(*Teste intermédio e Exames Nacionais 2013*)

84. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja z = cis θ, em que θ é um número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{3\pi}{4},\pi\right[$.
Seja w = $z^2 - 2$. A que quadrante do plano complexo pertence a imagem geométrica de w ?
(A) Primeiro quadrante. (B) Segundo quadrante.
(C) Terceiro quadrante. (D) Quarto quadrante.

(Intermédio 2)

86. Na Figura 1, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos: w_1, w_2, w_3 e w_4. Qual é o número complexo que, com n ∈ ℕ, pode ser igual a

$i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2}$?

(A) w_1 (B) w_2
(C) w_3 (D) w_4

(1.ª fase)

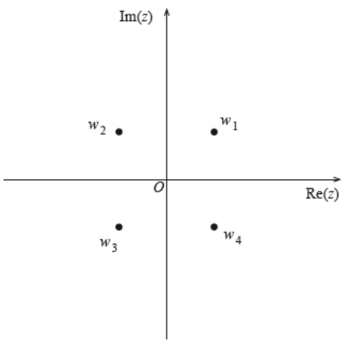


Figura 1

87. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = -8 + 6i$ e $w = \frac{-i \times z^2}{z}$. Seja α um argumento do número complexo z. Qual das opções seguintes é verdadeira?

(A) $w = 10cis(3\alpha - \frac{\pi}{2})$ (B) $w = 2cis(3\alpha - \frac{\pi}{2})$

(C) $w = 10cis(\alpha - \frac{\pi}{2})$ (D) $w = 2cis(\alpha - \frac{\pi}{2})$

(1.ª fase)

89. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, z = 2 + bi, com b < 0. Seja $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Qual dos números complexos seguintes pode ser o conjugado de z ?

(A) $\frac{3}{2}cis(\alpha)$ (B) $3cis(-\alpha)$

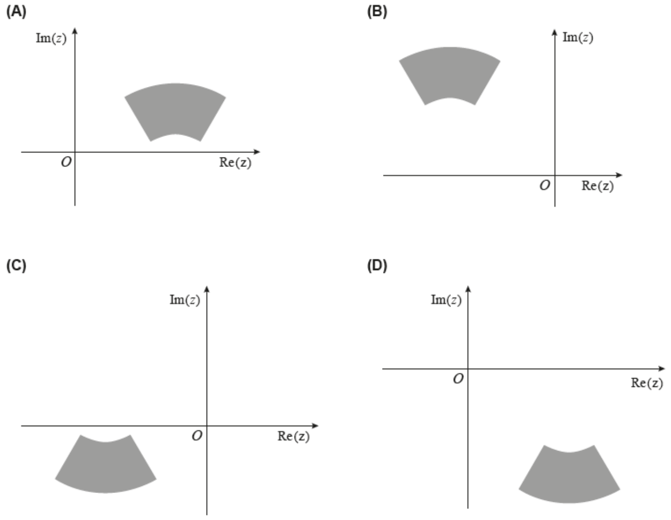
(C) $3cis(\alpha)$ (D) $\frac{3}{2}cis(-\alpha)$

(2.ª fase)

90. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{3}{2} \leq |z-3+i| \leq 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} \leq \arg(z-3+i) \leq \frac{2\pi}{3}$$

Considere como arg(z) a determinação que pertence ao intervalo [−π,π]. Qual das opções seguintes pode representar, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição dada?



(2.ª fase)

91. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

a) Considere $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22}$ e $z_2 = \frac{-2}{iz_1}$. Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural n tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

b) Seja α∈[−π,π[. Mostre que

$$\frac{\cos(\pi-\alpha)+i\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha} = cis(\pi - 2\alpha)$$

(2.ª fase)

$\boxed{E_{24}}$ Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = (1+i)^{2013}$. A qual dos conjuntos seguintes pertence w ?

