%$
• $P(B) = 60\%$
• $P(A \cap B) = 10\%$
Qual é o valor de P(A)?
(A) 10% (B) 20% (C) 30% (D) 40%

(1ª fase)

155. Admita que a variável peso, expressa em gramas, das maçãs de um pomar é bem modelada por uma distribuição normal N (60;5), em que 60 é o valor médio e 5 é o valor do desvio-padrão da distribuição. Retira-se, ao acaso, uma dessas maçãs. Considere os acontecimentos:
A : «o peso da maçã retirada é superior a 66 gramas»
B : «o peso da maçã retirada é inferior a 48 gramas»
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
(A) $P(A) = P(B)$ (B) $P(A) < P(B)$
(C) $P(B) < P(A)$ (D) $P(A) + P(B) = 1$

(1ª fase)

156. Uma turma do 12.º ano de uma Escola Secundária está a organizar uma viagem de finalistas.

a) Os alunos da turma decidiram vender rifas, para angariarem fundos para a viagem. A numeração das rifas é uma sequência de três algarismos (como, por exemplo, 099), iniciando-se em 000. De entre as rifas, que foram todas vendidas, será sorteada uma, para atribuir um prémio. Qual é a probabilidade de a rifa premiada ter um único algarismo cinco? Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às centésimas.

b) A turma é constituída por doze raparigas e dez rapazes, que pretendem formar uma comissão organizadora da viagem. Sabe-se que a comissão terá obrigatoriamente três raparigas e dois rapazes. A Ana e o Miguel, alunos da turma, não querem fazer parte da comissão em simultâneo. Explique, numa composição, que o número de comissões diferentes que se pode formar é dado por:
$^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9$

(1ª fase)

157. Em duas caixas, A e B, introduziram-se bolas indistinguíveis ao tacto:
• na caixa A: algumas bolas verdes e algumas bolas azuis;
• na caixa B: três bolas verdes e quatro azuis.
Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa A e coloca-se na caixa B. De seguida, retira-se, também ao acaso, uma bola da caixa B. Sabendo que a probabilidade de a bola retirada da caixa B ser azul é igual a 1/2, mostre que a bola que foi retirada da caixa A e colocada na caixa B tinha cor verde.

(1ª fase)

158. Ao disputar um torneio de tiro ao alvo, o João tem de atirar sobre o alvo quatro vezes. Sabe-se que, em cada tiro, a probabilidade de o João acertar no alvo é 0,8. Qual é a probabilidade de o João acertar sempre no alvo, nas quatro vezes em que tem de atirar?
(A) 0,0016 (B) 0,0064 (C) 0,0819 (D) 0,4096

(2ª fase)

159. Uma caixa A contém duas bolas verdes e uma bola amarela. Outra caixa B contém uma bola verde e três bolas amarelas. As bolas colocadas nas caixas A e B são indistinguíveis ao tacto. Lança-se um dado cúbico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 6. Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A; caso contrário, tira-se uma bola da caixa B. Qual é a probabilidade de a bola retirada ser verde, sabendo que saiu o número 5 no lançamento do dado?
(A) ¼ (B) 1/3 (C) 3/7 (D) 2/3

(2ª fase)

160. Uma linha do Triângulo de Pascal tem quinze elementos. Quantos elementos dessa linha são inferiores a 100?
(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8

(2ª fase)

161. a) Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$)). Prove que:
$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B)$

b) Numa determinada cidade, das 160 raparigas que fizeram o exame nacional de Matemática, 65% tiveram classificação positiva, e, dos 120 rapazes que fizeram o mesmo exame, 60% também tiveram classificação positiva. Escolhendo, ao acaso, um dos estudantes que realizaram o exame, qual é a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva? Apresente o resultado em forma de dízima, com aproximação às centésimas.
Nota: Se o desejar, utilize a igualdade referida em a). Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada; no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo.

(2ª fase)

162. Numa caixa temos três fichas com o número 1 e quatro fichas com o número 2, indistinguíveis ao tacto. Retiram-se, ao acaso e de uma só vez, duas fichas. Seja X a variável aleatória: «*a soma dos números inscritos nas duas fichas*». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Indique, justificando, o valor mais provável da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.

