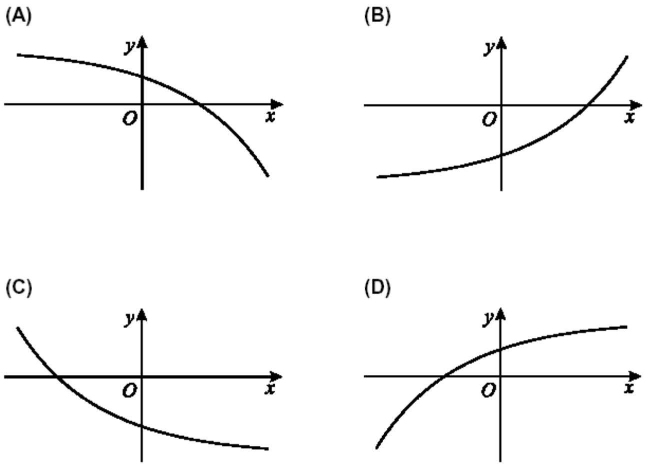
Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática – 12.º ano

Cálculo Diferencial – alguns exercícios saídos em exames e em testes intermédios

(*Exames Nacionais 2003*)

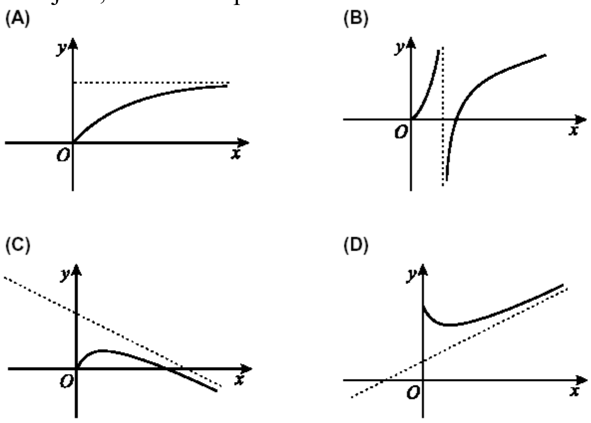
120. Seja f uma função de domínio R. Sabe-se que a primeira e a segunda derivadas de f são negativas em R. Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f?



(1ª chamada)

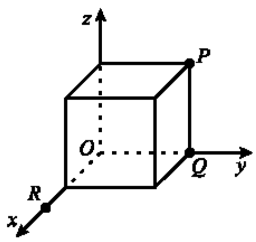
121. Considere uma função g, de domínio [0,+∞[, contínua em todo o seu domínio. Sabe-se que: O gráfico de g tem uma única assimptota; $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\frac{1}{2}$

Em qual das alternativas seguintes podem estar representadas, em referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função g e, a tracejado, a sua assimptota?



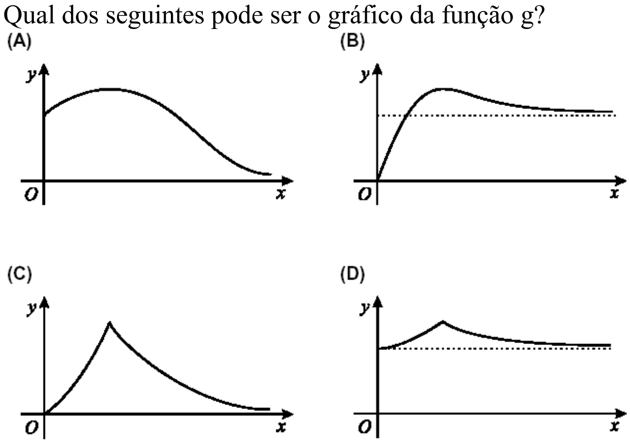
(1ª chamada)

123. Na figura está representado um cubo, em referencial o. n. xOy. Três das arestas do cubo estão contidas nos eixos do referencial. Os pontos P e Q são dois dos vértices do cubo, pertencentes ao plano yOz. Admita que um ponto R, partindo da origem do referencial, se desloca ao longo do semieixo positivo Ox



Seja g a função que faz corresponder, à abcissa x do ponto R, a área da secção produzida no cubo pelo plano PQR.

Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função g?



(1ª chamada)

124. Num laboratório, foi colocado um purificador de ar. Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois. Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar diminuiu, enquanto o purificador esteve ligado. Uma vez o purificador desligado, o nível de poluição do ar começou de imediato a aumentar.

Admita que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por $P(t)=1-\frac{\ln(t+1)}{t+1}$, t ∈ [0,24]

Nas duas alíneas seguintes, sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

a) Qual é o nível de poluição à uma hora e trinta minutos da tarde? Apresente o resultado na unidade considerada, arredondado às décimas.

b) Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:

Quanto tempo esteve o purificador de ar ligado?

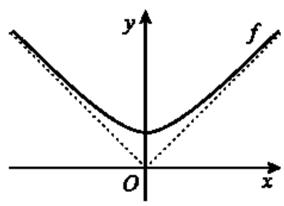
Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

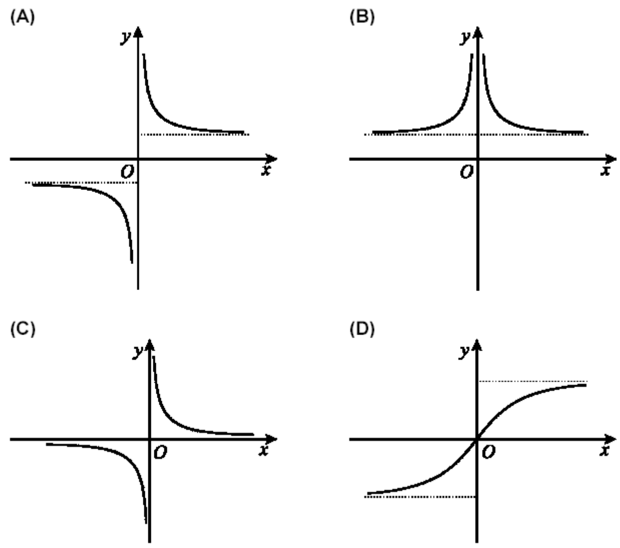
(1ª chamada)

125. Prove que, para qualquer função quadrática g , existe um e um só ponto do gráfico onde a recta tangente é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

(1ª chamada)

129. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função f de domínio R, contínua em todo o seu domínio. A bissectriz dos quadrantes pares e a bissectriz dos quadrantes ímpares são assimptotas do gráfico de f. Indique em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g definida por g(x)=f(x)/x





(2ª chamada)

134. Seja f uma função de domínio R, e seja g a função definida por g(x)=f(x+1). A recta de equação y=2x+4 é a única assimptota do gráfico de f. Qual das seguintes é uma equação da única assimptota do gráfico de g?

(A) y=2x+6 (B) y=2x+4 (C) y=2x-4 (D) y=2x-6

(2ª fase)

135. Admita que, ao longo dos séculos XIX e XX e dos primeiros anos do século XXI, a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, aproximadamente, por $p(t) = 3,5 + \dfrac{6,8}{1+12,8e^{-0,036t}}$

(considere que t é medido em anos e que o instante t=0 corresponde ao início do ano 1864).

a) De acordo com este modelo, qual será a população de Portugal Continental no final do presente ano (2003)? Apresente o resultado em milhões de habitantes, arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

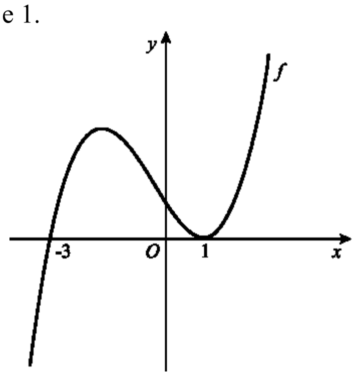
b) Sem recorrer à calculadora (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema: De acordo com este modelo, em que ano a população de Portugal Continental foi de 3,7 milhões de habitantes?

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2005*)

146. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f, contínua em ℝ. A função f tem apenas dois zeros: –3 e 1.

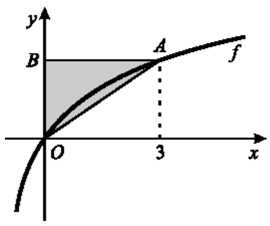


Seja g a função definida por $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função g?

(A)]–∞,1] (B) ℝ\{–3,1} (C)]–∞,–3] (D) [–3,+∞[

(1ª fase)

148. Na figura junta, está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, definida, em]–1,+∞[, por $f(x)=\log_2(x+1)$. Na mesma figura, está também representado um triângulo rectângulo [ABO].



O ponto A tem abcissa 3 e pertence ao gráfico de f. O ponto B pertence ao eixo Oy. Qual é a área do triângulo [ABO]?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(1ª fase)

149. Admita que o número de elementos de uma população de aves, t anos após o início de 1970, é dado aproximadamente por $P(t)=5,2\times10^7 \times e^{(N-M)t}$, t≥0, em que N e M são duas constantes, denominadas, respectivamente, *taxa de natalidade* e *taxa de mortalidade* da população. Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

a) Sabendo que N<M, calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)$ e interprete o resultado obtido, no contexto do problema.

b) No início de 2000, a população era metade da que existia no início de 1970. Sabendo que a *taxa de natalidade* é 7,56, determine a *taxa de mortalidade*. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

(1ª fase)

150. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que a sua derivada é dada por $f'(x)=2+x\ln x,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$

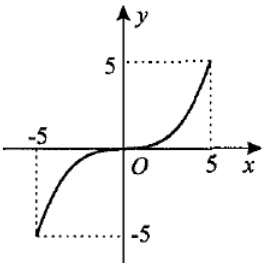
Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes:

a) Seja r a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1. Seja P o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox. Sabendo que f(1)=3, determine a abcissa do ponto P.

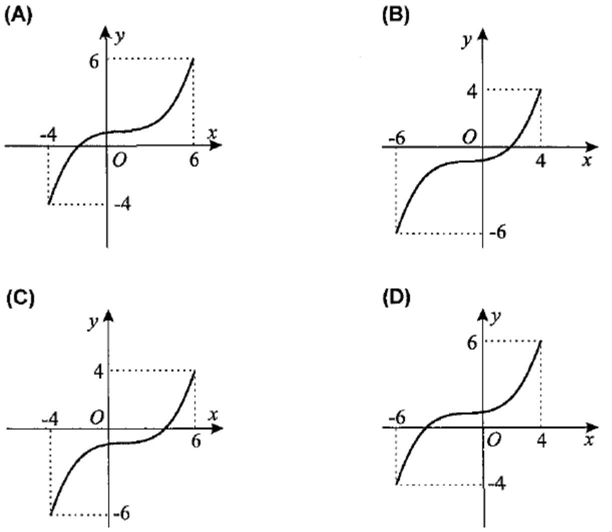
b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

(1ª fase)

151. Considere a função f, de domínio [−5,5] e contradomínio [−5,5], representada graficamente na figura junta.

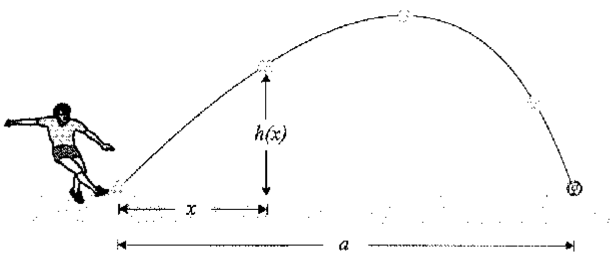


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g, definida por g(x)=1+f(x+1)?



(2ª fase)

154. Na figura está representada a trajectória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador da selecção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.



Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu. Considere a função h definida em $[0,a]$ por $h(x)=2x+10\ln(1-0{,}1x)$.

Admita que h(x) é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projecção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.

a) Recorrendo à calculadora, determine o valor de a, arredondado às centésimas. Explique como procedeu, apresentando todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora.

b) Sem utilizar a calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, estude a função h quanto à monotonia e conclua qual foi a maior altura que a bola atingiu, relativamente ao solo, depois de pontapeada. Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

c) Sem utilizar a calculadora, mostre que a taxa de variação média da função h, no intervalo [1,3], é $\ln[e^2(7/9)^5]$

(2ª fase)

155. No início de 1972, havia 400 lobos num determinado parque natural. As medidas de protecção a lobos fizeram com que o referido nº aumentasse continuamente. Os recursos do parque permitem que o nº de lobos cresça até bastante perto de um milhar, mas não permitem que este valor seja ultrapassado. Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função P que dá o nº aproximado de lobos existentes no parque natural, t anos após o início de 1972.

(A) $\frac{1000}{1+e^{-0{,}5t}}$ (B) $\frac{1000}{1+1{,}5e^{-0{,}5t}}$

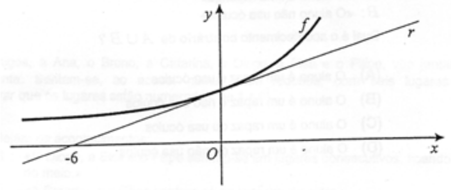
(C) $\frac{1200}{1+2e^{-t}}$ (D) $1000-\frac{600(t^3+1)}{e^t}$

Qual é a expressão correcta? Numa pequena composição, com cerca de 10 linhas, explique as razões que o levam a rejeitar as outras 3 expressões (apresente 3 razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada).

Nota: poder-lhe-á ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtidos(s).

(2ª fase)

$\boxed{\text{E4.}}$ Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio R, definida por $f(x)=e^{ax}+1$ (a é uma constante real positiva).



Na figura está também representada a recta r, que é tangente ao gráfico de f no ponto em que este intersecta o eixo Oy. A recta r intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa −6. Qual é o valor de a?

(A) ½ (B) 1/3 (C) 2/3 (D) 3/2

(Época especial)

$\boxed{\text{E6.}}$ De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que: f tem derivada finita em todos os pontos de $\mathbb{R}$; $f(0)=-1$; f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^-$ e é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=[f(x)]^2$. Prove que 1 é o mínimo da função g.

(Época especial)

(*Testes intermédios e exames 2005/2006*)

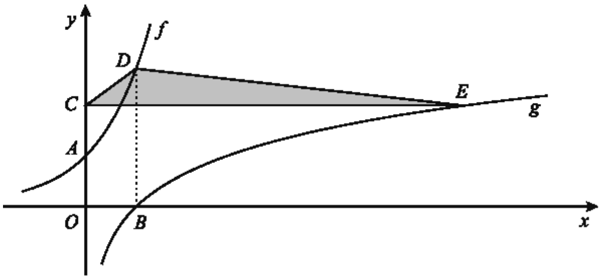
156. Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.
Seja (y_n) a sucessão de termo geral $y_n = 1 + \ln(x_n)$. Qual é o valor de $\lim y_n$?
(A) 2 (B) 3 (C) $1+e$ (D) $2+e$

(Intermédio 2)

157. Indique o número real que é solução da equação $e^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$

(Intermédio 2)

159. Na figura abaixo estão representadas, em referencial o. n. xOy: parte do gráfico da função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=e^x$; parte do gráfico da função *g*, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)= \ln x$. O ponto A é o ponto de intersecção do gráfico de *f* com o eixo Oy e o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico de *g* com o eixo Ox.



Na figura está também representado um triângulo [CDE]. O ponto C pertence ao eixo Oy, o ponto D pertence ao gráfico de *f* e o ponto E pertence ao gráfico de *g*. Sabe-se ainda que: a recta BD é paralela ao eixo Oy e a recta CE é paralela ao eixo Ox; $\overline{AC} = \overline{OA}$. Qual é a área do triângulo [CDE]?

(A) $\frac{(e-1)\ln 2}{2}$ (B) $\frac{(e^2-1)\ln 2}{2}$ (C) $\frac{e(e-2)}{2}$ (D) $\frac{e^2(e-2)}{2}$

(Intermédio 2)

161. Considere a função *f*, de domínio $]0,+\infty[$, definida por $f(x)= \frac{1-\ln x}{x}$. Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

a) Mostre que $f(\frac{1}{2})=\ln(4e^2)$

b) Estude a função *f* quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

(Intermédio 2)

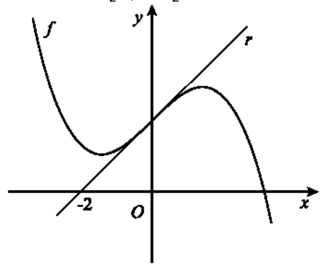
163. De uma função *g*, de domínio $]0,+\infty[$, sabe-se que: não tem zeros; a recta de equação $y=x+2$ é assimptota do seu gráfico. Seja *h* a função de domínio $]0,+\infty[$, definida por $h(x)= \frac{x^2}{g(x)}$. Prove que a recta de equação $y=x-2$ é assimptota do gráfico de *h*.

(Intermédio 2)

166. Seja *h* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=\frac{\ln(\sqrt{e^x})}{2}$. Qual das seguintes expressões pode também definir *h*?
(A) $\sqrt{x}$ (B) $\frac{x}{2}$ (C) $\frac{x}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{x}}{2}$

(1ªfase)

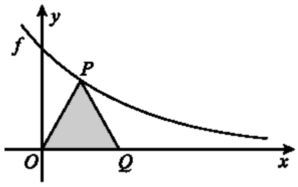
167. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial *f*. Tal como a figura sugere, o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,0]$ e voltada para baixo em $[0,+\infty[$.



A recta *r*, tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 0, é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares e intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa -2. Sabendo que f' e f'' designam, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas de *f*, indique o valor de $f(0)+ f'(0)+ f''(0)$
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(1ªfase)

168. Na figura estão representados: parte do gráfico da função *f* de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=e^{-x}$;
um triângulo isósceles [OPQ] ($\overline{PO} = \overline{PQ}$), em que:
- O é a origem do referencial;
- P é um ponto do gráfico de *f*;
- Q pertence ao eixo das abcissas.



Considere que o P ponto se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de *f*. O ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$. Seja *A* a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abcissa *x* do ponto P, a área do triângulo [OPQ].

a) Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, se tem $A(x)=xe^{-x}$

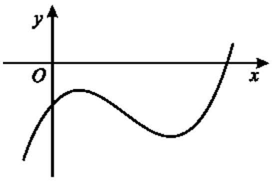
b) Sem recorrer à calculadora, estude a função A quanto à monotonia e conclua qual é o valor máximo que a área do triângulo [OPQ] pode assumir.

(1ªfase)

169. De uma certa função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:
- *f* é contínua;
- a recta de equação $y=x$ é assimptota do gráfico de *f*, quer quando $x \to +\infty$, quer quando $x \to -\infty$. Mostre que o gráfico da função *g*, definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x)=xf(x)$, não tem qualquer assimptota.

(1ªfase)

173. Na figura abaixo está parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$.



Sejam h' e h'' a primeira e a segunda derivadas de h, respectivamente. Admita que estas duas funções também têm domínio $\mathbb{R}$. Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

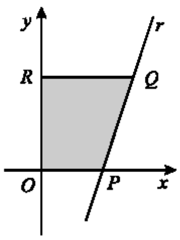
(A) $h(0) + h''(0)$ (B) $h(0) - h'(0)$
(C) $h'(0) - h''(0)$ (D) $h'(0) \times h''(0)$

(2ªfase)

174. Seja f a função, de domínio $]1,+\infty[$, definida por $f(x)= x + x\ln(x-1)$. <u>Sem recorrer à calculadora</u>, resolva as duas alíneas seguintes:

a) Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

b) Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, uma recta r e um trapézio [OPQR]. • Q tem abcissa 2 e pertence ao gráfico de f (o qual não está representado na figura); • r é tangente ao gráfico de f no ponto Q; • P é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox; • R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto Q. Determine a área do trapézio [OPQR]. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

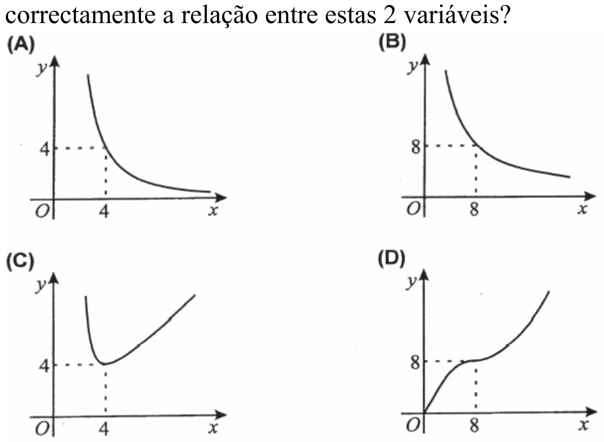


(2ªfase)

175. Seja $f : [0,2]\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0)=f(2)=0$ e $f(1)>0$.
Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $]0,1[$ tal que $f(c)=f(c+1)$.
Sugestão: considere a função g: $[0,1]\to\mathbb{R}$, definida por $g(x)=f(x) - f(x+1)$

(2ªfase)

E9. Pretende-se construir um prisma quadrangular regular com 64 cm^3 de volume. A altura y do prisma, medida em cm, depende do comprimento x da aresta da base, medido igualmente em cm. Qual dos gráficos seguintes traduz correctamente a relação entre estas 2 variáveis?



(Época especial)

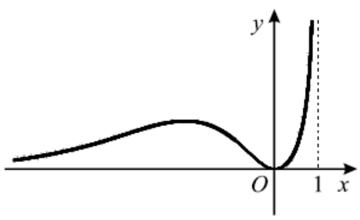
(*Testes intermédios e exames 2006/2007*)

178. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que a recta de equação $y = 2x + 3$ é assimptota do gráfico de g. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{g(x)}{x}\times(g(x)-2x)\right]$

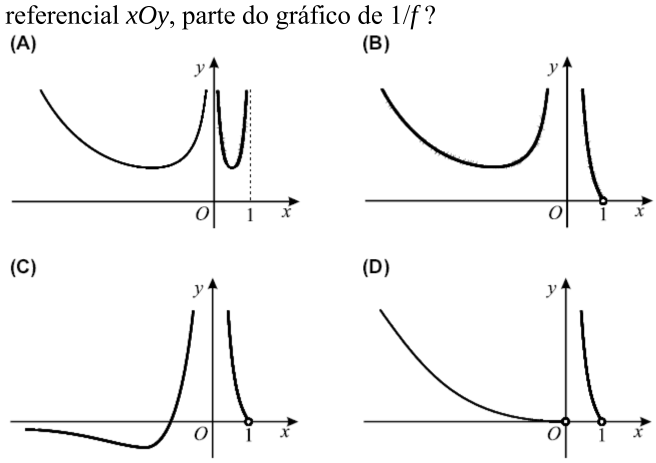
(A) 0 (B) 5 (C) 6 (D) $+\infty$

(Intermédio 2)

179. Na figura está representada, em referencial xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $]-\infty,1[$, contínua em todo o seu domínio. Tal como a figura sugere, tem-se:
• o gráfico de f contém a origem do referencial;
• as rectas de equações $y = 0$ e $x = 1$ são assimptotas do gráfico de f.

