326. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real k, igual a $\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right)$?

(A) $\frac{k}{2}$ (B) k – 2 (C) $\frac{k}{9}$ (D) k – 9

(1.ª fase)

327. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Considere a sucessão de termo geral $u_n = n^2$.
Qual é o valor de lim f (u_n)?
(A) 0 (B) 1 (C) *e* (D) +∞

(1.ª fase)

328. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso. Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada. Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por
$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0{,}05t}$ $(t \geq 0)$

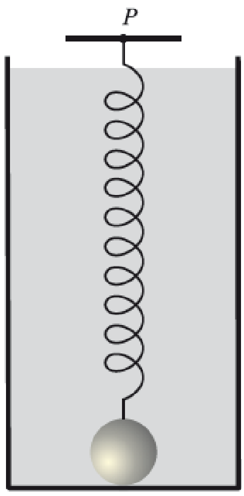


Figura 3

a) Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é 16cm. Determine o volume da esfera. Apresente o resultado em cm3, arredondado às centésimas.

b) Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(1.ª fase)

329. Seja f a função, de domínio ℝ, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \dfrac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & \text{se } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Na sua resposta, apresente:
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

c) Mostre que a equação f (x) = 3 é possível em]1, *e*[e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas. Na sua resposta:
- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação f(x) = 3 tem, pelo menos, uma solução no intervalo]1, *e*[
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

(1.ª fase)

330. Para certos valores de *a* e de b (*a*>1 e b>1), tem-se $\log_b a = \frac{1}{3}$. Qual é, para esses valores de *a* e de b, o valor de $\log_a (a^2 b)$?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) 2 (D) 5

(2.ª fase)

331. Para um certo número real k, é contínua em ℝ a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 + e^{x+k} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{2x + \ln(x+1)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?
(A) 0 (B) 1 (C) ln2 (D) ln 3

(2.ª fase)

332. Seja f a função, de domínio ℝ, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-3) - \ln(x) & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Resolva os itens a), b) e c), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

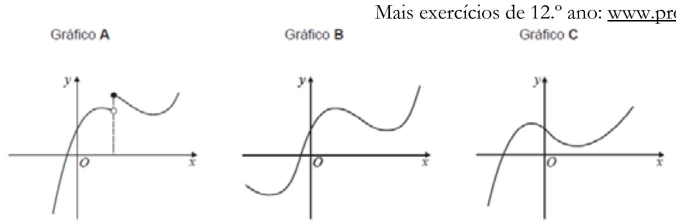
b) Resolva, em]−∞, 3], a condição f (x) − 2x >1. Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4

(2.ª fase)

333. Seja f :ℝ → ℝ uma função tal que:
- f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio;
- f ‘(0)>0
- f ’’(x)<0, para qualquer x ∈]−∞, 0[

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função f



Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função f

(2.ª fase)

E52 Seja a um número real. Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{a \ln x}$. Considere, num referencial o.n. xOy, o ponto P(2,8). Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f
Qual é o valor de a ?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(época especial)

E53 Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f

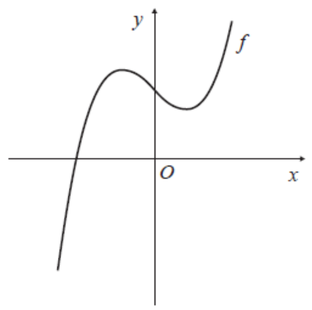
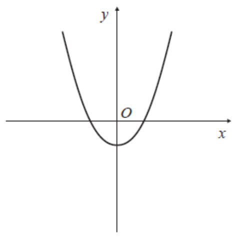


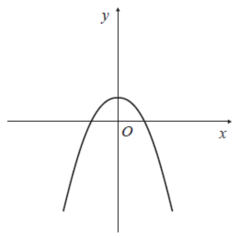
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f '', segunda derivada da função f ?