(2ª fase)

E7 Quantos números ímpares, de quatro algarismos diferentes, se pode formar com os algarismos 1, 3, 5 e 8?
(A) 4 (B) 6 (C) 18 (D) 24

(Especial)

E8 O 14.º elemento de uma linha do Triângulo de Pascal é igual ao 15.º elemento dessa mesma linha. Quantos elementos tem essa linha?
(A) 14 (B) 15 (C) 28 (D) 30

(Especial)

E9 Em cada semana, a chave do Totoloto é formada por seis números inteiros distintos, escolhidos aleatoriamente entre 1 e 49. Qual é a probabilidade de, na próxima semana, a chave do totoloto incluir os números 1, 2 e 3?

(A) $\frac{{}^{46}C_3}{{}^{46}C_6}$ (B) $\frac{{}^{46}C_3}{{}^{49}C_6}$ (C) $\frac{{}^{46}C_6}{{}^{49}C_6}$ (D) $\frac{{}^{49}C_3}{{}^{49}C_6}$

(Especial)

E10 Três rapazes, o João, o Rui e o Paulo, e três raparigas, a Ana, a Maria e a Francisca, decidem passar a tarde juntos.
a) De quantas maneiras se podem sentar os seis amigos, uns ao lado dos outros, num banco corrido com seis lugares, ficando um rapaz em cada uma das extremidades?
b) Depois de ouvirem algumas músicas, os seis jovens resolveram dançar aos pares. Admita que, numa dança:
• cada rapaz dança com uma rapariga;
• todos os jovens dançam;
• todos os pares são escolhidos ao acaso.
A probabilidade de, nessa dança, a Ana dançar com o João é igual a $\frac{2}{3!}$.
Explique, numa pequena composição, o raciocínio que conduziu a esta expressão.
Nota: Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:
• referência à Regra de Laplace;
• explicação do número de casos possíveis;
• explicação do número de casos favoráveis.

(Especial)

E11 Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis (A⊂sΩ e B⊂Ω). Mostre que:
$1 - P(\overline{A \cup B}) + P(A \mid B) \times P(B) = P(A) + P(B)$

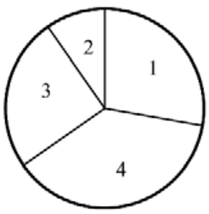
(Especial)

(*Testes intermédios e exames 2008/2009*)

163. A soma dos dois primeiros elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 13. Quantos elementos dessa linha são menores do que 70?
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

(Intermédio 1)

164. Na figura está representado um círculo dividido em quatro sectores circulares diferentes, numerados de 1 a 4. Estão disponíveis cinco cores para pintar este círculo. Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições:



• todos os sectores devem ser pintados;
• cada sector é pintado com uma única cor;
• sectores com um raio em comum não podem ficar pintados com a mesma cor;
• o círculo deve ficar pintado com duas ou com quatro cores.
De quantas maneiras diferentes pode o círculo ficar pintado?
(A) 140 (B) 230 (C) 310 (D) 390

(Intermédio 1)

165. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos. Sabe--se que P(A)=0,5 e que P(B)=0,7. Podemos então garantir que ...
(A) A e B são acontecimentos contrários
(B) A e B são acontecimentos compatíveis
(C) A está contido em B
(D) o acontecimento A ∪ B é certo

(Intermédio 1)

166. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	a	b	0,5

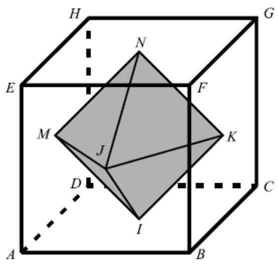
(*a* e *b* designam números reais). O valor médio desta variável aleatória é 1,4. Qual é o valor de *a*?
(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,5

(Intermédio 1)

167. O diâmetro, em milímetros, dos parafusos produzidos por uma certa máquina é uma variável aleatória X com distribuição normal, de valor médio 9. Qualquer parafuso produzido por essa máquina passa por um controle de qualidade. Ao passar por esse controle, o parafuso é aprovado se o seu diâmetro estiver compreendido entre 8,7 e 9,3 milímetros. Caso contrário, é rejeitado. Sabe-se que 99,73% dos parafusos são aprovados. Qual é o desvio padrão da variável aleatória X?
(A) 0,1 (B) 0,3 (C) 0,6 (D) 0,9

(Intermédio 1)

168. Na figura estão representados dois poliedros, o cubo [ABCDEFGH] e o octaedro [IJKLMN] (o vértice L do octaedro não está visível). Cada vértice do octaedro pertence a uma face do cubo.



a) Considere todos os conjuntos que são constituídos por cinco dos catorze vértices dos dois poliedros (como, por exemplo, {A,B,C,K,L}).