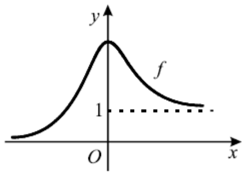


Em qual das opções seguintes poderá estar representada, em referencial xOy, parte do gráfico de $1/f$?



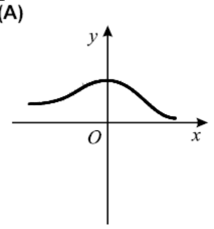
(Intermédio 2)

186. Na figura está parte da representação gráfica de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

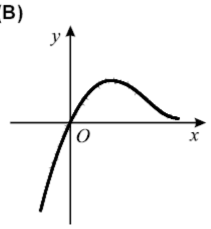


Tal como a figura sugere, o eixo *Ox* e a recta de equação $y = 1$ são assimptotas do gráfico de *f*. Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln[f(x)]$. Numa das opções seguintes está parte da representação gráfica da função *g*. Em qual delas?

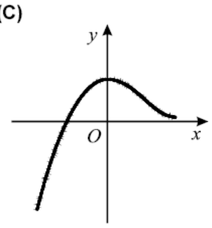
(A)



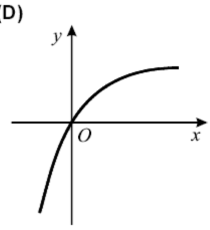
(B)



(C)



(D)



(1ªfase)

196. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln(x^2)$. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos:

a) Determine os pontos de intersecção do gráfico de *f* com o eixo *Ox*

b) Estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

(2ªfase)

(*Testes intermédios e exames 2007/2008*)

198. Admita que uma certa população de seres vivos evolui de acordo com a seguinte lei: o número de indivíduos da população, *t* dias após um certo instante inicial, é dado aproximadamente por $P(t) = ae^{kt}$ $\quad (t \in \mathbb{R}_0^+)$ em que

- *a* é o número de indivíduos da população no instante inicial (*a*>0)
- *k* é uma constante real

a) Seja *r* um número real positivo. Considere que, ao fim de *n* dias, contados a partir do instante inicial, o número de indivíduos da população é igual a *r* vezes o número de indivíduos que existiam no referido instante inicial. Mostre que se tem $k = \dfrac{\ln(r)}{n}$

b) Admita que, às zero horas do dia 1 do corrente mês, se iniciou, em laboratório, uma cultura de bactérias, em pequena escala, na qual se juntaram

- 500 indivíduos de uma estirpe A
- 500 indivíduos de uma estirpe B

Nunca foram introduzidos mais indivíduos destas duas estirpes nesta cultura. As condições da cultura são desfavoráveis para a estirpe A, mas são favoráveis para a estirpe B. De facto,

- decorrido exactamente um dia, a estirpe A estava reduzida a 250 indivíduos
- decorridos exactamente seis dias, a estirpe B tinha alcançado 1000 indivíduos

b_1) Quer a estirpe A, quer a estirpe B, evoluíram de acordo com a lei acima referida. No entanto, o valor da constante *k* para a estirpe A é diferente do valor dessa constante para a estirpe B. Utilizando a igualdade da alínea a), verifique que:

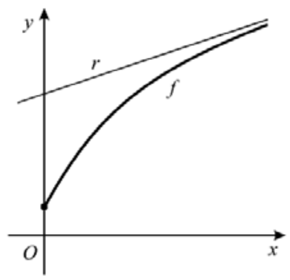
- no caso da estirpe A, o valor da constante *k*, com quatro casas decimais, é $k_A = -0{,}6931$
- no caso da estirpe B, o valor da constante 5, com quatro casas decimais, é $k_B = 0{,}1155$

b_2) Durante a primeira semana, houve um momento em que o número total de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, atingiu o valor mínimo. Utilizando os valores k_A e k_B referidos na alínea anterior e recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o dia e a hora em que tal aconteceu (hora arredondada às unidades). Apresente, na sua resposta:

- a expressão da função que dá o número total de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, em função do tempo;
- o gráfico dessa função, para $t \in [0, 7]$ no qual deve estar devidamente assinalado o ponto necessário à resolução do problema;
- a coordenada relevante desse ponto, arredondada às milésimas.

(Intermédio 1)

200. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *f* de domínio $[0, +\infty[$. A recta *r*, de equação $y = \frac{1}{3}x + 2$ é assimptota do gráfico de *f*. Seja *h* a função definida em $[0, +\infty[$ por $h(x) = \dfrac{x}{f(x)}$. O gráfico de *h* tem uma assimptota horizontal. Qual das equações seguintes define essa assimptota?



(A) $y = \frac{1}{3}$ (B) $y = \frac{1}{2}$

(C) $y = 2$ (D) $y = 3$

(Intermédio 2)

201. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo $[-2,2]$. Tem-se $f(-2)=1$ e $f(2)=3$. Indique qual das expressões seguintes define uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $]-2,2[$

(A) $g(x)=x+f(x)$ (B) $g(x)=x-f(x)$

(C) $g(x)=x^2+f(x)$ (D) $g(x)=x^2-f(x)$

(Intermédio 2)

202. Num lago onde não havia peixes, introduziram-se, num determinado momento, alguns peixes. Admita que, t anos depois, o número de peixes existentes no lago é dado aproximadamente por $f(t)=\dfrac{2000}{1+ke^{-0,13t}}$ onde k designa um número real.

a) Determine o valor de k, supondo que foram introduzidos 100 peixes no lago.

b) Admita agora que $k=24$. Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:

Ao fim de quantos anos o número de peixes no lago atinge o meio milhar? Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

(Intermédio 2)

203. Seja f a função de domínio $[-3,3]$ definida por

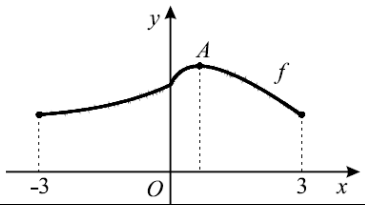
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1+x}{x} & \text{se } -3\le x<0\\ 2-x+\ln(1+3x) & \text{se } 0\le x\le 3\end{cases}$$

Na figura está representado o gráfico da função f

Tal como a figura sugere:

• A é o ponto do gráfico de f de ordenada máxima

• a abcissa do ponto A é positiva

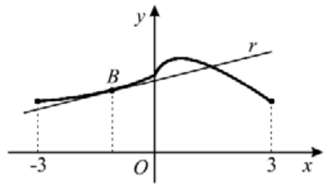


a) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

a_1) Determine a abcissa do ponto A.

a_2) Mostre que, tal como a figura sugere, f é contínua no ponto 0.

b) Na figura está novamente representado o gráfico de f, no qual se assinalou um ponto B, no segundo quadrante. A recta r é tangente ao gráfico de f, no ponto B. Considere o seguinte problema: Determinar a abcissa do ponto B, sabendo que a recta r tem declive 0,23. Traduza este problema por meio de uma equação e, recorrendo à calculadora, resolva-a graficamente, encontrando assim um valor aproximado da abcissa do ponto B. Pode realizar algum trabalho analítico antes de recorrer à calculadora. Reproduza na sua folha de prova o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e apresente o valor pedido arredondado às centésimas.



(Intermédio 2)

211. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

As rectas de equações $x=-2$ e $y=1$ são as únicas assimptotas do gráfico de g. Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)=+\infty$.

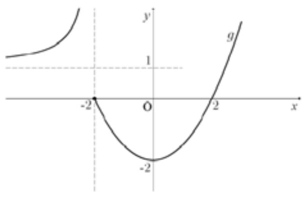


Fig. 1

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n)?

(A) $-2+\frac{2}{n}$ (B) $-2-\frac{1}{n}$ (C) $1+\frac{1}{n}$ (D) $1-\frac{1}{n}$

(2ª fase)

(*Testes intermédios e exames 2008/2009*)

218. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$\log_2(x-1)+\log_2(13-x)\le 5$

Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

(Intermédio 2)

219. Quando uma substância radioactiva se desintegra, a sua massa, medida em gramas, varia de acordo com uma função do tipo $m(t)=ae^{bt}, t\ge 0$, em que a variável t designa o tempo, medido em milénios, decorrido desde um certo instante inicial. A constante real b, depende da substância e a constante real a é a massa da substância no referido instante inicial. Resolva as alíneas seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar cálculos numéricos.

a) O *carbono-14* é uma substância radioactiva utilizada na datação de fósseis em que esteja presente. Relativamente a um certo fóssil, sabe-se que:

• a massa de *carbono-14* nele presente, mil anos depois de um certo instante inicial, era de 2,91 g

• a massa de *carbono-14* nele presente, dois mil anos depois do mesmo instante inicial, era de 2,58 g

Tendo em conta estes dados, determine:

• o valor da constante b, para o *carbono-14*;

• a massa de *carbono-14* que existia no fóssil, no referido instante inicial.

Apresente os dois valores arredondados às centésimas.

Nota: se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) O *rádio-226* é outra substância radioactiva. Em relação ao *rádio-226*, sabe-se que $b = -0{,}43$. Verifique que, quaisquer que sejam os valores de a e de t, $\frac{m(t+1{,}6)}{m(t)}$ é constante.
Determine o valor dessa constante, arredondado às décimas, e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

(Intermédio 2)

220. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-3}{x^2-2x+1} & \text{se } x<1 \\ \ln(x)-e^{1-x} & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

a) Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados. Indique uma equação para cada assimptota encontrada.
b) Na figura 2 está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f. O rectângulo $[ABCD]$ tem dois vértices no eixo Ox, estando os outros dois no gráfico de f. O ponto A tem abcissa -2.

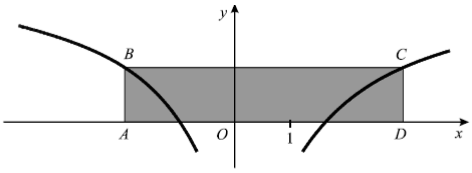


Figura 2

Determine a área do rectângulo $[ABCD]$.
Nota: Na resolução deste problema vai necessitar de determinar a abcissa do ponto C. Para tal, utilize as capacidades gráficas da sua calculadora. Reproduza na sua folha de prova a parte do gráfico de f que visualizou, bem como a recta BC. Assinale também o ponto C e apresente a sua abcissa arredondada às centésimas. Apresente a área pedida igualmente arredondada às centésimas.

(Intermédio 2)

221. De uma função f de domínio $[1,2]$ sabe-se que:
- f é contínua em todo o seu domínio
- $\forall x \in [1,2],\ f(x) < 0$
- $f(1) = 3f(2)$

Seja g a função de domínio $[1,2]$ definida por
$g(x) = 2f(x) - f(1)$
Prove que a função g tem pelo menos um zero.

(Intermédio 2)

225. Considere a função g, de domínio $[-\frac{1}{2}, +\infty[$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x + \ln(1+x-x^2) & se \quad -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & se \quad x = 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & se \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Verifique se a função g é contínua em $x = 1$, sem recorrer à calculadora.
b) Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o valor de x pertencente ao intervalo $[-\frac{1}{2}, 1[$ tal que $g(x) = -2 + g(4)$. Indique o valor pedido arredondado às décimas e apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora.

(Intermédio 3)

227. Sejam f e g duas funções, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que:
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 0$;
- a função g é definida por $g(x) = f(x) + x^2$.

Prove que o gráfico de g não tem assimptotas oblíquas.

(1ª fase)

229. Sejam as funções f e h, de domínios $]1, +\infty[$ e $]-\infty, 2[$, respectivamente, definidas por $f(x) = \log_2(x-1)$ e por $h(x) = \log_2(2-x)$. Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, o conjunto solução da condição $f(x) \geq 1 + h(x)$. Apresente o resultado sob a forma de intervalo real.

