(*Testes intermédios e exames 2010/2011*)

257. Na Figura 1, está parte da representação gráfica da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_9 (x)$

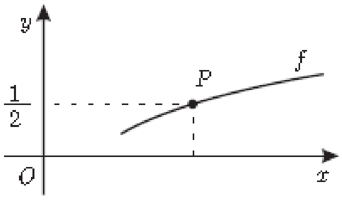


Figura 1

P é o ponto do gráfico de f que tem ordenada $\frac{1}{2}$

Qual é a abcissa do ponto P ?

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{9}{2}$

(Intermédio 1)

258. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$\log_3 (7x+6) \geq 2 + \log_3 (x)$

Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

(Intermédio 1)

259. Na década de sessenta do século passado, uma doença infecciosa atacou a população de algumas regiões do planeta.

Admita que, ao longo dessa década, e em qualquer uma das regiões afectadas, o número, em milhares, de pessoas que estavam infectadas com a doença, t anos após o início de 1960, é dado, aproximadamente, por

$I(t) = \dfrac{3e^{kt}}{1+pe^{kt}}$ em que k e p são parâmetros reais.

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar cálculos numéricos.

a) Admita que, para uma certa região, $k = \frac{1}{2}$ e $p = 1$.

Determine o ano em que o número de pessoas que estavam infectadas, nessa região, atingiu 2500.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) Numa outra região, constatou-se que havia um milhar de pessoas que estavam infectadas no início de 1961. Qual é, para este caso, a relação entre k e p ? Apresente a sua resposta na forma $k = -\ln(A + Bp)$, em que A e B são números reais.

(Intermédio 1)

260. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo $[-1,4]$. Tem-se $f(-1)=3$ e $f(4)=9$.

Em qual das opções seguintes está definida uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $]-1,4[$?

(A) $g(x)= 2x + f(x)$ (B) $g(x)= 2x - f(x)$

(C) $g(x)= x^2 + f(x)$ (D) $g(x)= x^2 - f(x)$

(Intermédio 2)

261. Na Figura 1, está o gráfico de uma função f cujo domínio é o intervalo $]1,3[$. A função f tem primeira derivada e segunda derivada finitas em todos os pontos do seu domínio. Seja $x \in]1,3[$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

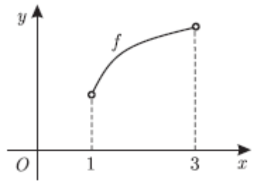


Figura 1

(A) $f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$ (B) $f'(x) < 0 \wedge f''(x) > 0$

(C) $f'(x) > 0 \wedge f''(x) < 0$ (D) $f'(x) < 0 \wedge f''(x) < 0$

(Intermédio 2)

262. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função g , de domínio $]-3, +\infty[$. A recta de equação $y = 2x - 4$ é assimptota do gráfico de g. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

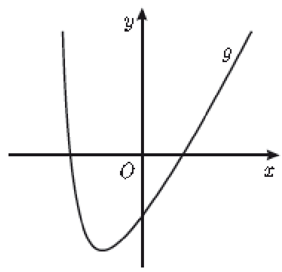


Figura 1

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - 2x - 4) = 0$

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{g(x)} = 2$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - 2x + 4) = 0$

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - 2x) = 0$

(1ª fase)

263. Seja f uma função de domínio $[0,+\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 9 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{1-e^x}{x} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f ?

(A) $]0, 1[$ (B) $]1, 4[$ (C) $]4, 6[$ (D) $]6, 7[$

(1ª fase)

264. Na Figura 2, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3, de domínio $\mathbb{R}$

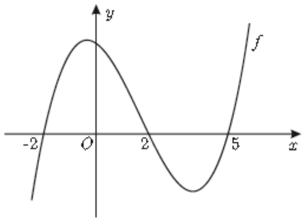


Figura 2

Sabe-se que:
• -2, 2 e 5 são zeros de f
• f' representa a função derivada de f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f'(0) \times f'(6) = 0$ (B) $f'(-3) \times f'(6) < 0$

(C) $f'(-3) \times f'(0) > 0$ (D) $f'(0) \times f'(6) < 0$

(1ª fase)

265. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, *t* horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por

$T(t) = 15 + 0,1t^2 e^{-0,15t}$ com $t \in [0,20]$. Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos. Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

(1ª fase)

266. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{2+\ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

a) O gráfico de f admite uma assimptota horizontal. Seja P o ponto de intersecção dessa assimptota com a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa *e*. Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

b) Existem dois pontos no gráfico de f cujas ordenadas são o cubo das abcissas. Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• assinalar esses pontos;
• indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas.

