(*Exames Nacionais 2004*)

87. Qual das afirmações seguintes é <u>necessariamente</u> verdadeira?
(A) A soma das probabilidades de dois acontecimentos incompatíveis é 1
(B) O produto das probabilidades de dois acontecimentos incompatíveis é 1
(C) A soma das probabilidades de dois acontecimentos contrários é 1
(D) O produto das probabilidades de dois acontecimentos contrários é 1

(1ª fase)

88. Uma pessoa vai visitar cinco locais, situados no Parque das Nações, em Lisboa: o Pavilhão de Portugal, o Oceanário, o Pavilhão Atlântico, a Torre Vasco da Gama e o Pavilhão do Conhecimento. De quantas maneiras diferentes pode planear a sequência das cinco visitas, se quiser começar na Torre Vasco da Gama e acabar no Oceanário?
(A)6 (B) 12 (C) 24 (D) 120

(1ª fase)

89. O João tem, no bolso, <u>seis</u> moedas: duas moedas de 1 euro e quatro moedas de 50 cêntimos. O João retira, simultaneamente e ao acaso, <u>duas</u> moedas do bolso.
a) Seja X a quantia, em euros, correspondente às moedas retiradas pelo João. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X, apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.
b) Depois de ter retirado as duas moedas do bolso, o João informou a sua irmã Inês de que elas eram iguais. Ela apostou, então, que a quantia retirada era de 2 euros. Qual é a probabilidade de a Inês ganhar a aposta? Apresente o resultado sob a forma de fracção irredutível.

(1ª fase)

90. De quantas maneiras distintas podem ficar sentados três rapazes e quatro raparigas num banco de sete lugares, sabendo que se sentam alternadamente por sexo, ou seja, cada
rapaz fica sentado entre duas raparigas?
(A) 121 (B) 133 (C) 144 (D) 156

(2ª fase)

91. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A\subset S$ e $B\subset S$). Sabe-se que: $P(A)=0{,}3$; $P(A\cap B)=0{,}1$; $P(A\cup B)=0{,}8$. Qual é o valor de $P(\overline{B})$?
(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4

(2ª fase)

92. Lança-se um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.
a) Considere os acontecimentos A e B: A- «sai face par»; B-«sai um número menor do que 4». Indique o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$. <u>Justifique</u> a sua resposta.
b) Considere agora que o dado é lançado três vezes. Qual é a probabilidade de a face 6 sair, pela primeira vez, precisamente no terceiro lançamento? Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às décimas.

(2ª fase)

93. Considere o seguinte problema:
Um saco contém doze bolas, indistinguíveis ao tacto: três bolas com o número 1, cinco bolas com o número 2 e quatro bolas com o número 3. Retiram-se, do saco, três bolas, ao acaso. Qual é a probabilidade de a soma dos números saídos ser igual a cinco?
Uma resposta correcta para este problema é

$$\frac{{}^{3}C_2 \times 4 + {}^{5}C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$$

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique esta resposta.
<u>Nota</u>: Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:
* referência à Regra de Laplace;
* explicação do número de casos possíveis;
* explicação do número de casos favoráveis.

(2ª fase)

94. Seja Ω o espaço de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória. Sejam X e Y dois acontecimentos ($X\subset\Omega$ e $Y\subset\Omega$). Apenas uma das afirmações seguintes não é equivalente à igualdade $P(X\cap Y)=0$. Qual?
(A) X e Y são acontecimentos incompatíveis.
(B) X e Y não podem ocorrer simultaneamente.
(C) Se X ocorreu, Y não pode ocorrer.
(D) X e Y são ambos impossíveis.

(1ª fase)

95. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela

x_i	0	2	4
$P(X=x_i)$	a	b	b

(a e b designam números reais). A média da variável aleatória X é igual a 1. Qual é o valor de a e qual é o valor de b ?
(A) a = ½ b = ¼ (B) a = 3/5 b = 1/5
(C) a = 2/3 b = 1/6 (D) a = ½ b = 1/6

(1ª fase)

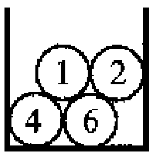
96. Num saco, estão três bolas pretas e nove bolas brancas, indistinguíveis ao tacto. Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as doze bolas do saco. Determine:
a) A probabilidade de as duas primeiras bolas extraídas não serem da mesma cor. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.
b) A probabilidade de as três bolas pretas serem extraídas consecutivamente (umas a seguir às outras). Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(1ª fase)

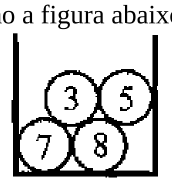
97. Considere um prisma regular em que cada base tem n lados. Numa pequena composição, justifique que o número total de diagonais de todas as faces do prisma (incluindo as bases) é dado por $2(^nC_2 - n) + 2n$

(1ª fase)

98. Considere 2 caixas, A e B, cada uma delas contendo 4 bolas numeradas, tal como a figura abaixo ilustra.



Caixa A



Caixa B

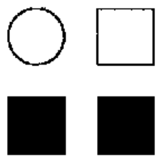
Extraem-se, ao acaso, duas bolas da caixa A e uma bola da caixa B. Multiplicam-se os nºs das 3 bolas retiradas. Qual é a probabilidade de o produto obtido ser um nº par?