(1ª fase)

234. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Resolva, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os dois itens seguintes. a) Estude a continuidade de h no domínio $\mathbb{R}$.

b) Estude a função h quanto à existência de assimptotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

(2ª fase)

(*Testes intermédios e exames 2009/2010*)

236. Qual é o valor de $\log_5\left(\frac{5^{1000}}{25}\right)$?

(A) 40 (B) 500 (C) 975 (D) 998

(Intermédio 1)

237. Seja *g* a função, de domínio [0,+∞[, definida por

$$g(x)=\begin{cases} 3^x-\sqrt{x} & se \quad 0\le x<2 \\ x-5+\log_2(x-1) & se \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero da função *g*?

(A)]0,1[(B)]1,3[(C)]3,5[(D)]5,9[

(Intermédio 1)

238. Na figura 1, está representada parte do gráfico de uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$

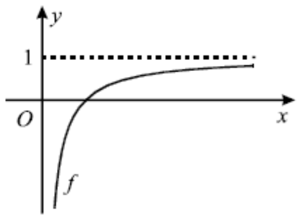


Figura 1

Tal como a figura sugere, a recta de equação *y* = 1 é assimptota do gráfico de *f*. Indique o valor de

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x}-f(x)\right]$$

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) +∞

(Intermédio 1)

239. Na figura 2, está representada parte do gráfico de uma função *h*, de domínio $\mathbb{R}$. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n=h\left(4-\frac{1000}{n}\right)$. Qual é o valor de $\lim\,(u_n)$?

(A) –∞ (B) 1 (C) 2 (D) 3

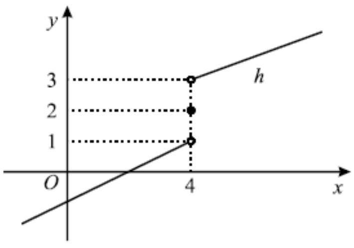


Figura 2

(Intermédio 1)

240. Seja *f* a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-\sqrt{2x}} & se \quad 0<x<2 \\ x\,e^{-x}+x+1 & se \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Resolva, <u>usando exclusivamente métodos analíticos</u>, os itens a) e b)

a) Averigúe se a função *f* é contínua em *x* = 2

b) O gráfico da função *f* tem uma assimptota oblíqua. Determine a equação reduzida dessa assimptota.

c) Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=3+\ln(x)$. A equação $f(x)=g(x)$ tem exactamente duas soluções. Determine essas soluções, <u>utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora</u>. Apresente as soluções arredondadas às centésimas. Apresente os gráficos que obteve na calculadora e assinale os pontos relevantes.

(Intermédio 1)

241. Numa certa região, uma doença está a afectar gravemente os coelhos que lá vivem. Em consequência dessa doença, o número de coelhos existentes nessa região está a diminuir. Admita que o número, em <u>milhares</u>, de coelhos que existem nessa região, *t* semanas após a doença ter sido detectada, é dado aproximadamente por $f(t)=\frac{k}{3-2e^{-0,13t}}$

(*k* designa um número real positivo)

Resolva, <u>usando exclusivamente métodos analíticos</u>, os dois itens seguintes.

<u>Nota</u>: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

a) Suponha que *k* = 10. Ao fim de quantos <u>dias</u>, após a doença ter sido detectada, é que o número de coelhos existentes na referida região é igual a 9000?

b) Admita agora que o valor de *k* é desconhecido. Sabe-se que, durante a primeira semana após a detecção da doença, morreram dois mil coelhos e não nasceu nenhum. Determine o valor de *k*, arredondado às décimas.

(Intermédio 1)

244. Seja *a* um número real diferente de zero. Qual é o valor de $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax^2+a^2x}$?

(A) $\frac{1}{a}$ (B) $\frac{1}{2a}$ (C) 0 (D) +∞

(Intermédio 2)

245. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=3+4x^2e^{-x}$. Resolva os itens seguintes, <u>usando exclusivamente métodos analíticos</u>.

a) Mostre que o gráfico da função *f* tem uma única assimptota e escreva uma equação dessa assimptota.

b) Mostre que a função *f* tem um único mínimo relativo e determine-o.

c) Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $g(x)=x+\ln[f(x)-3]$. Determine os zeros da função *g*

(Intermédio 2)

255. Considere a função *f* , de domínio]0, +∞[, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-3x}{x} & \text{se } 0<x\le 2 \\ \dfrac{1}{5}x-\ln x & \text{se } x>2 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b), recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude a função *f* quanto à existência de assimptotas oblíquas.

b) Mostre que a função *f* tem um extremo relativo no intervalo]2, +∞[

c) Determine a área do triângulo [ABC], recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Sabe-se que:

• A, B e C são pontos do gráfico da função *f*

• A e B são os pontos cujas abcissas são as soluções, no intervalo]0, 2], da equação $f(x) = f(15)$
• C é o ponto cuja ordenada é o mínimo da função f, no intervalo]0, 2], e cuja abcissa pertence ao intervalo]0, 2]
Na sua resposta, deve:
• reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar as coordenadas dos pontos A, B e C, com arredondamento às centésimas;
• apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

(2ª fase)

256. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + e^{2x^3-1}$. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $f(x) = 1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução em]−2,−1[. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

b) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$

(2ª fase)

$\boxed{\text{E22}}$ Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, e a recta de equação $y = -4$, assimptota do gráfico de h. Qual é o valor de

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)} \ ?$$

(A) $-\infty$ (B) $+\infty$ (C) -4 (D) 0

(época especial)

(Testes intermédios e exames 2010/2011)

258. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação
$\log_3 (7x+6) \geq 2 + \log_3 (x)$
Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

(Intermédio 1)

259. Na década de sessenta do século passado, uma doença infecciosa atacou a população de algumas regiões do planeta.
Admita que, ao longo dessa década, e em qualquer uma das regiões afectadas, o número, em milhares, de pessoas que estavam infectadas com a doença, t anos após o início de 1960, é dado, aproximadamente, por

$I(t) = \dfrac{3e^{kt}}{1+pe^{kt}}$ em que k e p são parâmetros reais.

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar cálculos numéricos.

a) Admita que, para uma certa região, $k = \frac{1}{2}$ e $p = 1$. Determine o ano em que o número de pessoas que estavam infectadas, nessa região, atingiu 2500.
Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) Numa outra região, constatou-se que havia um milhar de pessoas que estavam infectadas no início de 1961. Qual é, para este caso, a relação entre k e p ? Apresente a sua resposta na forma $k = -\ln(A + Bp)$, em que A e B são números reais.

(Intermédio 1)

260. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo [−1,4]. Tem-se $f(-1)=3$ e $f(4)=9$. Em qual das opções seguintes está definida uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo]−1,4[?

(A) $g(x)= 2x + f(x)$ (B) $g(x)= 2x - f(x)$
(C) $g(x)= x^2 + f(x)$ (D) $g(x)= x^2 - f(x)$

(Intermédio 2)

265. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, t horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por

$T(t) = 15 + 0{,}1t^2e^{-0{,}15t}$ com $t \in [0,20]$. Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos. Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

(1ª fase)

266. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\[2ex] \dfrac{2+\ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

a) O gráfico de f admite uma assimptota horizontal. Seja P o ponto de intersecção dessa assimptota com a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e. Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

b) Existem dois pontos no gráfico de f cujas ordenadas são o cubo das abcissas. Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• assinalar esses pontos;
• indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas.

(1ª fase)

267. Na Figura 6, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função g. Sabe-se que:

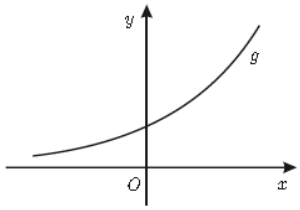


Figura 6

• g é uma função contínua em $\mathbb{R}$

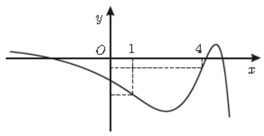
• g não tem zeros

• a segunda derivada, f ′′, de uma certa função f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x) = g(x) \times (x^2 - 5x + 4)$

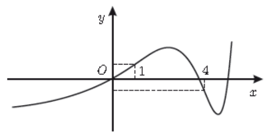
• $f(1) \times f(4) > 0$

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função f

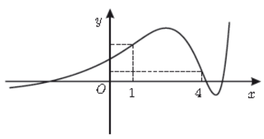
I



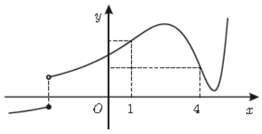
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:

• indique a opção que pode representar f

• apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções

Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado.

(1ª fase)

269. Na estufa de um certo jardim botânico, existem dois lagos aquecidos, o lago A e o lago B. Às zero horas do dia 1 de Março de 2010, cada lago recebeu uma espécie diferente de nenúfares, a saber, *Victoria amazonica* e *Victoria cruziana*.

$N_A(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago A, *t* dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria amazonica* e desenvolvem-se segundo o modelo $N_A(t) = \dfrac{120}{1+7\times e^{-0,2t}}$ com $t \geq 0$

$N_B(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago B, *t* dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria cruziana* e desenvolvem-se segundo o modelo $N_B(t) = \dfrac{150}{1+50\times e^{-0,4t}}$ com $t \geq 0$. Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Como foi referido, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, o lago A recebeu um certo número de nenúfares da espécie *Victoria amazonica*. Decorridos 7 dias, esse número aumentou. Determine de quanto foi esse aumento.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

b) Determine quantos dias foram necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A fosse igual ao número de nenúfares existentes no lago B. Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

(2ª fase)

270. Considere a função f , de domínio [0, +∞[, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - 1}{x - 2} & \text{se} \quad 0 \leq x < 2 \\[2ex] \dfrac{x+1}{\ln(x+1)} & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude f quanto à existência de assimptotas verticais do seu gráfico.

b) Mostre, sem resolver a equação, que f (x) = -3 tem, pelo menos, uma solução em $\left]0, \frac{1}{2}\right[$

c) Estude f quanto à monotonia em]2, +∞[

(2ª fase)

$\boxed{\text{E26}}$ Considere a função f , de domínio]0, +∞[, definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} - 1 & \text{se} \quad 0 < x \leq 2 \\[2ex] \dfrac{4}{x} + 1 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Seja (u_n) uma sucessão de números reais, de termos positivos, tal que $\lim f(u_n) = 3$. Qual das expressões seguintes pode definir o termo geral da sucessão (u_n)?

(A) $2 - \dfrac{1}{n}$ (B) $2 + \dfrac{1}{n}$ (C) $3 - \dfrac{1}{n}$ (D) $3 + \dfrac{1}{n}$

(1ª fase especial)

$\boxed{\text{E27}}$ Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função h ′, primeira derivada de h.

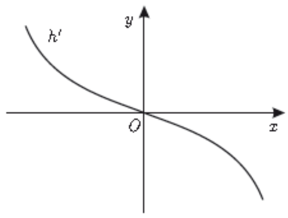
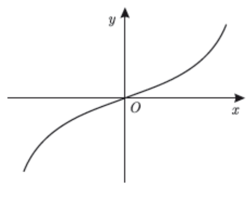


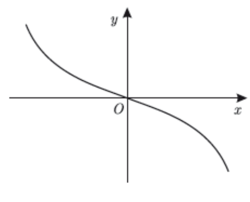
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?