(1ª fase)

267. Na Figura 6, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função g. Sabe-se que:
• g é uma função contínua em $\mathbb{R}$
• g não tem zeros
• a segunda derivada, f ′′, de uma certa função f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x) = g(x) \times (x^2 - 5x + 4)$

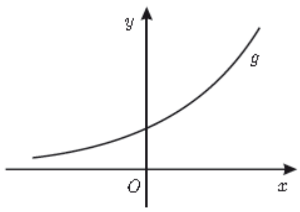
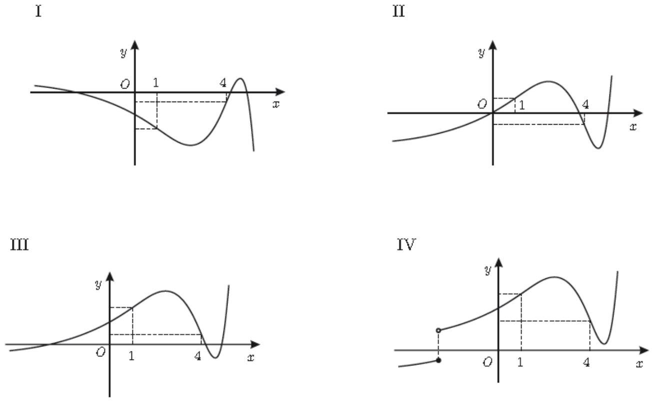


Figura 6

• f (1) × f (4) > 0

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função f



Elabore uma composição na qual:
• indique a opção que pode representar f
• apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções

Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado.

(1ª fase)

268. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 4. Qual das expressões seguintes pode definir a função f ′′, segunda derivada de f ?

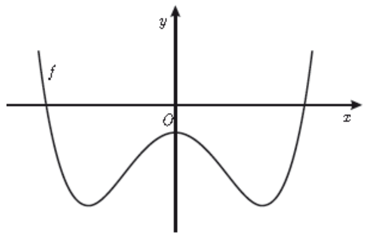


Figura 1

(A) $(x-3)^2$ (B) $(x+3)^2$

(C) $9 - x^2$ (D) $x^2 - 9$

(2ª fase)

269. Na estufa de um certo jardim botânico, existem dois lagos aquecidos, o lago A e o lago B. Às zero horas do dia 1 de Março de 2010, cada lago recebeu uma espécie diferente de nenúfares, a saber, *Victoria amazonica* e *Victoria cruziana*.

$N_A(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago A, *t* dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria amazonica* e desenvolvem-se segundo o modelo $N_A(t) = \dfrac{120}{1+7\times e^{0,2t}}$ com $t \geq 0$

$N_B(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago B, *t* dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria cruziana* e desenvolvem-se segundo o modelo $N_B(t) = \dfrac{150}{1+50\times e^{0,4t}}$ com $t \geq 0$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Como foi referido, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, o lago A recebeu um certo número de nenúfares da espécie *Victoria amazonica*. Decorridos 7 dias, esse número aumentou. Determine de quanto foi esse aumento.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

b) Determine quantos dias foram necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A fosse igual ao número de nenúfares existentes no lago B. Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

(2ª fase)

270. Considere a função f , de domínio [0, +∞[, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x-2} & \text{se} \quad 0\le x<2\\[2ex] \dfrac{x+1}{\ln(x+1)} & \text{se} \quad x\ge 2\end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude f quanto à existência de assimptotas verticais do seu gráfico.

b) Mostre, sem resolver a equação, que f (x) = -3 tem, pelo menos, uma solução em $]0, \frac{1}{2}[$

c) Estude f quanto à monotonia em]2, +∞[

(2ª fase)

E26 Considere a função f , de domínio]0, +∞[, definida por

$$f(x)=\begin{cases}e^{x}-1 & \text{se} \quad 0<x\le 2\\[2ex] \dfrac{4}{x}+1 & \text{se} \quad x>2\end{cases}$$

Seja (u_n) uma sucessão de números reais, de termos positivos, tal que $\lim f(u_n) = 3$. Qual das expressões seguintes pode definir o termo geral da sucessão (u_n)?