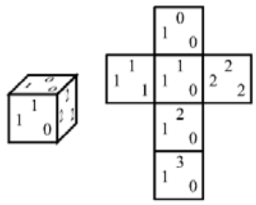
a_1) Quantos desses conjuntos são constituídos por três vértices do cubo e dois vértices do octaedro?

a_2) Quantos desses conjuntos são constituídos por cinco vértices do mesmo poliedro?

b) Escolhem-se ao acaso cinco dos catorze vértices dos dois poliedros. Qual é a probabilidade de os cinco vértices escolhidos pertencerem todos à mesma face do cubo? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(Intermédio 1)

169. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação. Conforme se pode observar na figura, existem três números em cada face. Lança-se este dado uma só vez e observam-se os números da face que fica voltada para cima. Diz-se então que saíram esses três números.



a) Seja X a variável aleatória «*produto dos três números saídos*». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X. Apresente as probabilidades na forma de fracção.

b) Seja R o acontecimento «*os números saídos são todos iguais*». Seja S o acontecimento «*a soma dos números saídos é igual a 3*». Os acontecimentos V e W são independentes? Justifique.

(Intermédio 1)

170.a) Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos de probabilidade não nula. Considere que $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B e que P(A|B) e P(B|A) designam probabilidades condicionadas. Mostre que

$$P(A \mid B) - P(\overline{B}) \times P(A \mid B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

b) Relativamente a uma turma do 12.º ano, sabe-se que:
- 60% dos alunos da turma praticam desporto;
- 40% dos alunos da turma são raparigas;
- metade dos praticantes de desporto são raparigas.

Escolhendo ao acaso um aluno da turma, qual é a probabilidade de ser praticante de desporto, sabendo que é uma rapariga? Apresente o resultado na forma de percentagem.

Nota: Se desejar, pode utilizar a fórmula da alínea anterior na resolução deste problema. Nesse caso, comece por explicitar o significado dos acontecimentos A e B, no contexto do problema. Também pode resolver o problema através de um diagrama, de uma tabela, ou utilizando qualquer outro processo.

(Intermédio 1)

171. Um saco contém bolas brancas e bolas pretas, pelo menos uma de cada cor, num total de cinco. Tiram-se, simultaneamente e ao acaso, três bolas do saco. Seja X a variável aleatória «número de bolas brancas retiradas». Sabendo que a variável X toma exclusivamente os valores 2 e 3, indique o número de bolas brancas e o número de bolas pretas que estão inicialmente no saco. Numa pequena composição, explique o seu raciocínio.

(Intermédio 1)

172. A Ana, a Bárbara, a Catarina, o Diogo e o Eduardo vão sentar-se num banco corrido, com cinco lugares. De quantas maneiras o podem fazer, ficando uma rapariga no lugar do meio?

(A) 27 (B) 72 (C) 120 (D) 144

(Intermédio 2)

173. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{n}$	$\frac{4}{n}$	$\frac{5}{n}$

Qual é o valor de *n*?

(A) 4 (B) 5 (C) 12 (D) 15

(Intermédio 2)

174. Um saco contém onze bolas, numeradas de 1 a 11.

a) Ao acaso, tiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco. Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o número da primeira bola retirada é par»

B: «o número da segunda bola retirada é par»

Indique o valor de $P(B \mid \overline{A})$, na forma de fracção irredutível, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada. Justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B \mid \overline{A})$ no contexto da situação descrita.

b) Considere novamente o saco com a sua constituição inicial. Ao acaso, extraem-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respectivos números. Qual é a probabilidade de o produto desses números ser ímpar? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

(Intermédio 2)

175. Uma certa linha do Triângulo de Pascal tem exactamente oito elementos. Escolhem-se ao acaso dois desses oito elementos. Qual é a probabilidade de escolher dois números cujo produto seja igual a 7?

(A) $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) 0

(Intermédio 2)

176. Efectua-se um único lançamento de um dado tetraédrico, com as faces numeradas de 1 a 4. Considere que o «número que sai» é o número que está na face que fica voltada para baixo. O dado não é equilibrado, pelo que os quatro números não têm a mesma probabilidade de sair. Sejam A e B os acontecimentos seguintes:

A: «sair número par»;

B: «sair número menor do que 3».

Sabe-se que:

• $P(A \cap B)=0,1$
• $P(A)= P(\overline{A})$
• $P(A \cup B)=0,7$

Seja X a variável aleatória «número saído no lançamento efectuado». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X.
Nota: apresente todas as justificações e todos os cálculos que efectuar na determinação dos valores das probabilidades.