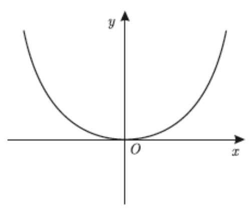
(A)



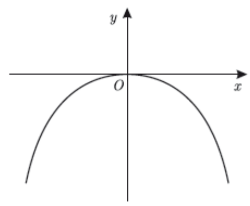
(B)



(C)



(D)



(1ª fase especial)

$\boxed{\text{E28}}$ Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

- $f(1) = f\,'(1) = 1$
- $g(x) = (2x-1) \times f(x)$, para todo o valor real de x

Qual é a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 ?
(A) y = 3x – 2 (B) y = 3x + 4
(C) y = 2x – 1 (D) y =–3x + 2

(1ª fase especial)

$\boxed{\text{E31}}$ Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f , de domínio]–∞, 6[, definida por $f(x) = 2 + 15\ln(3 - \frac{1}{2}x)$. Considere que um ponto C se desloca ao longo do gráfico de f , e que C tem coordenadas positivas. Para cada posição do ponto C, considere o rectângulo [OACB], em que o ponto A pertence ao eixo das abcissas e o ponto B pertence ao eixo das ordenadas.

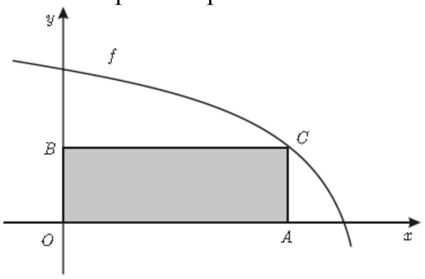


Figura 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A para a qual a área do rectângulo [OACB] é máxima.
Na sua resposta, deve:
• escrever a expressão que dá a área do rectângulo [OACB] em função da abcissa do ponto A;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

(1ª fase especial)

$\boxed{\text{E34}}$ Para um certo valor real de *k*, admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola, *t* minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por

$Q(t) = 12 + \log_3(81 - kt^2)$ com $t \in [0,20]$. Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível.
Determine o valor de *k* recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(época especial)

$\boxed{\text{E35}}$ Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1 & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(*a* é um número real.)
Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.
a) Determine *a* sabendo que f é contínua em x = –1
b) Seja f ´ a primeira derivada de f. Mostre, sem resolver a equação, que $f\,'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em]0, 1[. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

(época especial)

(*Testes intermédios e exames 2011/2012*)

271. Considere a sucessão (u_n), definida por $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

Seja *f* uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que $\lim f(u_n) = 0$. Qual das seguintes expressões pode definir a função *f* ?
(A) 1 − ln x (B) 1 + ln x
(C) x − ln x (D) x + ln x

(Intermédio 1)

272. Para um certo valor de α e para um certo valor de β, é <u>contínua</u> no ponto 0 a função *g*, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \\ \beta - \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é esse valor de α e qual é esse valor de β ?
(A) α = 1 e β = 2 (B) α = 2 e β = 3
(C) α = 1 e β = 3 (D) α = 2 e β = 1

(Intermédio 1)

273. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. xOy , a sombreado, o quadrado [OABC]. Os pontos A e C pertencem aos semieixos positivos Oy e Ox, respetivamente. Considere que um ponto P se desloca sobre o semieixo positivo Ox, iniciando o seu movimento na origem do referencial e percorrendo todos os pontos desse semieixo.

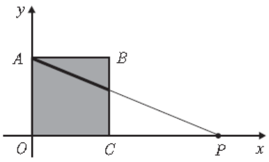
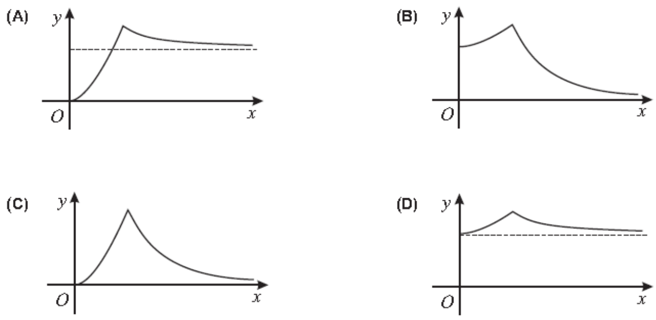


Figura 1

Para cada posição do ponto P, considere o segmento de reta que é a intersecção da reta AP com o quadrado [OABC].

Seja f a função que, à abcissa x do ponto P, faz corresponder o comprimento do referido segmento. Qual dos gráficos seguintes pode ser o gráfico da função f?



(Intermédio 1)

274. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$f(x)=2+\log_3 x$. Resolva os três itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Determine o conjunto dos números reais para os quais se tem $f(x)\geq 4+\log_3(x-8)$. Apresente a sua resposta na forma de intervalo de números reais.

b) Determine o valor de $f(36^{1000})-f(4^{1000})$

c) Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=x+f(x)$

Mostre que $\exists c \in]1,3[: g(c)=5$

(Intermédio 1)

275. Um vírus atacou os frangos de um aviário. Admita que x dias após o instante em que o vírus foi detetado, o número de frangos infetados é dado aproximadamente por

$$f(x)=\frac{200}{1+3\times 2^{3-0,1x}}$$

(considere que $x=0$ corresponde ao instante em que o vírus foi detetado). Resolva os dois itens seguintes <u>sem recorrer à calculadora</u>, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

a) No instante em que o vírus foi detetado, já existiam frangos infetados. Passados alguns dias, o número de frangos infetados era dez vezes maior. Quantos dias tinham passado?

b) Para tentar verificar se um frango está infetado, o veterinário aplica um teste que ou dá positivo ou dá negativo. Sabe-se que:

- quando o frango está infetado, a probabilidade de o teste dar positivo é 96%
- quando o frango não está infetado, a probabilidade de o teste dar negativo é 90%

Trinta dias após o instante em que o vírus foi detetado, existiam no aviário 450 frangos não infetados. Nesse dia, de entre todos os frangos do aviário (infetados e não infetados), o veterinário escolheu, ao acaso, um frango e aplicou-lhe o teste. O teste deu negativo. Qual é a probabilidade de o frango escolhido não estar infetado? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

(Intermédio 1)

276. Para cada valor de k, a expressão

$$f(x)=\begin{cases} k+xe^x & \text{se } x\leq 0 \\ \dfrac{2x+\ln x}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

define uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cujo gráfico tem:

- uma assíntota horizontal, quando $x\to+\infty$
- uma assíntota horizontal, quando $x\to-\infty$

Existe um valor de k para o qual as duas assíntotas são coincidentes, ficando assim o gráfico de f com uma única assíntota horizontal. Determine esse valor de k , <u>sem recorrer à calculadora</u>.

(Intermédio 1)

279. Relativamente a duas funções, f e g, sabe-se que:

- têm domínio [2, 3]
- são funções contínuas
- $f(2)-g(2)>0$ e $f(3)-g(3)<0$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) Os gráficos de f e g intersectam-se em pelo menos um ponto.

(B) A função $f-g$ é crescente.

(C) Os gráficos de f e g não se intersectam.

(D) A função $f-g$ é decrescente.

(Intermédio 2)

280. De uma certa função f sabe-se que:

- o seu domínio é $]1,+\infty[$
- a sua derivada é dada por

$$f'(x)=x^2-4x+\frac{9}{2}-4\ln(x-1)$$

a) Na Figura 3, estão representadas:

- parte do gráfico da função f
- a reta r que é tangente ao gráfico da função f no ponto A, de abcissa 2
- a reta s que é tangente ao gráfico da função f no ponto B

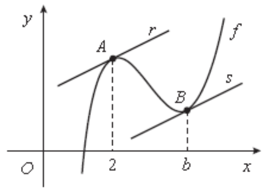


Figura 3

As retas r e s são paralelas. Seja b a abcissa do ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de b

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que tiver necessidade de visualizar na calculadora para resolver graficamente a equação;
- assinalar o ponto relevante para a resolução do problema;
- apresentar o valor de b arredondado às centésimas.

b) Tal como a figura sugere, o gráfico da função f tem um ponto de inflexão. Determine a abcissa desse ponto, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(Intermédio 2)

281. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{xe^x-2e^2}{x-2} & \text{se } x<2 \\ 3e^x+\ln(x-1) & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$$

Averigue se a função f é contínua em $x=2$

(Intermédio 2)

283. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função *g*, de domínio $[a,+\infty[$, com $a < -\frac{1}{3}$

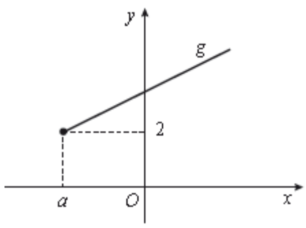


Figura 1

Para esse valor de *a*, a função *f* , contínua em $\mathbb{R}$, é definida por

$$f(x)=\begin{cases}\log_3\left(-x-\frac{1}{3}\right) & \text{se } x<a\\ g(x) & \text{se } x\geq a\end{cases}$$

Qual é o valor de *a* ?

(A) $-\frac{28}{3}$ (B) $-\frac{25}{3}$ (C) $-\frac{19}{3}$ (D) $-\frac{8}{3}$

(1ª fase)

285. Considere a função *f* , de domínio $\mathbb{R}$, e a função *g* , de domínio $]0,+\infty[$, definidas por $f(x) = e^{x-2} - \frac{4e^{-x}+4}{e^2}$ e $g(x) = -\ln x + 4$

a) Mostre que $\ln(2+2\sqrt{2})$ é o único zero da função *f* , recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

b) Considere, num referencial o. n. xOy , os gráficos das funções *f* e *g* e o triângulo [OAB]. Sabe-se que:
• O é a origem do referencial;
• A e B são pontos do gráfico de *f*
• a abcissa do ponto A é o zero da função *f*
• o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função *f* com o gráfico da função *g*
Determine a área do triângulo [OAB], recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
• reproduzir os gráficos das funções *f* e *g* , devidamente identificados, incluindo o referencial;
• assinalar os pontos A e B
• indicar a abcissa do ponto A e as coordenadas do ponto B com arredondamento às centésimas;
• apresentar o valor da área pedida com arredondamento às décimas.

(1ª fase)

286. Considere a função *f* , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x & \text{se } x>0\\ x\,e^{1-x} & \text{se } x\leq 0\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

b) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa $x=-1$

(1ª fase)

290. Considere a função *f* , de domínio $[-7, 0[$, definida por $f(x) = e^{x} + \ln(x^2) + 3$. Sejam A e B os pontos de intersecção do gráfico de *f* com a bissetriz dos quadrantes pares, e seja *d* a distância entre os pontos A e B.

Determine *d*, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• assinalar os pontos A e B
• indicar as coordenadas dos pontos A e B com arredondamento às centésimas;
• apresentar o valor de *d* com arredondamento às centésimas.

(2ª fase)

$\boxed{\text{E39}}$ Admita que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, *t* minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por $C(t) = 0,5t^2 \times e^{-0,1t}$ com $t \geq 0$. Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

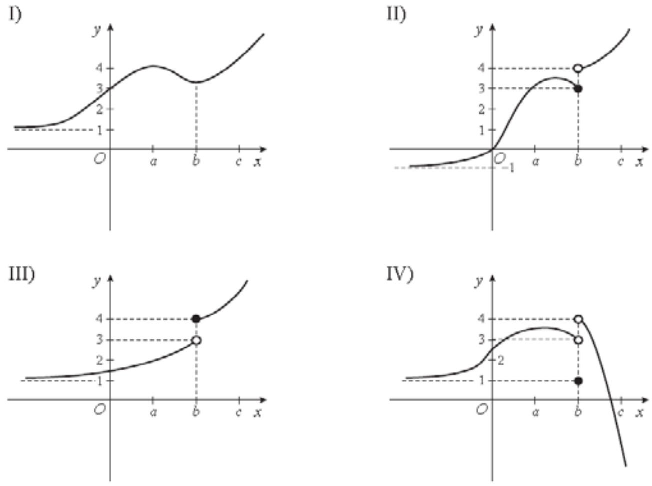
a) Mostre que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação desse produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

b) Determine o valor de *t* para o qual a concentração desse produto químico na água é máxima.