(A) $2-\frac{1}{n}$ (B) $2+\frac{1}{n}$ (C) $3-\frac{1}{n}$ (D) $3+\frac{1}{n}$

(1ª fase especial)

E27 Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função h ′, primeira derivada de h.

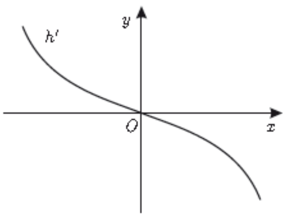
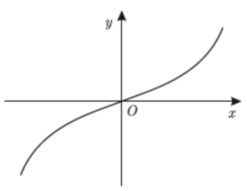


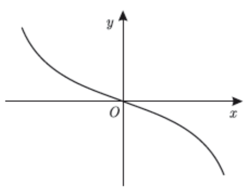
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?

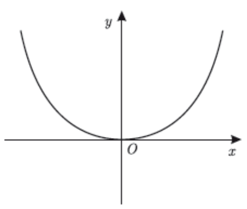
(A)



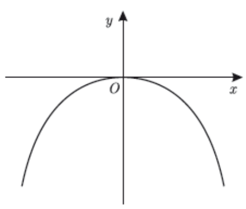
(B)



(C)



(D)



(1ª fase especial)

E28 Sejam f e g duas funções deriváveis em ℝ. Sabe-se que:

- $f(1) = f'(1) = 1$
- $g(x) = (2x-1)\times f(x)$, para todo o valor real de x

Qual é a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 ?

(A) y = 3x – 2 (B) y = 3x + 4

(C) y = 2x – 1 (D) y =–3x + 2

(1ª fase especial)

E29 O momento sísmico, M_0, é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo. Só uma pequena fracção do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada, *E*, que é a que os sismógrafos registam. A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por $E = M_0 \times 1,6\times 10^{-5}$. A magnitude, *M*, de um sismo é estimada por $M = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2,9$. Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Admita que um sismo que ocorreu no Haiti, em 2010, teve magnitude 7,1. Determine o momento sísmico, M_0 , para esse sismo. Escreva o resultado na forma $a \times 10^n$, com n inteiro relativo e com a entre 1 e 10

b) Sejam M_1 e M_2 as magnitudes de dois sismos. Mostre que, se a diferença entre a magnitude M_1 e a magnitude M_2 é igual a $\frac{2}{3}$, então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

(1ª fase especial)

E30 Considere a função f, de domínio ℝ, definida por

$$f(x)=\begin{cases}k+\dfrac{1-e^{x-1}}{x-1} & \text{se} \quad x<1\\[2ex] -x+\ln x & \text{se} \quad x\ge 1\end{cases}$$

(*k* designa um número real)

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine k , sabendo que f é contínua em x = 1

b) Considere, agora, $k = 3$. Estude a função f quanto à existência de assimptotas horizontais do gráfico de f

(1ª fase especial)

E31 Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f , de domínio]–∞, 6[, definida por $f(x) = 2 + 15\ln(3 - \frac{1}{2}x)$. Considere que um ponto C se desloca ao longo do gráfico de f , e que C tem coordenadas positivas. Para cada posição do ponto C, considere o rectângulo [OACB], em que o ponto A pertence ao eixo das abcissas e o ponto B pertence ao eixo das ordenadas.

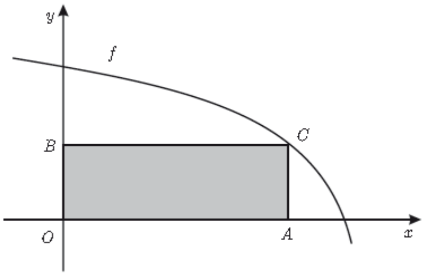


Figura 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A para a qual a área do rectângulo [OACB] é máxima.
Na sua resposta, deve:
• escrever a expressão que dá a área do rectângulo [OACB] em função da abcissa do ponto A;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

(1ª fase especial)

E32 Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, contínua em todo o seu domínio. Sabe-se que:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

• $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -2$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) + 2x) = 0$

Em qual das opções seguintes as equações definem duas assimptotas do gráfico de f ?
(A) x = −2 e y = 1 (B) x = 3 e y = −2x
(C) y = −2x e y = 1 (D) y = 2x e y = −1

(época especial)

E33 Para um certo número real a, seja a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 - 1$. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f´´, segunda derivada da função f. Qual dos valores seguintes pode ser o valor de a ?