(Intermédio 2)

177. De um baralho com 40 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus), em que cada naipe contém um Ás, uma Dama, um Valete, um Rei e seis cartas (do Dois ao Sete), foram dadas sucessivamente, ao acaso, seis cartas a um jogador, que as coloca na mão, pela ordem que as recebe. Qual é a probabilidade de o jogador obter a sequência 2 – 4 – 6 – 7 – Dama – Rei , nas cartas recebidas?

(A) $\frac{4^6}{{}^{40}A_6}$ (B) $\frac{4^6}{{}^{40}C_6}$ (C) $\frac{1}{{}^{40}A_6}$ (D) $\frac{1}{{}^{40}C_6}$

(1ª fase)

178. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• $P(A) = 0,3$
• $P(B) = 0,4$
• $P(A \cup B) = 0,5$

Qual é a probabilidade de se realizar A, sabendo que B se realiza?
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

(1ª fase)

179. Considere uma variável aleatória X, cuja distribuição de probabilidades é dada pela tabela seguinte.

x_i	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{k}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{k}{4}$

Qual é o valor de k ?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(1ª fase)

180. De um bilhete de lotaria sabe-se que o seu número é formado por sete algarismos, dos quais três são iguais a 1, dois são iguais a 4 e dois são iguais a 5 (por exemplo: 1551414). Determine quantos números diferentes satisfazem as condições anteriores.

(1ª fase)

181. Uma caixa contém bolas, indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 20. As bolas numeradas de 1 a 10 têm cor verde, e as bolas numeradas de 11 a 20 têm cor amarela. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente, duas bolas da caixa, não repondo a primeira bola retirada, e em registar a cor das bolas retiradas.

a) Determine a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa terem cores diferentes. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Na mesma experiência aleatória, considere os acontecimentos:
A: «A 1.ª bola retirada é verde.»
B: «A 2.ª bola retirada é amarela.»
C: «O número da 2.ª bola retirada é par.»
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P((B \cap C) \mid A)$?
A resposta correcta a esta questão é $P((B \cap C) \mid A) = \frac{5}{19}$.
Numa pequena composição, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, explique o valor dado, começando por interpretar o significado de , no contexto da situação descrita e fazendo referência:
• à Regra de Laplace;
• ao número de casos possíveis;
• ao número de casos favoráveis.

(1ª fase)

182. A Maria gravou nove CD, sete com música *rock* e dois com música popular, mas esqueceu-se de identificar cada um deles. Qual é a probabilidade de, ao escolher dois CD ao acaso, um ser de música *rock* e o outro ser de música popular?
(A) $\frac{7}{36}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{7}{18}$

(2ª fase)

183. Admita que um estudante tem de realizar dois testes no mesmo dia. A probabilidade de ter classificação positiva no primeiro teste é 0,7, a de ter classificação positiva no segundo teste é 0,8 e a de ter classificação negativa em ambos os testes é 0,1. Qual é a probabilidade de o estudante ter negativa no segundo teste, sabendo que teve negativa no primeiro teste?
(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

(2ª fase)

184. Uma certa linha do Triângulo de Pascal é constituída por todos os elementos da forma ${}^{14}C_p$. Escolhido, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser o número 14?
(A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{1}{14}$ (C) $\frac{2}{15}$ (D) $\frac{4}{15}$

(2ª fase)

185. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$. Mostre que
$1-P(A|B)\times P(B)-P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{A})$

(2ª fase)

186. Considere um baralho com 52 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus). Em cada naipe, há um Ás, três figuras (uma Dama, um Valete, um Rei) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).

a) Retiram-se cinco cartas do baralho, que são colocadas lado a lado, em cima de uma mesa, segundo a ordem pela qual vão sendo retiradas. Quantas sequências se podem formar com as cinco cartas retiradas, caso a primeira carta e a última
carta sejam ases, e as restantes sejam figuras?

b) Admita que, num jogo, cada jogador recebe três cartas, por qualquer ordem. Qual é a probabilidade de um determinado jogador receber exactamente dois ases?

Uma resposta correcta a esta questão é $\dfrac{{}^{4}C_{2} \times 48}{{}^{52}C_{3}}$.

Numa pequena composição, justifique esta resposta, fazendo referência:
• à Regra de Laplace;
• ao número de casos possíveis;
• ao número de casos favoráveis.