(época especial)

$\boxed{\text{E40}}$ Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico de uma função *h*, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:
• *a*, *b* e *c* são números reais positivos e $a<b<c$
• *h* tem um mínimo relativo em $]a, c[$
• *h* é crescente em $]-\infty,0[$
• $\lim_{x\to-\infty}(h(x)-1) = 0$
• a segunda derivada, h'', da função *h* é tal que $h''(x) > 0$ para $x > b$

Apenas uma das opções seguintes pode representar uma parte do gráfico da função *h*

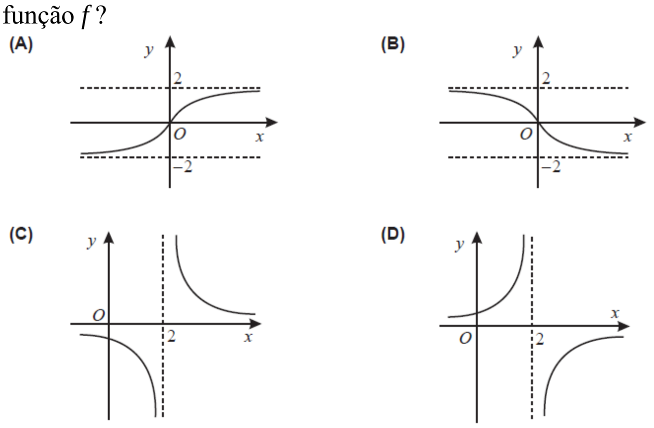


Elabore uma composição na qual:
• indique a opção que pode representar *h*
• apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

(época especial)

(*Testes intermédios e exames 2012/2013*)

292. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \frac{1}{n}$. De uma certa função f, sabe-se que $\lim f(u_n) = +\infty$. Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função f?

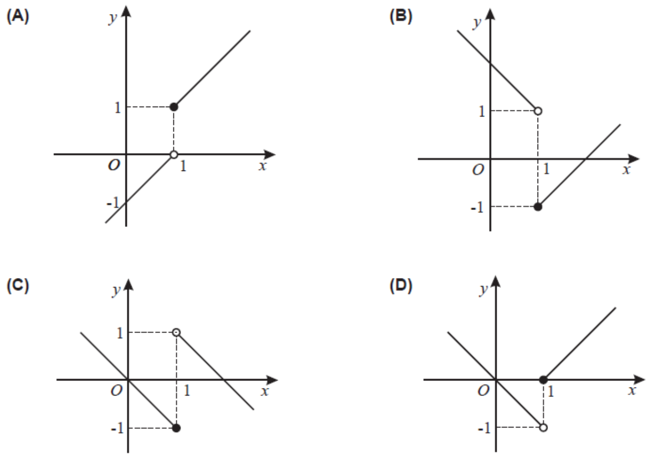


(Intermédio 1)

293. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} & \text{se } x<1\\[2ex] \ln x & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

Seja g uma outra função, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a função f × g é contínua no ponto 1. Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função g ?



(Intermédio 1)

294. Seja f a função, de domínio R, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} & \text{se } x\leq 4\\[2ex] \dfrac{\ln(3x-11)}{x-4} & \text{se } x>4\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue se existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

b) O gráfico da restrição da função f ao intervalo $]-\infty,4]$ tem uma assíntota horizontal. Determine uma equação dessa assíntota.

c) Considere, num referencial o.n. xOy, o triângulo [OPQ] tal que:

• o ponto P é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;

• o ponto Q é o ponto do gráfico da função f que tem abcissa positiva e ordenada igual à ordenada do ponto P

Determine um valor aproximado da área do triângulo [OPQ], recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• reproduzir, num referencial, o gráfico da função f para $x \in [0,10]$

• desenhar o triângulo [OPQ]

• indicar a abcissa do ponto Q arredondada às milésimas;

• apresentar a área do triângulo [OPQ] arredondada às centésimas.

<u>Nota</u> – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

(Intermédio 1)

297. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^a + a^2 \ln x$ (a é um número real maior do que 1), e seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a. Qual é o declive da reta r ?

(A) $a^{a-1} + a^2$ (B) $a^a + a^2$ (C) $a^{a-1} + a$ (D) $a^a + a$

(Intermédio 2)

299. Seja a um número real tal que $a > e$ (e – número de Neper ou número de Euler). Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = a\,x + \ln x$. Mostre que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]\frac{1}{a}, \frac{1}{e}[$

(Intermédio 2)

300. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x + f(x)}{3x} = 1$. Qual das equações seguintes pode definir uma assíntota do gráfico da função f ?

(A) $y = \frac{1}{3}x$ (B) $y = \frac{2}{3}x$ (C) y = x (D) y = 3x

(1.ª fase)

301. Considere, para um certo número real a superior a 1, as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = a^x$ e $g(x) = a^{-x}$. Considere as afirmações seguintes.

I) Os gráficos das funções f e g não se intersectam.

II)– As funções f e g são monótonas crescentes.

III) $f\,'(-1) - g\,'(1) = \dfrac{2\ln a}{a}$

Qual das opções seguintes é a correta?

(A) II e III são verdadeiras.

(B) I é falsa e III é verdadeira.

(C) I é verdadeira e III é falsa.

(D) II e III são falsas.

(1.ª fase)

302. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{e^{4x}-1} & \text{se} \quad x<0\\ \\ x\ln(x) & \text{se} \quad x>0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

b) Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0, e]$

Resolva o item c), recorrendo à calculadora gráfica.

c) Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$. Sabe-se que:

• A é o ponto de coordenadas (2, 0)
• B é o ponto de coordenadas (5, 0)
• P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g

Para cada posição do ponto P, considere o triângulo [ABP]. Determine as abcissas dos pontos P para os quais a área do triângulo [ABP] é 1. Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas.

(1.ª fase)

303. Na Figura 2 , está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3. Sabe-se que:

• -1 e 2 são os únicos zeros da função f
• g ´, a primeira derivada de uma certa função g, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $g'(x) = f(x) \times e^{-x}$
• $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) - 2] = 0$

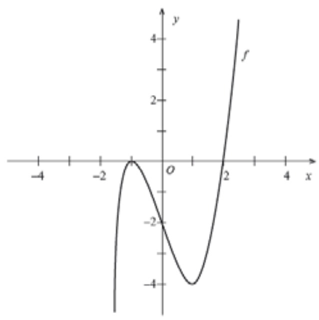
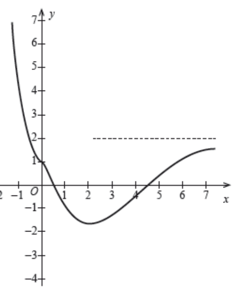
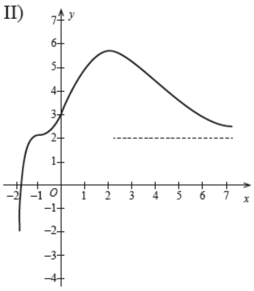
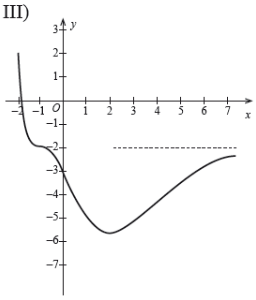


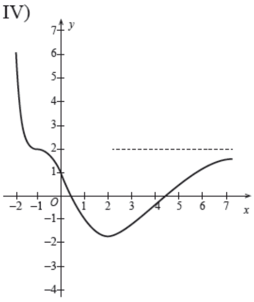
Figura 2

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função g

I)


II)


III)


IV)


Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, uma assíntota desse gráfico.

Elabore uma composição na qual:

• identifique a opção que pode representar a função g
• apresente as razões para rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões diferentes, uma por cada gráfico rejeitado.

(1.ª fase)

304. Considere, para um certo número real a positivo, uma função f , contínua, de domínio $[-a, a]$. Sabe-se que $f(-a) = f(a)$ e $f(a) > f(0)$. Mostre que a condição $f(x) = f(x + a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$.

(1.ª fase)

305. Sejam a e b dois números reais tais que $1 < a < b$ e $\log_a b = 3$. Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a(a^5 \times \sqrt[3]{b}) + a^{\log_a b}$?

(A) $6 + b$ (B) $8 + b$ (C) $6 + a^b$ (D) $8 + a^b$

(2.ª fase)

309. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g ´, de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por $g'(x) = \ln(e^x + 6e^{-x} + 4x)$. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(2.ª fase)

310. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[-1, 2]$, definida por $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$, o ponto A de coordenadas (2, 0) e um ponto P que se desloca ao longo do gráfico da função f. Existe uma posição do ponto P para a qual a área do triângulo [AOP] é mínima. Determine a área desse triângulo, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar o valor da área do triângulo [AOP] com arredondamento às centésimas.

(2.ª fase)

E44 Seja a um número real positivo. Considere o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}: \ln(e^{-x} - a) \leq 0\}$. Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto S ?
(A) $]-\ln(1 + a), -\ln a[$ (B) $[-\ln(1 + a), -\ln a[$
(C) $]-\infty \ln(1 + a)]$ (D) $[-\ln(1 + a), +\infty[$

(época especial)

E45 Considere, para um certo número real k positivo, a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{1-e^{2x}} & \text{se } x<0\\ \ln k & \text{se } x=0\\ \dfrac{x}{2}-\ln\left(\dfrac{6x}{x+1}\right) & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine k de modo que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

b) Mostre que $\ln(\frac{\sqrt{e}}{3})$ é um extremo relativo da função f no intervalo $]0, +\infty[$

(época especial)

E46 Considere duas funções g e h, de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que:
• a reta de equação y = 2x - 1 é assíntota do gráfico da função g
• a função h é definida por $h(x) = \frac{1-[g(x)]^2}{x^2}$.

Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal.

(época especial)

(*Testes intermédios e exames 2013/2014*)

312. Na Figura 1, está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1,e\}$. Tal como a figura sugere, as retas de equações y = 0, x = 1 e x = e são as assíntotas do gráfico da função h. Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim h(x_n) = +\infty$. Qual das expressões seguintes não pode ser termo geral da sucessão (x_n) ?

(A) $(1 + \frac{1}{n})^n$ (B) $(1 + \frac{1}{n})^3$

(C) $1 - \frac{1}{n}$ (D) $e + \frac{1}{n}$

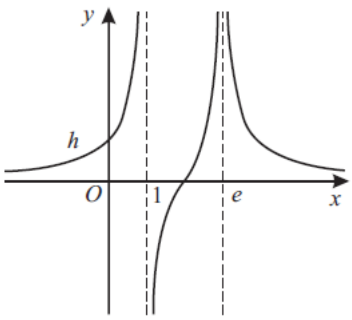


Figura 1

(Intermédio 2)

313. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. A sua derivada, f ‘, é definida por $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$. Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f ?
(A) Zero. (B) Um. (C) Dois. (D) Três.