(A) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > |z-1|\}$

(B) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{2}\}$

(C) $\{z \in \mathbb{C} : z = \bar{z}\}$

(D) $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = \text{Im}(z)\}$

(Época especial)

$\boxed{E_{26}}$ Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+2i\,cis\frac{5\pi}{6}}$ e $z_2 = \sqrt{2}cis\frac{\pi}{12}$

a) Seja z = cisθ, com θ pertencente a [0,2π[. Determine θ de modo que $\frac{z}{z_1}$ seja um número real negativo, sem utilizar a calculadora.

b) As imagens geométricas de z_2 e do seu conjugado, $\bar{z}_2$, são vértices consecutivos de um polígono regular. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w. Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora. Comece por calcular n.

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2014*)

93. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

a) Considere $z_1 = \frac{(-1+\sqrt{3}i)^3}{1-i}$ e $z_2 = \text{cis } \alpha$, com $\alpha \in [0,\pi[$. Determine os valores de α, de modo que $z_1 \times (z_2)^2$ seja um número imaginário puro, sem utilizar a calculadora.

b) Seja z um número complexo tal que $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 \leq 10$. Mostre que $|z| \leq 2$

(1.ª fase)

95. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

a) Considere $z = 2cis(\frac{\pi}{6})$ e $w = \frac{(z-i)^4}{1+zi}$. No plano complexo, seja O a origem do referencial. Seja A a imagem geométrica do número complexo $\bar{z}$ e seja B a imagem geométrica do número complexo w. Determine a área do triângulo [AOB], sem utilizar a calculadora.

b) Seja $\alpha \in]0,\pi[$. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 2\cos \alpha z + 1 = 0$. Apresente as soluções, em função de α, na forma trigonométrica.

(2.ª fase)

E28 Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora.

a) Considere $z_1 = \frac{1-i}{2i} - i^{-1}$ e $z_2 = cis(-\frac{\pi}{4})$. Averigue se a imagem geométrica do complexo $(z_1)^4 \times \bar{z}_2$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

a) Considere o número complexo $w = \text{sen}(2\alpha) + 2i \cos^2\alpha$, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Escreva w na forma trigonométrica.

(Época especial)

(*Exames Nacionais 2015*)

96. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $|z+4-4i|=3 \ \wedge \ \frac{\pi}{2} \le \arg(z) \le \frac{3\pi}{4}$

No plano complexo, esta condição define uma linha. Qual é o comprimento dessa linha?

(A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π

(1.ª fase)

97. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z=\frac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\theta}$$

Determine os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0,2\pi[$, para os quais z é um número imaginário puro. Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

(1.ª fase)

$\boxed{\text{E29}}$ Na Figura 2, está representado, no plano complexo, um quadrado cujo centro coincide com a origem e em que cada lado é paralelo a um eixo. Os vértices deste quadrado são as imagens geométricas dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4. Qual das afirmações seguintes é falsa?

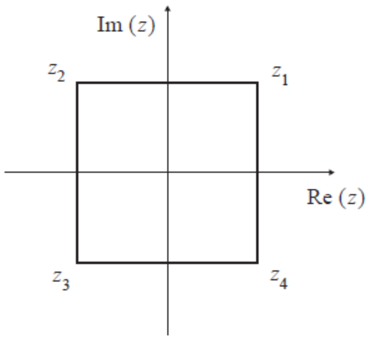


Figura 2

(A) $|z_3-z_1|=|z_4-z_2|$ (B) $z_1+z_4=2\,\mathrm{Re}(z_1)$

(C) $\frac{z_4}{i}=z_1$ (D) $-\overline{z_1}=z_2$

(Época especial)

$\boxed{\text{E30}}$ Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$$z_1=(1+i)^6 \quad \text{e} \quad z_2=\frac{8i}{\mathrm{cis}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}$$

Sabe-se que as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial. Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de n.