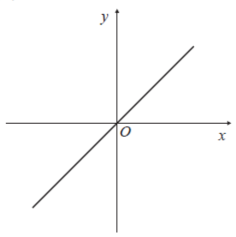
(A)



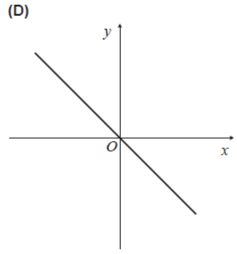
(B)



(C)



(D)



(época especial)

E54 Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que f '(2) = 6 (f ' designa a derivada de f). Qual é o valor de

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x} \ ?$$

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

(época especial)

E55 Admita que, ao longo dos séculos XIX, XX e XXI, o número de habitantes, N, em milhões, de uma certa região do globo é dado aproximadamente por

$$N = \frac{200}{1 + 50e^{-0,25t}} \quad (t \geq 0)$$

em que t é o tempo medido em décadas e em que o instante t = 0 corresponde ao final do ano 1800.

a) Determine a taxa média de variação da função N no intervalo [10, 20]. Apresente o resultado arredondado às unidades. Interprete o resultado, no contexto da situação descrita.

b) Mostre que

$$t = \ln\left(\frac{50N}{200 - N}\right)^4$$

(época especial)

E56 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por

$$f(x) = x^2 e^{1-x}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal.

b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

c) Considere, num referencial o.n. xOy, três pontos, A, B e C, tais que:
• os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f
• a abcissa do ponto B é maior do que a abcissa do ponto A
• os pontos A e B têm a mesma ordenada, a qual é igual a 1,2
• o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do quadrilátero [OABC], sendo O a origem do referencial.
Na sua resposta:
— reproduza, num referencial, o gráfico da função f no intervalo [0, 5]
— apresente o desenho do quadrilátero [OABC]
— indique as abcissas dos pontos A e B arredondadas às milésimas;
— apresente a área do quadrilátero arredondada às centésimas.

(época especial)

334. Seja a um número real diferente de 0. Qual é o valor de $\lim_{x \to a} \frac{ae^{x-a} - a}{x^2 - a^2}$?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

(1.ª fase)

335. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^-$. Sabe-se que:

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x) + e^x - x}{x} = 1$
- o gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?
(A) −2 (B) −1 (C) 1 (D) 2

(1.ª fase)

336. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f(x)=e^x(x^2+x+1)$. Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Sejam p e q dois números reais tais que

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \quad \text{e} \quad q = -\frac{1}{p}$$

Determine o valor de q e interprete geometricamente esse valor.

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. Na sua resposta, apresente:
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

(1.ª fase)

337. Considere a função f, de domínio $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

b) Seja a um número real maior do que 1. Mostre que a reta secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e $-a$ passa na origem do referencial.

(1.ª fase)

338. Para certos valores de a e de b ($a>1$ e $b>1$), tem-se $\log_a(ab^3)=5$. Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a$?

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

(2.ª fase)

339. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\ln(x)$. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n}{e^n}$
Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?
(A) $-\infty$ (B) 0 (C) e (D) $+\infty$

(2.ª fase)

340. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro. Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato. Nesse contrato, a prestação mensal p, em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por

$$p = \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \quad (x > 0)$$

em que n é o número de meses em que o empréstimo será pago e x é a taxa de juro mensal. Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos. Na resolução do item a), pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria 0,3% (x=0,003). Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros? Apresente o resultado arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

b) Determine $\lim_{x \to 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}}$, em função de n, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

(2.ª fase)

341. Seja g uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

- para todo o número real x, $(g \circ g)(x)=x$
- para um certo número real a, tem-se $g(a)>a+1$

Mostre que a equação $g(x)=x+1$ é possível no intervalo $]a,g(a)[$

(2.ª fase)

E57 Sejam a e b dois números reais superiores a 1, tais que $a=b^3$. Qual dos valores seguintes é igual a $\log_a b + \log_b a$?

(A) $\frac{4}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{10}{3}$ (D) 3

(época especial)

E58 Seja f a função, de domínio $[-3,3]$, cujo gráfico está representado na Figura 1. Tal como a figura sugere, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\ln x$. Quais são as soluções da equação $(f \circ g)(x)=0$?