(2ª fase)

$\boxed{\text{E12}}$ Considere uma turma de uma escola secundária, com 8 rapazes e 12 raparigas. Pretende-se eleger o Delegado e o Subdelegado da turma. De quantas maneiras se pode fazer essa escolha, de modo a que os alunos escolhidos sejam de sexos diferentes?
(A) 96 (B) 190 (C) 192 (D) 380

(especial)

$\boxed{\text{E13}}$ Duas crianças escrevem, em segredo e cada uma em seu papel, uma letra da palavra VERÃO. Qual é a probabilidade de as duas crianças escreverem a mesma letra?
(A) $\frac{1}{25}$ (B) $\frac{2}{25}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

(especial)

$\boxed{\text{E14}}$ Seja X a variável peso, expressa em quilogramas (kg), dos bebés de uma creche. Admita que a variável X é bem modelada por uma distribuição normal de valor médio 5. Escolhido um dos bebés ao acaso, sabe-se que a probabilidade de o seu peso estar entre 5kg e 6kg é 0,4. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
(A) $P(X \geq 6) = 0{,}2$ (B) $P(4 \leq X \leq 5) = 0{,}4$
(C) $P(4 \leq X \leq 6) < 0{,}5$ (D) $P(X \leq 4) > 0{,}1$

(especial)

$\boxed{\text{E15}}$ Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Mostre que
$$P(B) + P(\overline{A}) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 2P(\overline{A}) + P(A \cup B)$$

(especial)

$\boxed{\text{E16}}$ Considere o conjunto A = {1, 3, 5, 6, 8}.
a) Com os elementos do conjunto A, quantos números pares de quatro algarismos se podem formar, que tenham dois e só dois algarismos iguais a 5?
b) De entre os elementos do conjunto A, escolhe-se um deles, ao acaso. Considere a variável aleatória X: «número de divisores do elemento escolhido». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X e determine o seu valor médio. Apresente o resultado na forma de dízima.
Nota: Apresente o valor das probabilidades na forma de fracção irredutível.

(especial)

(*Testes intermédios e exames 2009/2010*)

187. Quantos números pares de cinco algarismos diferentes se podem escrever, utilizando os algarismos do número 12345?
(A) 24 (B) 48 (C) 60 (D) 96

(Intermédio 1)

188. Numa certa linha do Triângulo de Pascal, o segundo elemento é 2009. Quantos elementos dessa linha são maiores do que *um milhão*?
(A) 2004 (B) 2005 (C) 2006 (D) 2007

(Intermédio 1)

189. Uma variável aleatória *X* tem distribuição normal. Sabe-se que $P(X>50)$ é inferior a $P(X<40)$. Qual dos números seguintes pode ser o valor médio da variável aleatória *X* ?
(A) 42 (B) 45 (C) 48 (D) 51

(Intermédio 1)

190. Na figura 1 estão representados oito cartões, numerados de 1 a 8.

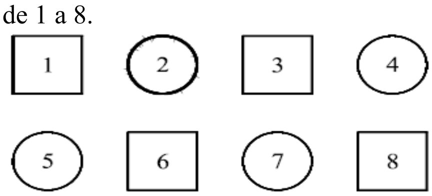


Figura 1

Escolhe-se, ao acaso, um destes oito cartões e observa-se a sua forma e o número nele inscrito. Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:
A: «O número do cartão escolhido é maior do que $\sqrt{30}$ »
B: «O cartão escolhido é um círculo»
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A \mid B)$?
$\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

(Intermédio 1)

191. A estatística revela que o basquetebolista *Zé Mão Quente* falha 10% dos lances livres que executa. Num treino, o Zé Mão Quente vai executar uma série de oito lances livres. Indique qual dos acontecimentos seguintes tem probabilidade igual a $1 - 0{,}9^8 - {}^{8}C_7 \times 0{,}9^7 \times 0{,}1$
(A) O *Zé Mão Quente* concretiza pelo menos seis lances livres.
(B) O *Zé Mão Quente* concretiza pelo menos sete lances livres.
(C) O *Zé Mão Quente* concretiza no máximo seis lances livres.
(D) O *Zé Mão Quente* concretiza no máximo sete lances livres.

(Intermédio 1)

192. 1. Na figura 2 está representado um prisma pentagonal regular. Quatro dos vértices desse prisma estão designados pelas letras A, B, E e O.

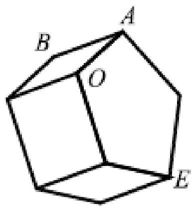


Figura 2

a) Pretende-se designar os <u>restantes seis</u> vértices do prisma, utilizando letras do alfabeto português (23 letras). De quantas maneiras diferentes podemos designar esses seis vértices, de tal modo que os cinco vértices de uma das bases sejam designados pelas cinco vogais?