(Intermédio 2)

314. Seja f a função, de domínio R, definida por

$$f(x)=\begin{cases}2x+1+e^{-x} & \text{se } x\leq 0\\ \dfrac{3x+\ln x}{x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Seja t a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1. Determine a equação reduzida da reta t

b) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico. Na sua resposta, deve:
• mostrar que existe uma única assíntota vertical e escrever uma equação dessa assíntota;
• mostrar que existe uma assíntota horizontal quando x →+∞ e escrever uma equação dessa assíntota;
• mostrar que não existe assíntota não vertical quando x→–∞

c) Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f , os pontos A e B, ambos pertencentes ao gráfico de f , e a reta AB. Sabe-se que:
• a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares;
os pontos A e B têm abcissas simétricas;
• a abcissa do ponto A pertence ao intervalo]0,1[

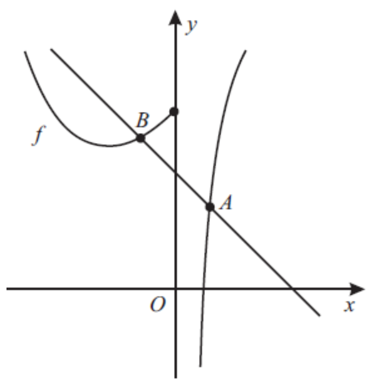


Figura 2

Seja a a abcissa do ponto A. Determine o valor de a, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
• equacionar o problema;
• reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na
calculadora, devidamente identificado(s);
• indicar o valor de a, com arredondamento às milésimas.

(Intermédio 2)

315. Numa certa escola, eclodiu uma epidemia de gripe que está a afetar muitos alunos. Admita que o número de alunos com gripe, t dias após as zero horas de segunda-feira da próxima semana, é dado aproximadamente por

$$f(t) = (4t+2)\,e^{3{,}75-t}, \quad \text{para } t \in [0, 6]$$

Como, por exemplo, f(1,5) ≈ 76, pode concluir-se que 76 alunos dessa escola estarão com gripe às 12 horas de terça-feira da próxima semana.

a) Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Estude a função f quanto à monotonia e conclua em que dia da próxima semana, e a que horas desse dia, será máximo o número de alunos com gripe.

b) Nessa escola, há 300 alunos. Às 18 horas de quinta-feira da próxima semana, vão ser escolhidos aleatoriamente 3 alunos, de entre os 300 alunos da escola, para responderem a um inquérito. Qual é a probabilidade de pelo menos um dos alunos escolhidos estar com gripe? Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

(Intermédio 2)

316. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Qual é o valor de $\lim \frac{2}{f(x_n)}$?

(A) $-\infty$ (B) $-e$ (C) 0 (D) $+\infty$

(1.ª fase)

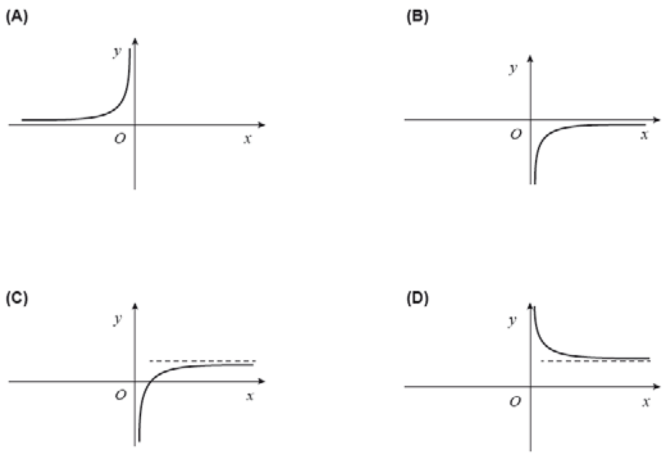
317. Considere, para um certo número real k, a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = k\,e^x + x$. O teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo]0,1[. A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k ?

(A) $\left]-e, -\frac{1}{e}\right[$ **(B)** $\left]-\frac{1}{e}, 0\right[$

(C) $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ **(D)** $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$

(1.ª fase)

318. Considere, para um certo número real a positivo, a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a + \ln\frac{a}{x}$. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ‘, primeira derivada da função f ?



(1.ª fase)

319. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x} & \text{se } x < 4 \\ \ln\left(2e^x - e^4\right) & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue se a função f é contínua em x = 4

b) O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$, de equação $y = x + b$, com $b \in \mathbb{R}$. Determine b

(1.ª fase)

320. Considere a função f, de domínio $]-e^2, +\infty[$, definida por $f(x) = -\ln(x + e^2)$. Na Figura 5, estão representados, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f e o triângulo [ABC]

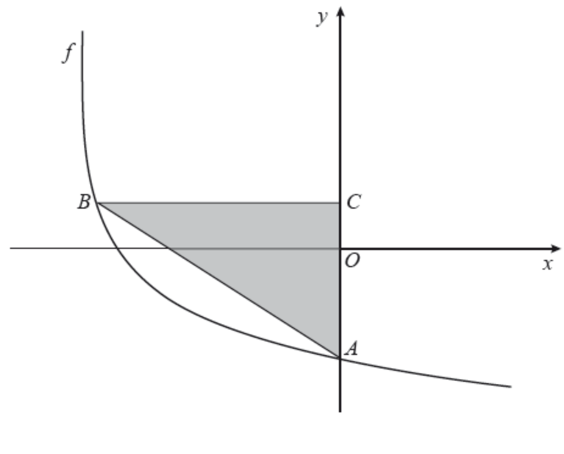


Figura 5

Sabe-se que:
• o ponto A tem coordenadas (0, -2)
• o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa negativa;
• o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B
• a área do triângulo [ABC] é igual a 8

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

– escrever uma expressão da área do triângulo [ABC] em função da abcissa do ponto B
– equacionar o problema;
– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
– indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

(1.ª fase)

321. Seja g uma função, de domínio $]-\infty, e[$, definida por $g(x) = \ln(e - x)$. Considere a sucessão estritamente crescente de termo geral $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Qual é o valor de $\lim g(x_n)$?

(A) $+\infty$ (B) e (C) 1 (D) $-\infty$

(2.ª fase)

324. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio [0,10], definida por

$$f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$$

e dois pontos A e B. Sabe-se que:
• o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;
• o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa positiva;
• a reta AB tem declive -2

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
— equacionar o problema;
— reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
— indicar o valor da abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

(2.ª fase)

325. Na Figura 6, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 3. Sabe-se que:
• -2 e 3 são os únicos zeros da função f
• a função f tem um extremo relativo em $x = -2$
• h', primeira derivada de uma função h, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $h'(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$
• $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 3$

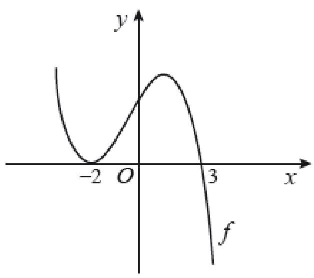


Figura 6

Considere as afirmações seguintes.
I) A função h tem dois extremos relativos.
II) $h''(-2) = 0$
III) $y + 3 = 0$ é uma equação da assíntota do gráfico da função h quando x tende para $+\infty$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

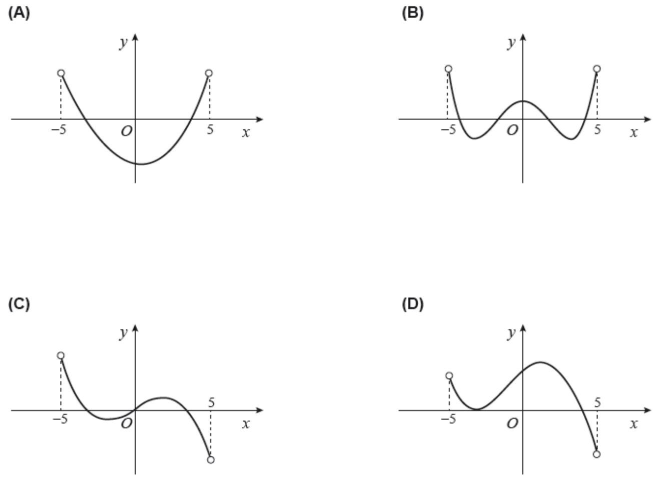
(2.ª fase)

$\boxed{\text{E47}}$ Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $f(x) = \frac{x-1}{e^x - 1}$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = -\frac{1}{n}$. Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) $-\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

(época especial)

$\boxed{\text{E48}}$ Seja f uma função de domínio]-5, 5[. Sabe-se que o gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão. Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função f ´´ , segunda derivada da função f ?



(época especial)

$\boxed{\text{E49}}$ Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. A reta de equação $y = 2x - 5$ é assíntota do gráfico da função f. Qual é o valor de $\lim_{x \to +\infty} \frac{6x-1}{f(x)}$?

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) $+\infty$

(época especial)

$\boxed{\text{E50}}$ Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$

a) Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

b) Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, os pontos A e B, e a reta r de equação $y = mx$, com $m < 0$. Sabe-se que:
• os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g
• a abcissa do ponto A é o zero da função g
• o ponto B é o ponto de intersecção da reta r com o gráfico da função g
• a área do triângulo [OAB] é igual a 1

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
— equacionar o problema;
— reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;

— indicar a abcissa do ponto A e a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

(época especial)

$\boxed{\text{E51}}$ Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

- a reta de equação x = 0 é assíntota do gráfico da função f
- $f(-3)\times f(5)< 0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe e é positivo, para qualquer número real x não nulo;
- $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)-2x)=0$

Considere as afirmações seguintes.

I) O teorema de Bolzano permite garantir, no intervalo [-3,5], a existência de, pelo menos, um zero da função f

II) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $-\infty$

III) A função f é crescente em $]0,+\infty[$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

(época especial)

(*Exames Nacionais 2015*)

327. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$. Considere a sucessão de termo geral $u_n=n^2$. Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) 0 (B) 1 (C) *e* (D) $+\infty$

(1.ª fase)

328. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso. Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada. Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$d(t)=10+(5-t)e^{-0,05t}\quad(t\geq 0)$

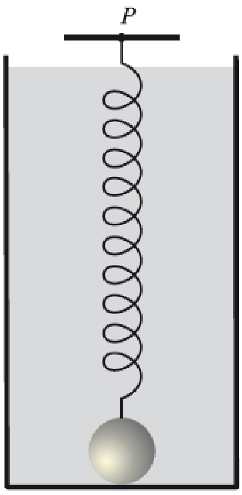


Figura 3

a) Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é 16cm. Determine o volume da esfera. Apresente o resultado em cm3, arredondado às centésimas.

b) Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(1.ª fase)

329. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} & \text{se } x<\dfrac{1}{2}\\[2ex] (x+1)\ln x & \text{se } x\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$. Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

c) Mostre que a equação f (x) = 3 é possível em $]1, e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas. Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação f(x) = 3 tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, e[$
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

(1.ª fase)

332. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}1+xe^x & \text{se } x\leq 3\\ \ln(x-3)-\ln(x) & \text{se } x>3\end{cases}$$

Resolva os itens a), b) e c), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

b) Resolva, em $]-\infty, 3]$, a condição $f(x)-2x>1$. Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4

(2.ª fase)

333. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que:

- f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio;
- $f'(0)>0$
- $f''(x)<0$, para qualquer $x\in\,]-\infty, 0[$

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função f

Gráfico A

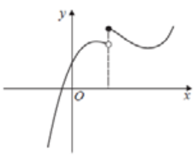


Gráfico B

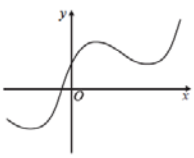
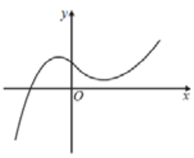


Gráfico C



Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função f

(2.ª fase)

E52 Seja a um número real. Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{a \ln x}$. Considere, num referencial o.n. xOy, o ponto P(2,8). Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f
Qual é o valor de a ?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(época especial)

E55 Admita que, ao longo dos séculos XIX, XX e XXI, o número de habitantes, N, em milhões, de uma certa região do globo é dado aproximadamente por

$$N = \frac{200}{1+50e^{-0,25t}} \quad (t \geq 0)$$

em que t é o tempo medido em décadas e em que o instante t = 0 corresponde ao final do ano 1800.

a) Determine a taxa média de variação da função N no intervalo [10, 20]. Apresente o resultado arredondado às unidades. Interprete o resultado, no contexto da situação descrita.

b) Mostre que

$$t = \ln\left(\frac{50N}{200-N}\right)^4$$

(época especial)

E56 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por

$$f(x) = x^2\, e^{1-x}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal.

b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

c) Considere, num referencial o.n. xOy, três pontos, A, B e C, tais que:
- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f
- a abcissa do ponto B é maior do que a abcissa do ponto A
- os pontos A e B têm a mesma ordenada, a qual é igual a 1,2
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do quadrilátero [OABC], sendo O a origem do referencial.
Na sua resposta:
— reproduza, num referencial, o gráfico da função f no intervalo [0, 5]
— apresente o desenho do quadrilátero [OABC]
— indique as abcissas dos pontos A e B arredondadas às milésimas;
— apresente a área do quadrilátero arredondada às centésimas.