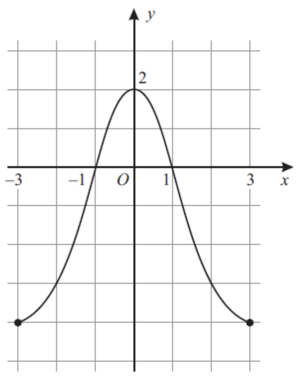


Figura 1

(A) $\frac{1}{e}\,;\,e^2$ (B) $e\,;\,e^2$

(C) $1\,;\,e$ (D) $\frac{1}{e}\,;\,e$

(época especial)

$\boxed{\text{E59}}$ O movimento de uma nave espacial é um movimento de propulsão provocado pela libertação de gases resultantes da queima e explosão de combustível. Um certo tipo de nave tem por função o transporte de carga destinada ao abastecimento de uma estação espacial. Designemos por x a massa, em milhares de toneladas, da carga transportada por uma nave desse tipo e por V a velocidade, em quilómetro por segundo, que essa mesma nave atinge no instante em que termina a queima do combustível. Considere que V é dada, em função de x, por $V(x) = 3\ln\left(\dfrac{x+300}{x+60}\right) \quad (x \geq 0)$

Nos itens a) e b), a calculadora só pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

a) Admita que uma nave do tipo referido transporta uma carga de 25 mil toneladas. Determine quanto tempo demora essa nave a percorrer 200 quilómetros a partir do instante em que termina a queima do combustível, sabendo que a velocidade da nave se mantém constante a partir desse instante. Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

b) Determine qual deve ser a massa da carga transportada por uma dessas naves, de modo que atinja, após a queima da totalidade do combustível, uma velocidade de 3 quilómetros por segundo. Apresente o resultado em milhares de toneladas, arredondado às unidades.

(época especial)

$\boxed{\text{E60}}$ Seja k um número real positivo. Considere a função g, de domínio $]-k,+\infty[$, definida por $g(x)=\ln(x+k)$. Mostre que:

se $g(0)\times g(k)<0$, então $k\in\left]\frac{1}{2},1\right[$

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

(época especial)