<u>Nota</u>: não se pode utilizar a mesma letra para designar vértices diferentes.

b) Ao escolhermos <u>três</u> vértices do prisma, pode acontecer que eles pertençam todos a uma mesma face. Por exemplo, os vértices A, B e O pertencem todos a uma mesma face, o mesmo acontecendo com os vértices A, E e O. Escolhem-se aleatoriamente três dos dez vértices do prisma. Qual é a probabilidade de esses três vértices pertencerem todos a uma mesma face? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

c) Escolhe-se aleatoriamente um vértice <u>em cada base</u> do prisma. Qual é a probabilidade de o segmento de recta definido por esses dois vértices ser diagonal de uma face? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(Intermédio 1)

193. Lança-se um dado <u>não</u> equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. Seja X a variável aleatória «*número saído no lançamento efectuado*». Admita que, para certos números reais a e b, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,2	a	0,2	b	0,1	0,15

a) Determine a e b, sabendo que o valor médio da variável aleatória X é 3,4.

b) Em relação ao lançamento <u>deste</u> dado não equilibrado, sejam C e D os acontecimentos:

C : «Sair um número ímpar»

D : «Sair um número maior do que 4»

Averigúe se os acontecimentos C e D são independentes.

(Intermédio 1)

194.a) Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) > 0$. Prove que

$$P(A) \times [P(B \mid A) - 1] + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A})$$

b) Num encontro desportivo, participam atletas de vários países, entre os quais Portugal. Metade dos atletas portugueses que participam no encontro são do sexo feminino. Escolhido ao acaso um atleta participante no encontro, a probabilidade de ele ser estrangeiro ou do sexo masculino é 90%. Participam no encontro duzentos atletas. Quantos são os atletas portugueses?

<u>Nota</u>: se desejar, pode utilizar a igualdade do item a) na resolução deste problema; nesse caso, comece por explicitar os acontecimentos A e B, no contexto do problema.

(Intermédio 1)

195. Um saco contém bolas azuis e bolas verdes, indistinguíveis ao tacto. <u>Redija</u>, no contexto desta situação, o enunciado de um problema de cálculo de probabilidade, inventado por si, que admita como resposta correcta

$$\frac{{}^{7}C_{4} \times 3 + {}^{7}C_{5}}{{}^{10}C_{5}}$$

No enunciado que apresentar, deve explicitar claramente:

- o número total de bolas existentes no saco;
- o número de bolas de cada cor existentes no saco;
- a experiência aleatória;
- o acontecimento cuja probabilidade pretende que seja calculada (e cujo valor terá de ser dado pela expressão apresentada).

(Intermédio 1)

196. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,5$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) 0,6 (B) 0,7 (C) 0,8 (D) 0,8

(Intermédio 2)

197. Uma caixa tem seis bolas: três bolas com o número 0 (zero), duas bolas com o número 1 (um) e uma bola com o número 2 (dois). Tiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa e observam-se os respectivos números.

a) Sejam A e B os acontecimentos:

A : «os números saídos são iguais»

B: «a soma dos números saídos é igual a 1»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A \mid B)$? Justifique a sua resposta.

b) Seja X a variável aleatória «<u>produto</u> dos números saídos».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X. Apresente cada uma das probabilidades na forma de fracção irredutível.

(Intermédio 2)

198. Uma professora de Matemática propôs o seguinte problema aos seus alunos: *Uma turma tem 25 alunos, dos quais 15 são rapazes e 10 são raparigas. Pretende-se formar uma comissão com dois alunos do mesmo sexo. Quantas comissões diferentes se podem formar?*

Apresentam-se, em seguida, as respostas da Rita e do André a este problema.

Resposta da Rita: ${}^{15}C_2 \times {}^{10}C_2$

Resposta do André: ${}^{25}C_2 - 15 \times 10$

<u>Apenas uma</u> das respostas está correcta. Elabore uma composição na qual:

- identifique a resposta correcta;
- explique o raciocínio que conduz à resposta correcta;
- proponha uma alteração na expressão da resposta incorrecta, de modo a torná-la correcta;
- explique, no contexto do problema, a razão da alteração.