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{2\times1}{^4C_2\times{}^4C_1}$ (D) $\frac{^3C_2\times{}^1C_1}{^4C_2\times{}^4C_1}$

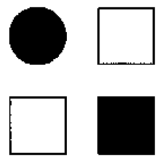
(2ª fase)

99. Em cada uma das opções seguintes (A, B, C e D) estão representadas 4 figuras (as figuras são círculos ou quadrados e estão pintadas de branco ou de preto). Para cada opção, considere:» a experiência que consiste na escolha aleatória de uma das 4 figuras;
» os acontecimentos:
X: «a figura escolhida é um quadrado»;
Y: «a figura escolhida está pintada de preto».
Em qual das opções se tem P(X|Y)=1/2?

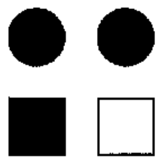
(A)



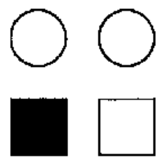
(B)



(C)



(D)



(2ª fase)

100. O João tem 14 discos de música ligeira: 6 são portugueses; 4 são espanhóis; 3 são franceses; 1 é italiano.
a) O João pretende seleccionar 4 desses 14 discos.
a_1) Quantos conjuntos diferentes pode o João fazer, de tal modo que os 4 discos seleccionados sejam de 4 países diferentes, ou seja, um de cada país?
a_2) Quantos conjuntos diferentes pode o João fazer, de tal modo que os 4 discos seleccionados sejam todos do mesmo país?
b) Considere agora a seguinte experiência: o João selecciona, ao acaso, 4 dos 14 discos. Seja X a variável aleatória: «*nº de discos italianos seleccionados*». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.

(2ª fase)

(*Testes intermédios e exames 2005/2006*)

101. Três raparigas e os respectivos namorados posam para uma fotografia. De quantas maneiras se podem dispor, lado a lado, de modo que cada par de namorados fique junto na fotografia?

(A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 48

(Intermédio 1)

102. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em 4 naipes (Espadas, Copas, Ouros e Paus). Em cada naipe há um Ás, três figuras (Rei, Dama e Valete) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).
A Joana pretende fazer uma sequência com <u>seis</u> cartas do naipe de Espadas. Ela quer iniciar a sequência com o Ás, quer que as três cartas seguintes sejam figuras e quer concluir a sequência com duas das nove restantes cartas desse naipe.
Quantas sequências diferentes pode a Joana fazer?

(A) 416 (B) 432 (C) 528 (D) 562

(Intermédio 1)

103. De uma certa linha do Triângulo de Pascal, sabe-se que a soma dos dois primeiros é 21. Qual é o maior termo dessa linha?

(A) 169247 (B) 175324 (C) 184756 (D) 193628

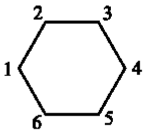
(Intermédio 1)

104. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^2-9$. No gráfico desta função, considere os pontos cujas abcissas são -4, -2, 0, 2 e 4. Escolhem-se, ao acaso, dois desses cinco pontos e desenha-se o segmento de recta que tem por extremidades esses dois pontos. Qual é a probabilidade de esse segmento intersectar o eixo das abcissas?

(A) 0,4 (B) 0,5 (C) 0,6 (D) 0,7

(Intermédio 1)

105. Na figura está representado um hexágono regular com os vértices numerados de 1 a 6.



Lança-se três vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. Em cada lançamento, selecciona-se o vértice do hexágono que corresponde ao número saído nesse lançamento. Note que, no final da experiência, podemos ter um, dois ou três pontos seleccionados (por exemplo: se sair o mesmo número três vezes, só é seleccionado um ponto).
Qual é a probabilidade de se seleccionarem três pontos que sejam os vértices de um triângulo equilátero?

(A) 1/18 (B) 1/16 (C) 1/14 (D) 1/12

(Intermédio 1)

106. O João vai lançar seis mil vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e vai adicionar os números saídos. De qual dos seguintes valores é de esperar que a soma obtida pelo João esteja mais próxima?

(A) 20000 (B) 21000 (C) 22000 (D) 23000

(Intermédio 1)

107. Admita que a variável peso, em quilogramas, das raparigas de 15 anos, de uma certa escola, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 40. Sabe-se ainda que, nessa escola, 20% das raparigas de 15 anos pesam mais de 45 Kg. Escolhida, ao acaso, uma rapariga de 15 anos dessa escola, qual é a probabilidade de o seu peso estar compreendido entre 35 Kg e 40 Kg ?