(Época especial)

Soluções: 1. B 2. $1\pm i\sqrt{3}$; $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ 3. B 4. $|z|<1 \wedge \pi/2 < \arg(z)<\pi$ 5. B 6. $|z|=\sqrt{2}/2$ 7. D 8. $\sqrt{3}+i$
9. A 10. 3; 3º 11.B 12. 6i; $|z|<2 \wedge \pi/3<\arg(z)<11\pi/15$ 13. D 14. {3;-4i;-3}; 2-i 15. A
16. 6+8i; não 17. A 18. -4;$2+2\sqrt{2}$ 19. B 20. $-2\sqrt{3}+2i$ 21. B 22. –2 e 2; $5\pi/4$ 23. A 24. $2i$; $|z-2+2i|=3\sqrt{2}$
25. B 26. $3i$ 27. C 28. $\sqrt[4]{2}$ cis $\pi/12$, $\sqrt[4]{2}$ cis $7\pi/12$, $\sqrt[4]{2}$ cis $13\pi/12$, $\sqrt[4]{2}$ cis $19\pi/12$; $-2+4i$ 29. C 30. $\sqrt{8}$ cis$(5\pi/4)$
32. B 33. $-24-5i$; 5cis$(\pi/2-\alpha)$ 34. C 35. $\sqrt{2}/2$ cis$(\pi/4)$ 36. A 37. $-1-\sqrt{3}/3\, i$ 38. D 39. $\sqrt{2}$ cis$(-\pi/4)$; $3\pi/16$
40. A 41. 25cis$(\pi/7)$; $\sqrt{3}+i$ 42. D 43. $\pi/6$ 44. A 45. $3\pi/2+\alpha$; $-48+12i$ 46. B 47. B 48. 4
49. D 50. A 51. $4/5-2i/5$; $\sqrt{2}$ cis$(5\pi/4)$ 52. A 53. $3i$ 54. C 55. C 56. $\sqrt{2}/2$cis$(\pi/4)$; 3 57. C 58. A
59. $-11/4+1/4\, i$ 60. 24 61. $2-2/3\, i$ 62. D 63. B 64. $\sqrt{2}$cis $\pi/4$ 65. B 66. A 67. $4\sqrt{2}$cis $\pi/4$; $|z-3|=\sqrt{5}$
68. B 69. $4+2\sqrt{5}$ 70. B 71. B 72. $4cis(-\frac{\pi}{2})$ e $4cis\,\frac{\pi}{2}$; 30 73. B 74. C 75. 3 76. C 77. –1
78. A 79. C 80. $\{2cis0;\ 2cis\,\frac{2\pi}{3};\ 2cis\,\frac{4\pi}{3}\}$ 81. D 82. B 83. ½ cis$(13\pi/10)$ 84. C 85. $-i$ 86. C 87. A
88. -1; $-3\pi/2$ 89. C 90. A 91. 6 92. D 93. $\pi/8$ e $5\pi/8$ 94. C 95. 9/2; cisα e cis$(-\alpha)$ 96. C 97. $3\pi/4$ e $7\pi/4$
98. D 99. cis$(-\pi/6)$, cis$(\pi/3)$, cis$(5\pi/6)$, cis$(4\pi/3)$
E1. C E2. 2 E3. D E4. $\sqrt[3]{2}cis\,\frac{11\pi}{9}$; $\frac{3\pi}{2}$ E5. A E6. C E7. ¼ cis$(\pi/4)$; 32 E8. A E9. D E10. $2+i$ E11. $11\pi/24$
E12. B E13. D E14. 8 E15. A E16. C E17. cis$(-2\pi/3)$ E18. B E19. C E20. –8; IV E21. D E22. B
E23. $\{\ 2cis\,\frac{11\pi}{24}\ ;\ 2cis\,\frac{23\pi}{24}\ ;\ 2cis\,\frac{35\pi}{24}\ ;\ 2cis\,\frac{47\pi}{24}\ \}$ E24. D E25. C E26. $11\pi/6$; -64 E27. D E28. sim; 2cosα cis$(\pi/2-\alpha)$
E29. C E30. 10

O professor: RobertOliveira