(época especial)

(*Exames Nacionais 2016*)

335. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^-$. Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)+e^x-x}{x} = 1$
- o gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?
(A) −2 (B) −1 (C) 1 (D) 2

(1.ª fase)

336. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f(x)=e^x(x^2+x+1)$. Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Sejam p e q dois números reais tais que

$$p = \lim_{x\to-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \quad \text{e} \quad q = -\frac{1}{p}$$

Determine o valor de q e interprete geometricamente esse valor.

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. Na sua resposta, apresente:
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

(1.ª fase)

337. Considere a função f, de domínio $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

b) Seja a um número real maior do que 1. Mostre que a reta secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e $-a$ passa na origem do referencial.

(1.ª fase)

340. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro. Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato. Nesse contrato, a prestação mensal p, em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por

$$p=\frac{600x}{1-e^{-nx}} \quad (x>0)$$

em que n é o número de meses em que o empréstimo será pago e x é a taxa de juro mensal. Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos. Na resolução do item a), pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria 0,3% (x=0,003). Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros? Apresente o resultado arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

b) Determine $\lim\limits_{x\to 0}\frac{600x}{1-e^{-nx}}$, em função de n, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

(2.ª fase)

341. Seja g uma função contínua, de domínio ℝ, tal que:

- para todo o número real x, (gog)(x)=x
- para um certo número real *a*, tem-se g(*a*)>*a*+1

Mostre que a equação g(x)=x+1 é possível no intervalo]a,g(a)[

(2.ª fase)

E57 Sejam *a* e *b* dois números reais superiores a 1, tais que $a=b^3$. Qual dos valores seguintes é igual a $\log_a b+\log_b a$?

(A) $\frac{4}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{10}{3}$ (D) 3

(época especial)

E58 Seja f a função, de domínio [−3,3], cujo gráfico está representado na Figura 1. Tal como a figura sugere, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

g(x)=ln x. Quais são as soluções da equação (fog)(x)=0?

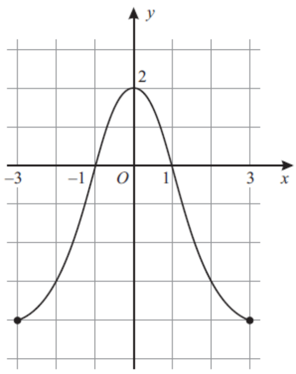


Figura 1

(A) $\frac{1}{e}\,;\,e^2$ **(B)** $e\,;\,e^2$

(C) $1\,;\,e$ **(D)** $\frac{1}{e}\,;\,e$

(época especial)

E59 O movimento de uma nave espacial é um movimento de propulsão provocado pela libertação de gases resultantes da queima e explosão de combustível. Um certo tipo de nave tem por função o transporte de carga destinada ao abastecimento de uma estação espacial. Designemos por x a massa, em milhares de toneladas, da carga transportada por uma nave desse tipo e por V a velocidade, em quilómetro por segundo, que essa mesma nave atinge no instante em que termina a queima do combustível. Considere que V é dada, em função de x, por $V(x)=3\ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) \quad (x\geq 0)$

Nos itens a) e b), a calculadora só pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

a) Admita que uma nave do tipo referido transporta uma carga de 25 mil toneladas. Determine quanto tempo demora essa nave a percorrer 200 quilómetros a partir do instante em que termina a queima do combustível, sabendo que a velocidade da nave se mantém constante a partir desse instante. Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

b) Determine qual deve ser a massa da carga transportada por uma dessas naves, de modo que atinja, após a queima da totalidade do combustível, uma velocidade de 3 quilómetros por segundo. Apresente o resultado em milhares de toneladas, arredondado às unidades.

(época especial)

E60 Seja k um número real positivo. Considere a função g, de domínio]−k,+∞[, definida por g(x)=ln(x+k). Mostre que:

se $g(0)\times g(k)<0$, então $k\in\left]\frac{1}{2},1\right[$

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

(época especial)

Soluções: 1. B 2. A 3.C 4. D 5. B 6. B 7. D 8. B; D 9. 10; 25m10d; 4,54c/m; 6,99 e 1,30 10. C 11. A 12. -2; 901; 0,01log*e* 13. C 14. C 15. B 16. 0,5 e 4; 7/4; 5,7
17. C 18. D 19. 70^0; y=20; 20^0; verd.; 2'38'' 20. B 21. C 22. C 23. C 24. D 25. C 26. A
27. y=0; 28 e 0,074 28. D 29. D 30. D 31. 22,2m; 10m 32. D 33. A 34. D 35. D 36. x=32
37. C 38. D 39. A 40. y=x-1; sim; p.inf. p/ x=1 41. D 42. A 43. A 44. 9,1 45. A 46. C 47. D
48. D 49. 12h20min 50. B 51. D 52. C 53. B 55. B 56. D 57. A 58. C 59. 3,2 km/s
60. C 61. D 62. C 63. A 64. Sim 65. A 66. C 67. C 68. A 69. 1,5 70. D 71. A
72. B 73. y=x; 2 p.i. em x=-4 e x=-1 75. B 76. A 77. B 78. B 79. mín em x=2; x=2; x=1 e y=0
80. C 81. B 82. D 83. 76; 5,8 84. B 85. C 86. D 87. f cresc. e y=5 ass. hor. 88. C 89. D
90. A 91. C 92. x=0; min para x=2/3; 2,3 93. D 94. A 95. B 96. B 97. 33; 0,38 99. C 100. D
101. A 102. B 103.1,1; 22h38m 105. B 106. B 107. C 108. B 109. 0,05; 2h19m; Carlos,Ana 110.C 111. A
112. B 113. 100 115. C 116. B 117. A 118. $\sqrt[3]{2}$ 120. A 121. D 122. B 123. D 124. 0,8; 1H43' 126. C
127. D 128. B 129. A 130. 5,4; dec [0,5] e cresc [5,10] 131. 1,2 132. C 133. B 134. A 135. 9,8; 1837
136 B 137. C 138. B 139. C 140. 1 141. C 142. B 143. A 144. *y*=*x*+*e*–2; *y*=0; 0,15 e 2,27 146. D 147. A
148. C 149. 0; 7,58 150. - ½ ; 1/e 151. D 152. D 153. C 154. 7,97; 3,07 155. B
156. A 157. B 158.A 159. D 160. 3,42 e 4,96 161. x=0 e y=0 162. d 164. A 165. C 166. C 167. C 168. 1/*e*
170. 3,37; 0,63 171. A 172. A 173. C 174. x=1; 10/3 176. B 177. B 178. C 179. B 180. é contínua
181. 4×10^{-8} e 0,5 182. 1,2 184. D 185. D 186. C 187. B 188. 2,57 189. 0,03; *I* decresc.; assimp. *y*=0
190. A 191. C 192. D 193. C 194. 1,36 e 4,61 195. 3 e 2 196. ($\sqrt{e}$,0) e (-$\sqrt{e}$,0); *f* não tem extremos
197. C 198. 5h,dia3 199. C 200. D 201. A 202. 19; 16 203. 2/3; –1,23 204. D 205. B 206. C 207. 1,2
208. 4 209. 10 e 2000; 529 ou 530 210. A 211. B 212. B 213. 0, 1 e 2 214. 34h39min 215. A 216. D
217. A 218.]1,5]∪[9,13[219. 3,28 e -0,12; 0,5 220. *x*=1 e *y*=3; 5,08 222. A 223. B 224. y=4x+1; -3 225. É; 0,4
226. C 228. (0,3;0,6) 229. [5/3,2[230. 0; 12h20' 231. B 232. C 233. D 234. É cont; y=0 235. 2,47; 6,05
236. D 237. C 238. A 239. B 240. Não; y=x+1; 0,72 e 2,91 241. 3; 10,2 242. D 243. C 244. A 245. y=3; 3; -1/2 e 1/2
246. A 247. C 248. A 249. 2h20' 250. 0,57 251. –2 252. A 253. D 254. C 255. Não há; para x=5; 0,4
256. y=–x+1/e 257. C 258.]0,3] 259. 1963; k=–ln(3–p) 260. D 261. C 262. C 263. B 264. D 265. 13h20
266. (5e/2,0);(-1,12;-1,41) e (1,22;1,80) 267. III 268. D 269. 29; 8 270. Não há; crescente 271. A 272. B 273. D
274.]8,9]; 2000 275. 40; 0,995 276. 2 277. B 278. D 279. A 280. 4,14; 3 281. é 282. B 283. A 284. C
285. 2,2 286. y=3x+1; y=$2e^2x+e^2$ 287. A 288. D 289. B 290. 9,46 291. D 292. C 293. A
294. 3; y=-3; 2,95 295. 7,5; 23 296. B 297. D 298. D 300. D 301. B 302. Não tem; min=–1 e max=1; 0,31 e 0,61 e 1,56 e 2,52
303. IV 305. A 306. D 307. B 308. A 309. ln(–2+$\sqrt{10}$) 310. 2,92 311. A 312. B 313. B
314. y=x+2; x=0 e y=3; 0,413 315. 12h de 2.ªf; 0,16 316. C 317. B 318. B 319. Não; ln2 320. -6,71
321. D 322. A 323. x=0 e y=x-1; -e 324. 9,35 325. FVF 326. B 327. A 328. 4,19; 25 329. Não tem; (1,0); 2,41 330. D 331. A 332. y=1 e y=0;]-∞,0[∪]ln2,3]; y=3/4 x-3-ln4 334. B 335. D 336. –*e*; –2 e –1
337. x=–1 e x=1 338. B 339. A 340. 26; 600/n

E1. C E2. D E3. A E4. B E5. 29,7; –15 E7. B E8. D E9. A
E10. x=1 e y=0; decrescente; ±0,37 E11. A E12. D E13. y=-e^2/4 *x*+e^2; 2,6 E14. 0 E15. 73 e 25; 29'28'' E16. D
E17. B E18. 4 E19. y=1 E20. 31; 7×10^{11} E21. C E22. B E23. A E25. cont. esq.;]–∞,–4[E26. B E27.D
E28. A E29. $6,26\times10^{19}$ E30. 0; y=3 E31. 2,47 E32. C E33. D E34. 0,18 E35. -2 E36. A E37. D
E38. C E39. 20 E40. I E41. 0,48 E42. D E43. A E44. B E45. $e^{-3/2}$ E47. D E48. A
E49. C E50. $e^{-1/2}$; 5,41 E51. FFV E52. C E53. C E54. A E55. 11 E56. y=0; 0 e 2; 2,92 E57. C E58. D
E59. 50; 80

O professor: Roberto Oliveira