(A) 0,2 (B) 0,25 (C) 0,3 (D) 0,35

(Intermédio 1)

108. Seja C o conjunto de todos os números naturais com três algarismos (ou seja, de todos os nºs naturais de 100 a 999)

a) Quantos elementos do conjunto C são múltiplos de 5?

b) Quantos elementos do conjunto C têm os algarismos todos diferentes?

(Intermédio 1)

109.

a) Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A\subset\Omega$ e $B\subset\Omega$), com $P(A)>0$. Sejam $\overline{A}$ e $\overline{B}$ os acontecimentos contrários de A e de B, respectivamente. Seja $P(B|A)$ a probabilidade de B, se A. Mostre que:

$$\frac{P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(A)} = 1 - P(B\mid A)$$

b) Próximo de uma praia portuguesa, realiza-se um acampamento internacional de juventude, no qual participam jovens de ambos os sexos. Sabe-se que: a quarta parte dos jovens são portugueses, sendo os restantes estrangeiros; 52% dos jovens participantes no acampamento são do sexo feminino; considerando apenas os participantes portugueses, 3 em cada 5 são rapazes.
No último dia, a organização vai sortear um prémio, entre todos os jovens participantes no acampamento. Qual é a probabilidade de o prémio sair a uma rapariga estrangeira? Apresente o resultado na forma de percentagem.
<u>Nota</u>: se o desejar, pode utilizar a igualdade da alínea anterior (nesse caso, comece por identificar claramente, no contexto do problema, os acontecimentos A e B); no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo (como, por exemplo, através de uma tabela de dupla entrada ou de um diagrama em árvore).

(Intermédio 1)

110. Uma caixa, que designamos por caixa 1, contém duas bolas pretas e três bolas verdes. Uma segunda caixa, que designamos por caixa 2, contém duas bolas pretas e uma bola verde.

a) Considere a seguinte experiência: retirar, ao acaso, uma bola de cada caixa. Seja X a variável aleatória «número de bolas verdes que existem no conjunto das duas bolas retiradas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X, apresentando as probabilidades na

114. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos

forma de fracção irredutível.

b) Considere agora que, tendo as duas caixas a sua constituição inicial, se realiza a seguinte experiência: ao acaso, retiram-se simultaneamente três bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2; em seguida, novamente ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2. Sejam os acontecimentos: A: «as três bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor»; B: «as duas bolas retiradas da caixa 2 são de cores diferentes». Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de P(B|A), apresentando o seu valor na forma de fracção irredutível. Numa pequena composição, explique o raciocínio que efectuou. O valor pedido deverá resultar da interpretação do significado de P(B|A), no contexto do problema, significado esse que deverá começar por explicar.

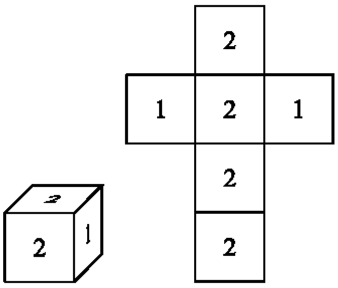
c) Considere agora que, na caixa 2, tomando como ponto de partida a sua constituição inicial, se colocam mais *n* bolas, todas amarelas. Esta caixa fica, assim, com duas bolas pretas, uma bola verde e *n* bolas amarelas. Considere a seguinte experiência: ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas dessa caixa. Sabendo que a probabilidade de uma delas ser amarela e a outra ser verde é 5/39, determine o valor de *n*.

(Intermédio 1)

111. Todos os alunos de uma turma de uma escola secundária praticam pelo menos um dos dois desportos seguintes: andebol e basquetebol. Sabe-se que: metade dos alunos da turma pratica andebol; 70% dos alunos da turma pratica basquetebol.
Escolhe-se ao acaso um aluno dessa turma e constata-se que ele é praticante de andebol. Qual é a probabilidade de ele praticar basquetebol?
(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4

(Intermédio 2)

112. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação.



Lança-se este dado duas vezes. Seja X a variável aleatória: *soma dos números saídos nos dois lançamentos*. Indique o valor de *k* tal que P(X=*k*)=1/9
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(Intermédio 2)

113. Considere, num referencial o.n., um octaedro regular em que cada um dos seus vértices pertence a um dos eixos coordenados (dois vértices em cada eixo). Escolhendo, ao acaso, três vértices desse octaedro, qual é a probabilidade de eles definirem um plano perpendicular ao eixo Oy?
(A) 1/3 (B) 2/3 (C) 1/5 (D) 2/5

(Intermédio 2)

($A\subset\Omega$ e $B\subset\Omega$). Sabe-se que P(A)=0,3. Apenas um dos acontecimentos seguintes pode ter probabilidade inferior a 0,3. Qual deles?
(A) $A\cup B$ (B) $\overline{A}\cup B$ (C) $A\cap B$ (D) $\overline{A\cap B}$

(1ª fase)

115. Uma variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\dfrac{^{2005}C_{99}}{^{2006}C_{100}}$	$\dfrac{a}{^{2006}C_{100}}$

Indique o valor de *a*.
(A) $^{2005}C_{99}$ (B) $^{2005}C_{100}$ (C) $^{2006}C_{99}$ (D) $^{2006}C_{100}$