<u>Soluções</u>: 1. B 2. A 3.C 4. D 5. B 6. B 7. D 8. B; D 9. 10; 25m10d; 4,54c/m; 6,99 e 1,30 10. C 11. A 12. -2; 901; 0,01log*e* 13. C 14. C 15. B 16. 0,5 e 4; 7/4; 5,7
17. C 18. D 19. 70^0; y=20; 20^0; verd.; 2’38’’ 20. B 21. C 22. C 23. C 24. D 25. C 26. A
27. y=0; 28 e 0,074 28. D 29. D 30. D 31. 22,2m; 10m 32. D 33. A 34. D 35. D 36. x=32
37. C 38. D 39. A 40. y=x-1; sim; p.inf. p/ x=1 41. D 42. A 43. A 44. 9,1 45. A 46. C 47. D
48. D 49. 12h20min 50. B 51. D 52. C 53. B 55. B 56. D 57. A 58. C 59. 3,2 km/s
60. C 61. D 62. C 63. A 64. Sim 65. A 66. C 67. C 68. A 69. 1,5 70. D 71. A
72. B 73. y=x; 2 p.i. em x=-4 e x=-1 75. B 76. A 77. B 78. B 79. mín em x=2; x=2; x=1 e y=0
80. C 81. B 82. D 83. 76; 5,8 84. B 85. C 86. D 87. f cresc. e y=5 ass. hor. 88. C 89. D
90. A 91. C 92. x=0; min para x=2/3; 2,3 93. D 94. A 95. B 96. B 97. 33; 0,38 99. C 100. D
101. A 102. B 103.1,1; 22h38m 105. B 106. B 107. C 108. B 109. 0,05; 2h19m; Carlos,Ana 110.C 111. A
112. B 113. 100 115. C 116. B 117. A 118. $\sqrt[3]{2}$ 120. A 121. D 122. B 123. D 124. 0,8; 1H43’ 126. C
127. D 128. B 129. A 130. 5,4; dec [0,5] e cresc [5,10] 131. 1,2 132. C 133. B 134. A 135. 9,8; 1837
136 B 137. C 138. B 139. C 140. 1 141. C 142. B 143. A 144. *y*=*x*+*e*–2; *y*=0; 0,15 e 2,27 146. D 147. A
148. C 149. 0; 7,58 150. - ½ ; 1/e 151. D 152. D 153. C 154. 7,97; 3,07 155. B
156. A 157. B 158.A 159. D 160. 3,42 e 4,96 161. x=0 e y=0 162. d 164. A 165. C 166. C 167. C 168. 1/*e*
170. 3,37; 0,63 171. A 172. A 173. C 174. x=1; 10/3 176. B 177. B 178. C 179. B 180. é contínua
181. 4×10^{-8} e 0,5 182. 1,2 184. D 185. D 186. C 187. B 188. 2,57 189. 0,03; *I* decresc.; assimp. *y*=0
190. A 191. C 192. D 193. C 194. 1,36 e 4,61 195. 3 e 2 196. ($\sqrt{e}$,0) e (-$\sqrt{e}$,0); *f* não tem extremos
197. C 198. 5h,dia3 199. C 200. D 201. A 202. 19; 16 203. 2/3; –1,23 204. D 205. B 206. C 207. 1,2
208. 4 209. 10 e 2000; 529 ou 530 210. A 211. B 212. B 213. 0, 1 e 2 214. 34h39min 215. A 216. D
217. A 218.]1,5]∪[9,13[219. 3,28 e -0,12; 0,5 220. *x*=1 e *y*=3; 5,08 222. A 223. B 224. y=4x+1; -3 225. É; 0,4
226. C 228. (0,3;0,6) 229. [5/3,2[230. 0; 12h20’ 231. B 232. C 233. D 234. É cont; y=0 235. 2,47; 6,05
236. D 237. C 238. A 239. B 240. Não; y=x+1; 0,72 e 2,91 241. 3; 10,2 242. D 243. C 244. A 245. y=3; 3; -1/2 e 1/2
246. A 247. C 248. A 249. 2h20’ 250. 0,57 251. –2 252. A 253. D 254. C 255. Não há; para x=5; 0,4
256. y=–x+1/e 257. C 258.]0,3] 259. 1963; k=–ln(3–p) 260. D 261. C 262. C 263. B 264. D 265. 13h20
266. (5e/2,0);(-1,12;-1,41) e (1,22;1,80) 267. III 268. D 269. 29; 8 270. Não há; crescente 271. A 272. B 273. D
274.]8,9]; 2000 275. 40; 0,995 276. 2 277. B 278. D 279. A 280. 4,14; 3 281. é 282. B 283. A 284. C
285. 2,2 286. y=3x+1; y=2e^{2}x+e^2 287. A 288. D 289. B 290. 9,46 291. D 292. C 293. A
294. 3; y=-3; 2,95 295. 7,5; 23 296. B 297. D 298. D 300. D 301. B 302. Não tem; min=–1 e max=1; 0,31 e 0,61 e 1,56 e 2,52
303. IV 305. A 306. D 307. B 308. A 309. ln(–2+$\sqrt{10}$) 310. 2,92 311. A 312. B 313. B
314. y=x+2; x=0 e y=3; 0,413 315. 12h de 2.ªf; 0,16 316. C 317. B 318. B 319. Não; ln2 320. -6,71
321. D 322. A 323. x=0 e y=x-1; -e 324. 9,35 325. FVF 326. B 327. A 328. 4,19; 25 329. Não tem; (1,0); 2,41 330. D 331. A 332. y=1 e y=0;]-∞,0[∪]ln2,3]; y=3/4 x-3-ln4 334. B 335. D 336. –*e*; –2 e –1
337. x=–1 e x=1 338. B 339. A 340. 26; 600/n

E1. C E2. D E3. A E4. B E5. 29,7; –15 E7. B E8. D E9. A
E10. x=1 e y=0; decrescente; ±0,37 E11. A E12. D E13. y=-e^2/4 *x*+e^2; 2,6 E14. 0 E15. 73 e 25; 29’28’’ E16. D
E17. B E18. 4 E19. y=1 E20. 31; 7×10^{11} E21. C E22. B E23. A E25. cont. esq.;]–∞,–4[E26. B E27.D
E28. A E29. $6{,}26\times10^{19}$ E30. 0; y=3 E31. 2,47 E32. C E33. D E34. 0,18 E35. -2 E36. A E37. D
E38. C E39. 20 E40. I E41. 0,48 E42. D E43. A E44. B E45. e$^{-3/2}$ E47. D E48. A
E49. C E50. e$^{-1/2}$; 5,41 E51. FFV E52. C E53. C E54. A E55. 11 E56. y=0; 0 e 2; 2,92 E57. C E58. D
E59. 50; 80

O professor: Roberto Oliveira