(Intermédio 2)

199. Quantos números naturais de três algarismos diferentes

Determine de quantas maneiras diferentes se pode formar

se podem escrever, não utilizando o algarismo 2 nem o algarismo 5 ?
(A) 256 (B) 278 (C) 286 (D) 294

(Intermédio 3)

200. Um teste é constituído por oito perguntas de escolha múltipla. A sequência das oito respostas correctas às oito perguntas desse teste é AABDADAA. O Pedro, que não se preparou para o teste, respondeu ao acaso às oito perguntas. Qual é a probabilidade de o Pedro ter respondido correctamente a todas as perguntas, sabendo que escolheu cinco opções A, uma opção B e duas opções D?

(A) $\frac{1}{56}$ (B) $\frac{1}{112}$ (C) $\frac{1}{168}$ (D) $\frac{1}{224}$

(Intermédio 3)

201. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• P(A) = 30% ;
• $P(A \cup B) = 70\%$;
• A e B são incompatíveis.
Qual é o valor de P(B)?
(A) 21% (B) 40% (C) 60% (D) 61%

(1ª fase)

202. Num grupo de dez trabalhadores de uma fábrica, vão ser escolhidos três, ao acaso, para frequentarem uma acção de formação. Nesse grupo de dez trabalhadores, há três amigos, o João, o António e o Manuel, que gostariam de frequentar essa acção. Qual é a probabilidade de serem escolhidos, exactamente, os três amigos?

(A) $\frac{1}{^{10}A_3}$ (B) $\frac{3}{^{10}A_3}$ (C) $\frac{1}{^{10}C_3}$ (D) $\frac{3}{^{10}C_3}$

(1ª fase)

203. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	2a	a

Qual das igualdades seguintes é verdadeira, considerando os valores da tabela?
(A) P(X = 0) = P(X > 1)
(B) P(X = 0) = P(X = 2)
(C) P(X = 0) = P(X = 3)
(D) P(X < 2) = P(X = 3)

(1ª fase)

204. Dos alunos de uma escola, sabe-se que:
• a quinta parte dos alunos tem computador portátil;
• metade dos alunos não sabe o nome do director;
• a terça parte dos alunos que não sabe o nome do director tem computador portátil.

a) Determine a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não ter computador portátil e saber o nome do director. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Admita que essa escola tem 150 alunos. Pretende-se formar uma comissão de seis alunos para organizar a viagem de finalistas.

b) Considere que o número da face voltada para cima no

uma comissão com, exactamente, quatro dos alunos que têm computador portátil.

(1ª fase)

205. Considere o problema seguinte:
«Num saco, estão dezoito bolas, de duas cores diferentes, de igual tamanho e textura, indistinguíveis ao tacto. Das dezoito bolas do saco, doze bolas são azuis, e seis bolas são vermelhas. Se tirarmos duas bolas do saco, simultaneamente, ao acaso, qual é a probabilidade de elas formarem um par da mesma cor?»

Uma resposta correcta para este problema é $\frac{12\times 11+6\times 5}{18\times 17}$

Numa composição, explique porquê.
A sua composição deve incluir:
• uma referência à regra de Laplace;
• uma explicação do número de casos possíveis;
• uma explicação do número de casos favoráveis.

(1ª fase)

206. Uma caixa contém bolas indistinguíveis ao tacto e de duas cores diferentes: azul e roxo. Sabe-se que:
• o número de bolas azuis é 8
• extraindo-se, ao acaso, uma bola da caixa, a probabilidade de ela ser azul é igual a ½ . Quantas bolas roxas há na caixa?
(A) 16 (B) 12 (C) 8 (D) 4

(2ª fase)

207. Considere todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9. De entre estes números, quantos têm, exactamente, três algarismos 5 ?
(A) $^5C_3 \times {}^4A_2$ (B) $^5C_3 \times 4^2$ (C) $^5A_3 \times 4^2$ (D) $^5A_3 \times {}^4C_2$

(2ª fase)

208. Na sequência seguinte, reproduzem-se os três primeiros elementos e os três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal: 1 15 105 ... 105 15 1
São escolhidos, ao acaso, dois elementos dessa linha. Qual é a probabilidade de a soma desses dois elementos ser igual a 105?

(A) 1 (B) $\frac{1}{60}$ (C) $\frac{1}{120}$ (D) 0

(2ª fase)

209. A Figura 4 e a Figura 5 representam, respectivamente, as planificações de dois dados cúbicos equilibrados, A e B .

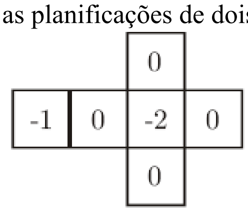


Figura 4

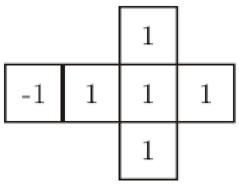


Figura 5

Lançam-se, simultaneamente, os dois dados.

a) Seja X a variável aleatória «soma dos números saídos nas faces voltadas para cima, em cada um dos dados». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fracção.