(1ª fase)

116. a) Uma coluna com a forma de um prisma hexagonal regular está assente no chão de um jardim. Dispomos de seis cores (amarelo, branco, castanho, dourado, encarnado e verde) para pintar as sete faces visíveis (as seis faces laterais e a base superior) desse prisma. Admita que se pintam de verde duas faces laterais opostas. Determine de quantas maneiras diferentes podem ficar pintadas as restantes cinco faces, de tal modo

• que duas faces que tenham uma aresta comum fiquem pintadas com cores diferentes
• e que duas faces laterais que sejam opostas fiquem pintadas com a mesma cor.

b) Considere um prisma hexagonal regular num referencial o.n. *Oxyz*, de tal forma que uma das suas bases está contida no plano de equação *z* = 2. Escolhendo ao acaso dois vértices do prisma, qual é a probabilidade de eles definirem uma recta paralela ao eixo . *Oz*? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(1ª fase)

117. De uma caixa com dez bolas brancas e algumas bolas pretas, extraem-se sucessivamente, e ao acaso, duas bolas, não repondo a primeira bola extraída, antes de retirar a segunda. Considere os acontecimentos:
A: «a primeira bola extraída é preta»;
B: «a segunda bola extraída é branca».
Sabe-se que P(B|A)=1/2. Quantas bolas pretas estão inicialmente na caixa? Numa pequena composição, justifique a
sua resposta, começando por explicar o significado de P(B|A), no contexto da situação descrita.

(1ª fase)

118. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	a	a	0,4

(*a* designa um número real). Qual é o valor médio desta variável aleatória?
(A) 1,1 (B) 1,2 (C) 1,3 (D) 1,4

(2ª fase)

119. Quatro raparigas e quatro rapazes entram num

121. Uma turma de 12.º ano é constituída por raparigas, umas

autocarro, no qual existem seis lugares sentados, ainda não ocupados. De quantas maneiras diferentes podem ficar ocupados esses seis lugares, supondo que ficam dois rapazes em pé?
(A) 3560 (B) 3840 (C) 4180 (D) 4320

(2ª fase)

120. Numa sala de Tempos Livres, a distribuição dos alunos por idades e sexo é a seguinte:

	5 anos	6 anos	7 anos
Rapaz	1	5	2
Rapariga	3	5	7

a) Escolhem-se dois alunos ao acaso. Qual é a probabilidade de a soma das suas idades ser igual a 12? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.
b) Escolhe-se um aluno ao acaso. Sejam A e B os acontecimentos: A: «o aluno tem 7 anos»; B: «o aluno é rapaz ». Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada P(A|B). Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.
Nota: no caso de utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, explicite os valores das duas probabilidades envolvidas nessa fórmula.

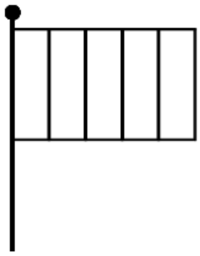
(2ª fase)

de 16 anos e as restantes de 17 anos, e por rapazes, uns de 17 anos e os restantes de 18 anos. Os alunos dessa turma estão numerados consecutivamente, a partir do número 1. Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa turma e regista-se o número, a idade e o sexo desse aluno. Em cada uma das opções seguintes estão indicados dois acontecimentos, X e Y, associados a esta experiência aleatória.
Opção 1: X: «O aluno escolhido tem idade superior ou igual a 17 anos»
Y: «O aluno escolhido tem 16 ou 17 anos»
Opção 2: X: «O número do aluno escolhido é par»
Y: «O número do aluno escolhido é múltiplo de 4»
Opção 3: X: «O aluno escolhido tem 18 anos»
Y: «O aluno escolhido é rapariga»
Opção 4: X: «O aluno escolhido é rapaz»
Y: «O aluno escolhido tem 17 anos»
Em apenas uma das opções acima apresentadas os acontecimentos X e Y são tais que são verdadeiras as três afirmações seguintes:
$P(X\cup Y) > P(X)$, $P(X\cup Y) < 1$ e $P(X\cap Y) > 0$
Qual é essa opção? Numa pequena composição, explique por que é que rejeita as outras três opções (para cada uma delas, indique, justificando, qual é a afirmação falsa).

(2ª fase)

(*Testes intermédios e exames 2006/2007*)

122. Pretende-se fazer uma bandeira com cinco tiras verticais, respeitando as seguintes condições: • duas tiras vizinhas não podem ser pintadas com a mesma cor; • cada uma das três tiras centrais pode ser pintada de vermelho ou de amarelo; • cada uma das duas tiras das extremidades pode ser pintada de branco, de azul ou de verde. De acordo com estas condições, quantas bandeiras diferentes se podem fazer?



(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 32

(Intermédio 1)

123. Dois rapazes e três raparigas vão fazer um passeio num automóvel com cinco lugares, dois à frente e três atrás. Sabe-se que:• apenas os rapazes podem conduzir; • a Inês, namorada do Paulo, tem de ficar ao lado dele. De acordo com estas restrições, de quantos modos distintos podem ficar dispostos os cinco jovens no automóvel?
(A) 10 (B) 14 (C) 22 (D) 48

(Intermédio 1)

124. No Triângulo de Pascal, considere a linha que contém os elementos da forma ${}^{2006}C_k$. Quantos elementos desta linha são menores do que ${}^{2006}C_4$?
(A) 8 (B) 6 (C) 5 (D) 3

(Intermédio 1)

125. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A\subset\Omega$ e $B\subset\Omega$) tais que $0<P(A)<1$ e $0<P(B)<1$. Sabe-se que $A\subset B$. Qual é o valor de $P[(A\cup B)\cap \overline{B}]$?
(A) 0 (B) P(A) (C) P(B) (D) 1

(Intermédio 1)

126. Um saco contém um certo número de cartões. Em cada cartão está escrito um número natural. Tira-se, ao acaso, um cartão do saco. Considere os acontecimentos:
A: «o cartão extraído tem número par»
B: «o cartão extraído tem número múltiplo de 5»
C: «o cartão extraído tem número múltiplo de 10»
Sabe-se que: $P(C)=\frac{3}{8}$ e $P(B|A)=\frac{15}{16}$. Qual é o valor de P(A)?
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

(Intermédio 1)

127. Uma variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	0	a	$2a$
$P(X=x_i)$	0,2	0,4	b

(a e b designam números reais positivos). Sabe-se que o valor médio da variável aleatória X é 2,4. Qual é o valor de a ?
(A) 3 (B) 2,5 (C) 2 (D) 1,5

(Intermédio 1)

128. Admita que a variável *altura*, em centímetros, dos rapazes de 13 anos de um certo país, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 140. Escolhido, ao

132. Um saco contém vinte bolas, numeradas de 1 a 20. Ao acaso, extraem-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respectivos números. Qual é a probabilidade de

acaso, um rapaz de 13 anos desse país, sabe-se que a probabilidade de a sua altura pertencer a um determinado intervalo [*a*,*b*] é igual a 60%. Quais dos seguintes podem ser os valores de *a* e de *b* ?

(A) $a = 140$ e $b = 170$ **(B)** $a = 120$ e $b = 140$

(C) $a = 130$ e $b = 150$ **(D)** $a = 150$ e $b = 180$

(Intermédio 1)

129. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em 4 naipes (Espadas, Copas, Ouros e Paus). Em cada naipe há 13 cartas: um Ás, três figuras (Rei, Dama e Valete) e mais 9 cartas (do Dois ao Dez).

a) Utilizando apenas o naipe de paus, quantas sequências diferentes de 13 cartas, iniciadas com uma figura, é possível construir?

b) Retirando ao acaso, sucessivamente e sem reposição, seis cartas de um baralho completo, qual é a probabilidade de, entre elas, haver um e um só Ás? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

(Intermédio 1)

130. Um saco contém dez bolas. Quatro bolas estão numeradas com o número 1, cinco com o número 2 e uma com o número 3.

a) Extrai-se, ao acaso, <u>uma</u> bola do saco. Seja X o <u>número da bola extraída</u>. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X, apresentando as probabilidades na forma de dízima.

b) Do saco novamente completo, tiram-se simultaneamente, ao acaso, <u>duas</u> bolas. Determine a probabilidade de essas duas bolas terem o mesmo número. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

c) Considere, uma vez mais, o saco com a sua constituição inicial. Tira-se, ao acaso, uma bola do saco, observa-se o número e repõe-se a bola no saco juntamente com mais dez bolas com o mesmo número. Seguidamente, tira-se, ao acaso, uma segunda bola do saco. Sejam A e B os acontecimentos :
A: «sair bola com o número 1 na primeira extracção»
B: «sair bola com o número 1 na segunda extracção»
Sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada, indique, na forma de fracção, o valor de P(B|A). Numa pequena composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de P(B|A), no contexto da situação descrita.

(Intermédio 1)

131. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e B⊂Ω). Sabe-se que A e B são acontecimentos independentes, que P(B)= $\frac{2}{3}$ e que P(A∩B)= $\frac{1}{2}$. Determine o valor de P(A∪B). Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(Intermédio 1)

o maior desses três números ser 10?

(A) $\frac{24}{{}^{20}C_3}$ **(B)** $\frac{28}{{}^{20}C_3}$ **(C)** $\frac{32}{{}^{20}C_3}$ **(D)** $\frac{36}{{}^{20}C_3}$

(Intermédio 2)

133. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e B⊂Ω), ambos com probabilidade não nula. Sabe-se que P(A∪B)=P(A)+P(B). Qual é o valor da probabilidade condicionada P(A|B)?