E20 Uma turma é constituída por 27 alunos, dos quais 17 são

dado A (Figura 4) é a abcissa de um ponto Q do referencial o.n. xOy, e que o número da face voltada para cima no dado B (Figura 5) é a ordenada desse ponto Q. Considere agora os acontecimentos:
J : «o número saído no dado A é negativo»;
L: «o ponto Q pertence ao terceiro quadrante».
Indique o valor de P(L | J), sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada. Apresente o resultado na forma de fracção. Numa composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de P(L | J) no contexto da situação descrita.

(2ª fase)

210. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$. Mostre que

$$\frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

(2ª fase)

$\boxed{\text{E17}}$ A Rita tem oito livros, todos diferentes, sendo três de Matemática, três de Português e dois de Biologia. A Rita pretende arrumar, numa prateleira, os oito livros, uns a seguir aos outros. De quantas maneiras diferentes o pode fazer, ficando os livros de Matemática todos juntos numa das pontas?
(A) 72 (B) 240 (C) 720 (D) 1440

(especial)

$\boxed{\text{E18}}$ Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) . Sabe-se que:
• $P(A) = 0,4$
• $P(\overline{B}) = 0,3$
• $P(A \cap B) = 0,3$
Qual é o valor de $P(A \cup B)$?
(A) 0,4 (B) 0,6 (C) 0,7 (D) 0,8

(especial)

$\boxed{\text{E19}}$ Numa prateleira de uma perfumaria existe um conjunto de dez perfumes diferentes, sendo três de homem e sete de senhora. A gerente pretende escolher, ao acaso, seis desses dez perfumes para colocar na montra. Seja X a variável aleatória «número de perfumes de homem que se colocam na montra». Qual é a distribuição de probabilidades da variável aleatória X ?

(A)

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{^{10}C_6}$	$\frac{63}{^{10}C_6}$	$\frac{105}{^{10}C_6}$	$\frac{35}{^{10}C_6}$

(B)

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{35}{^{10}C_6}$	$\frac{105}{^{10}C_6}$	$\frac{70}{^{10}C_6}$

(C)

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{70}{^{10}C_6}$	$\frac{105}{^{10}C_6}$	$\frac{35}{^{10}C_6}$

(D)

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{35}{^{10}C_6}$	$\frac{105}{^{10}C_6}$	$\frac{63}{^{10}C_6}$	$\frac{7}{^{10}C_6}$

(especial)

rapazes. A Maria e o Manuel são alunos dessa turma. A professora de Português vai escolher, ao acaso, um grupo de cinco alunos para definirem as regras de um Jogo de Palavras.
a) Determine quantos grupos diferentes se podem formar, sabendo que em cada grupo tem de estar, pelo menos, um aluno de cada sexo.
b) Considere os acontecimentos:
A: «a Maria e o Manuel são escolhidos para definirem as regras do jogo»;
B: «dos cinco alunos escolhidos, dois são rapazes e três são raparigas».
Uma resposta correcta para a probabilidade condicionada

P(B |A) é $\frac{16 \times {}^{9}C_{2}}{{}^{25}C_{3}}$

Numa composição, explique porquê. A sua composição deve incluir:
• a interpretação do significado de P(B |A), no contexto da situação descrita;
• uma referência à regra de Laplace;
• uma explicação do número de casos possíveis;
• uma explicação do número de casos favoráveis.

(especial)

$\boxed{\text{E21}}$ A Ana e a Joana são amigas e vão acampar nas férias do Carnaval. A mãe da Ana e a mãe da Joana pediram às filhas que, quando chegassem ao acampamento, lhes telefonassem, pedido que é hábito fazerem sempre que as jovens se ausentam de casa por períodos de tempo alargados. Admita-se que o facto de uma delas telefonar é independente de a outra também o fazer. Sabe-se pela experiência que elas nem sempre satisfazem o pedido das mães. Considere os acontecimentos:
A: «a Ana telefona à mãe»;
B: «a Joana telefona à mãe».
Determine a probabilidade de, pelo menos, uma das amigas telefonar à sua mãe, sabendo que P(A) = 70% , que P(B) = 80% e que A e B são acontecimentos independentes. Apresente o resultado em percentagem.

(especial)