(A) 0 (B) 1 (C) P(A) (D) $\frac{P(A)}{P(B)}$

(Intermédio 2)

134. O Jorge tem seis moedas no bolso. Ele retira, simultaneamente e ao acaso, duas dessas seis moedas. Seja X a quantia, em cêntimos, correspondente às duas moedas retiradas. Sabe-se que a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é

x_i	20	30	40	60	70
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{{}^6C_2}$	$\frac{6}{{}^6C_2}$	$\frac{1}{{}^6C_2}$	$\frac{3}{{}^6C_2}$	$\frac{2}{{}^6C_2}$

Quais poderiam ser as seis moedas que o Jorge tinha inicialmente no bolso?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(Intermédio 2)

135. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices diferentes de um paralelepípedo rectângulo. Qual é a probabilidade de que esses dois vértices sejam extremos de uma aresta?

(A) $\frac{12}{{}^8C_2}$ **(B)** $\frac{12}{8^2}$ **(C)** $\frac{8}{{}^8C_2}$ **(D)** $\frac{8}{{}^8A_2}$

(1ª fase)

136. As cinco letras da palavra TIMOR foram pintadas, cada uma em sua bola. As cinco bolas, indistinguíveis ao tacto, foram introduzidas num saco. Extraem-se, aleatoriamente, as bolas do saco, sem reposição, e colocam-se em fila, da esquerda para a direita. Qual é a probabilidade de que, no final do processo, fique formada a palavra TIMOR, sabendo-se que, ao fim da terceira extracção, estava formada a sucessão de letras TIM?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 1

(1ª fase)

137. Considere todos os números de três algarismos que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

a) Escolhe-se, ao acaso, um desses números. Sejam os acontecimentos:

140. Lançaram-se dois dados, ambos com as faces numeradas de um a seis. Sabe-se que a soma dos números saídos foi quatro. Qual é a probabilidade de ter saído o mesmo número, em ambos os dados?

A: «O número escolhido é múltiplo de 5»;
B: «O número escolhido tem os algarismos todos diferentes».
Averigúe se A e B são, ou não, acontecimentos independentes.

b) Considere o seguinte problema: *De entre todos os números de três algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, em quantos deles o produto dos seus algarismos é um número par*?
Uma resposta correcta a este problema é: ${}^9A_3 - {}^5A_3$. Numa pequena composição explique porquê.

(1ª fase)

138. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A, B e C três acontecimentos ($A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$ e $C\subset\Omega$) tais que $(A\cup B)\cap C=\varnothing$. Sabe-se que $P(A)=0{,}21$ e que $P(C)=0{,}47$. Calcule $P(A\cup C)$, utilizando as propriedades das operações com conjuntos e a axiomática das probabilidades.

(1ª fase)

139. Dois cientistas, que vão participar num congresso no estrangeiro, mandam reservar hotel na mesma cidade, cada um sem conhecimento da marcação feita pelo outro. Sabendo que nessa cidade existem sete hotéis, todos com igual probabilidade de serem escolhidos, qual é a probabilidade de os dois cientistas ficarem no mesmo hotel?

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{5}{7}$ (D) $\frac{6}{7}$

(2ª fase)

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

(2ª fase)

141. De um baralho de cartas, seleccionaram-se 16 cartas (4 ases, 4 reis, 4 damas e 4 valetes). Dividiram-se as 16 cartas em dois grupos: um com os ases e os reis e outro com as damas e os valetes. Retiraram-se, ao acaso, duas cartas de cada grupo (sem reposição). Qual é a probabilidade de obter um conjunto formado por um ás, um rei, uma dama e um valete, não necessariamente do mesmo naipe? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(2ª fase)

142. Considere um espaço de resultados finito, Ω, associado a uma certa experiência aleatória. A propósito de dois acontecimentos X e Y ($X\subset\Omega$ e $Y\subset\Omega$), sabe-se que $P(X)=a$, $P(Y)=b$ e X e Y são independentes.

a) Mostre que a probabilidade de que não ocorra X nem ocorra Y é igual a $1-a-b+a\times b$

b) Num frigorífico, há um certo número de iogurtes e um certo número de sumos. Tiram-se do frigorífico, ao acaso, um iogurte e um sumo. Sabe-se que a probabilidade de o iogurte ser de pêssego é $\frac{1}{5}$ e a probabilidade de o sumo ser de laranja é $\frac{1}{3}$.Admita que os acontecimentos «tirar um iogurte de pêssego» e «tirar um sumo de laranja» são independentes. Utilizando a expressão mencionada em a), determine a probabilidade de, ao tirar, ao acaso, um iogurte e um sumo do frigorífico, o iogurte não ser de pêssego e o sumo não ser de laranja. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

(2ª fase)

Soluções: 1. D 2. 210; 6; 1/28 3. 60%; 25% 4. 2/9 5. 4,13x10^{-4} 6. B 7. 4845; 61/969 8. C 9. A
10. A 11. B 12. A 13. 1/5 14. A 15. C 16. 0,216% 17. D 18. B 19. 0,1(63)
20. 2/21 21. C 22. B 23. 75075; 0,114 24. B 25. 2916; 0,504 26. D 27. A 28. 3% 29. C 30. A
31. 1º 32. D 33. B 34. 120; 1/3 35. D 36. A 37. 70; 51% 38. C 39. C 40. 72; 2/9
41. A 42. C 43. 2/5 45. B 46. B 47. 3628800; 103680; 1/15 48.C 49. A 50. 0,134 51. A
52. A 53.16/17; 4% 54. C 55. D 56. 35%; 1/3; 1/15 57. C 58. A 59. 0,0000079
60. D 61.C 62. 1/9 63. C 64. B 65. 1656; 10350; 13/23. 66. D 67. B 68. 7/12; 64084800 69. B
70. D 71. 6%; 0,006 72. C 73. D 74. 0,336; 1/17 75. C 76. A 77. 604800; 2400 78. 6/7 79. A
80.C 81. 58%; 44% 83. D 84. A 85. 48; 480 87. C 88. A 89. 2/5, 8/15, 1/15; 1/7 90. C 91. D
92. 1/3; 11,6% 94. D 95. C 96. 9/22; 1/22 98. B 99. B 100. 72; 16; x_i: 0 e 1; p_i: 5/7 e 2/7 101. D 102. B
103. C 104. C 105. A 106. B 107. C 108. 180; 648 109. 0,42 110. x_i: 0, 1, 2 e p_i: 4/15, 8/15, 1/5; 8/15; 10
111. D 112. B 113. C 114. C 115. B 116. 60; 1/11 117. 11 118. A 119. D 120. 81/253; 2/9 121. 4
122. B 123. B 124. A 125. A 126. B 127. C 128. C 129. 1437004800; 0,34 130. x_i: 1, 2 e 3; 0,4, 0,5 e 0,1; 16/45; 7/10
131. 11/12 132. D 133. A 134. D 135. A 136. C 137. Sim 138. 0,68 139. A 140. C 141. 16/49
142. 8/15

As Probabilidades e a Combinatória na Literatura (http://www.prof2000.pt/users/roliveira0/Literat0.htm)

"*Entre irmãos, há 25% de probabilidade de os tecidos* [da medula óssea] *serem compatíveis* (...) "

AS CHAVES DA RUA, Ruth Rendell

"*O Dr. Kilvan* [explicou que] *relativamente aos americanos, o risco de contrair cancro do pulmão para um fumador de quinze cigarros por dia durante vinte anos é dez vezes maior do que para um não-fumador. No caso de dois maços por dia, o risco é vinte vezes maior, e no caso de três* (...) *o risco é vinte e cinco vezes maior* "

O JÚRI, John Grisham

"*O homem inseriu a placa no leitor de cartões e ligou o instrumento.*
- Experimenta todas as combinações possíveis – explicou. "

O TERCEIRO GÉMEO, Ken Follet

"*O rótulo do novo factor dizia qualquer coisa acerca de menos de um por cento de probabilidade de se contrair sida.*"

VENCENDO AS LÁGRIMAS, Jeanne White e Susan Dworkin

"(...)*sem contar com a argúcia e a experiência da gente pedinchante, sempre que é preciso recorrer ao cálculo de probabilidades, mínimas neste caso.*"

O EVANGELHO SEGUNDO JESUS CRISTO, José Saramago

"(...)*por isso a mulher foi-se. Ou morreu, ou divorciou-se, por isso eu tinha cinquenta por cento de probabilidades de acertar.*"

JOGO MORTÍFERO, Lee Child

"*Por fim, a selecção do alvo pode ser específica ou aleatória. É óbvio que o terramoto mataria muita gente indiscriminadamente, portanto é aleatória.*"

O MARTELO DO PARAÍSO, Ken Follet

"*No jogo da roleta da pena de morte, uma hipótese de cinquenta porcento era quase uma certeza.*"

A CÂMARA, John Grisham

" (...) *mas que as probabilidades de sermos bem-sucedidos se ficam pelos cinquenta porcento. E as de sairmos ilesos são ainda mais baixas.*"

SOMBRAS SOBRE A BABILÓNIA, David Mason

"*- Põe-te mais na vertical, Jeff – instruí-o – Nesse ângulo, o teu peso empurra-te os pés para o lado e tens mais probabilidades de escorregar.*"

STINGER, John Nichol

"*Provavelmente verá a rapariga da mão paralisada, logo à noite, na sala de jantar, é uma probabilidade, como também o são o homem gordo, o magro de luto, as crianças pálidas e seus pletóricos pais*[...]"
"[...]*Não estou a brincar, aliás, não percebo esse espanto, se um homem vai para a cama com uma mulher, persistentemente, são muitas as probabilidades de virem a fazer um filho, foi o que aconteceu neste caso* [...]"

O ANO DA MORTE DE RICARDO REIS, José Saramago

"*-Portanto, ele introduziu na nota, ao acaso, frases soando a estrangeiro a fim de nos despistar.*"
"*Uma das câmaras de vídeo estava apontada aos olhos de Czisman e fazia continuamente testes à retina para análise das 'probabilidades de verdade', ou seja, para detecção de mentiras.*"
"*-Tenho tentado ampliá-la para lhe ver o rosto. Tenho noventa por cento de certeza de que ele é branco.*"
"*A seguir a esta frase, o computador inseria combinações de letras extraídas dos fragmentos de cinza. Acabara de acrescentar a letra i a seguir ao R. Outra estava já a formar-se à frente dessa.*"

A LÁGRIMA DO DIABO, Jeffery Deaver

"Dez dígitos. *Sophie calculou relutantemente as probabilidades criptográficas. Dez mil milhões de escolhas possíveis. Mesmo que pudesse usar os mais potentes computadores de processamento em rede da DCPJ, precisaria de semanas para decifrar o código.*"
"*- Como vê – continuou Sophie -, a única maneira de obter a informação é conhecer a senha, com cinco letras. E com cinco anéis, cada um deles com vinte e seis letras, temos vinte e seis elevado à quinta potência. – Fez rapidamente as contas. – Cerca de doze milhões de possibilidades.*"

O CÓDIGO DA VINCI, Dan Brown

"*Em Abulafia a palavra de ordem podia ser de sete letras. Quantas combinações de sete letras se podiam dar com as vinte e cinco letras do alfabeto, calculando também as repetições, porque nada impedia que a palavra fosse 'cadabra'? Existe uma fórmula em qualquer parte, e o resultado devia ser de seis biliões e qualquer coisa. Tendo uma calculadora gigante, capaz de encontrar seis mil milhões de combinações a um milhão por segundo, teria porém de comunicá-la a Abulafia uma a uma, para as experimentar, e já sabia que Abulafia demoraria cerca de dez segundos para pedir e depois verificar o password. Portanto, sessenta mil milhões de segundos. Como um ano tem pouco mais de trinta e um milhões de segundos, façamos trinta para arredondar, o tempo de trabalho seria de cerca de dois mil anos. Nada mau.*"
"*- Experimenta, escreve I, H, V, H, quando te pedir o* input*, e põe o programa a trabalhar. Talvez fiques mal: as combinações possíveis são só vinte e quatro.*
- santos Serafins! E o que fazes tu com vinte e quatro nomes de Deus? Julgas que os nossos sábios não fizeram já o cálculo? Mas lê o Sefer Jerisah*, décima sexta acção do capítulo quatro. E não tinham calculadoras. 'Duas Pedras constroem duas Casas. Três Pedras constroem seis Casas. Quatro Pedras constroem vinte e quatro Casas. Cinco Pedras constroem cento e vinte Casas. Seis Pedras constroem setecentas e vinte Casas. Sete Pedras constroem cinco mil e quarenta Casas. Daqui para diante vai e pensa no que a boca não pode dizer e a orelha não pode ouvir.' Sabes como é que se chama hoje a isto? Cálculo factorial. E sabes porque é que a Tradição te avisa que daqui para diante é melhor desistires? Porque se as letras do nome de Deus fossem oito as combinações seriam quarenta mil e se fossem dez seriam três milhões e seiscentas mil, e as combinações do teu pobre nome seriam quase quarenta milhões, e agradece a Deus por não teres a* middle initial *como os americanos, senão chegarias a mais de quatrocentos milhões. E se as letras do nome de Deus fossem vinte e sete, porque o alfabeto hebraico não tem vogais, mas sim vinte e dois sons mais cinco variantes – os seus nomes possíveis seriam um número de vinte e nove algarismos. Mas deverias calcular também as repetições, porque não se pode excluir que o nome de Deus seja Alef repetido vinte e sete vezes, então o factorial já não te chegaria e terias de calcular vinte e sete à vigésima sétima: e terias, julgo eu, quatrocentos e quarenta e quatro biliões de biliões de biliões de possibilidades, ou pelo menos, de qualquer modo, um número de trinta e nove algarismos.*"

O PÊNDULO DE FOUCAULT, Umberto Eco

"*Nesta expedição em busca do capitão Grant a soma de probabilidades parecia aumentar todos os dias.*"
"*Visto que a presença de Harry Grant se tornara um facto indiscutível, as consequências da expedição podiam ser grandes. Aumentava o número de probabilidades favoráveis.*"
"*Diz-se que entre um carcereiro que vela e um preso que quer fugir, as probabilidades são a favor do preso.*"

OS FILHOS DO CAPITÃO GRANT, Jules Verne

"*- Use uma média! – gritou Fichter, que se precipitou para o quadro e começou a colocar valores nos cálculos de probabilidades.*"
"*Era só uma probabilidade, tão aleatória como a probabilidade anterior de infiltração no programa do reactor nazi. E essa operação resultara em cheio.*"

A EQUAÇÃO HIMMLER, William P. Kennedy

"*Cheirava a urina – um cheiro comum numa cidade onde os bares excediam os urinóis públicos numa proporção de vinte para um.*"

ANJOS E DEMÓNIOS, Dan Brown

O professor: RobertOliveira