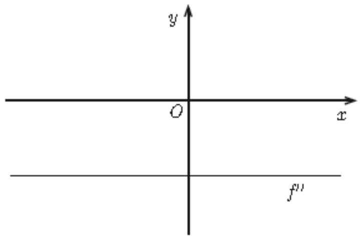


Figura 1

(A) 0 (B) π (C) 3 (D) -3

(época especial)

E34 Para um certo valor real de k, admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola, t minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por

$Q(t) = 12 + \log_3(81 - kt^2)$ com $t\in[0,20]$. Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível.
Determine o valor de k recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(época especial)

E35 Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1 & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(a é um número real.)
Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.
a) Determine a sabendo que f é contínua em x = −1
b) Seja f ´ a primeira derivada de f. Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em]0, 1[. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

(época especial)

(*Testes intermédios e exames 2011/2012*)

271. Considere a sucessão (u_n), definida por $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

Seja *f* uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que

$\lim f(u_n) = 0$. Qual das seguintes expressões pode definir a função *f* ?
(A) $1 - \ln x$ (B) $1 + \ln x$
(C) $x - \ln x$ (D) $x + \ln x$

(Intermédio 1)

272. Para um certo valor de α e para um certo valor de β, é contínua no ponto 0 a função *g*, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \\ \beta - \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é esse valor de α e qual é esse valor de β ?
(A) α = 1 e β = 2 (B) α = 2 e β = 3
(C) α = 1 e β = 3 (D) α = 2 e β = 1

(Intermédio 1)

273. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. xOy , a sombreado, o quadrado [OABC]. Os pontos A e C pertencem aos semieixos positivos Oy e Ox, respetivamente. Considere que um ponto P se desloca sobre o semieixo positivo Ox, iniciando o seu movimento na origem do referencial e percorrendo todos os pontos desse semieixo. Para cada posição do ponto P, considere o segmento de reta que é a intersecção da reta AP com o quadrado [OABC]. Seja *f* a função que, à abcissa *x* do ponto P, faz corresponder o comprimento do referido segmento. Qual dos gráficos seguintes pode ser o gráfico da função *f* ?

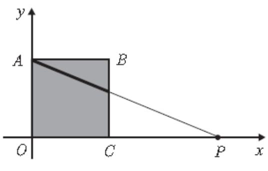
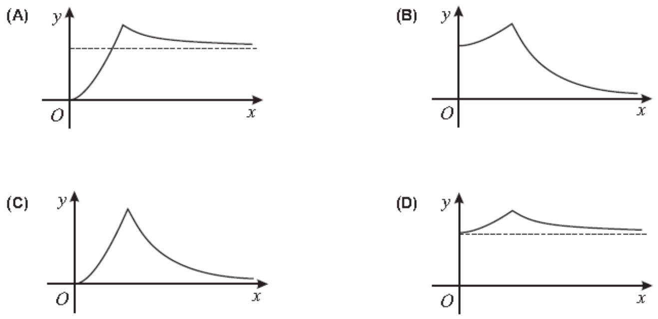


Figura 1



(Intermédio 1)

274. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$f(x) = 2 + \log_3 x$. Resolva os três itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Determine o conjunto dos números reais para os quais se tem $f(x) \geq 4 + \log_3 (x-8)$. Apresente a sua resposta na forma de intervalo de números reais.

b) Determine o valor de $f(36^{1000}) - f(4^{1000})$

c) Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = x + f(x)$

Mostre que $\exists c \in]1,3[: g(c) = 5$

(Intermédio 1)

275. Um vírus atacou os frangos de um aviário. Admita que *x* dias após o instante em que o vírus foi detetado, o número de frangos infetados é dado aproximadamente por

$$f(x) = \frac{200}{1+3\times 2^{3-0,1x}}$$

(considere que *x* = 0 corresponde ao instante em que o vírus foi detetado). Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

a) No instante em que o vírus foi detetado, já existiam frangos infetados. Passados alguns dias, o número de frangos infetados era dez vezes maior. Quantos dias tinham passado?

b) Para tentar verificar se um frango está infetado, o veterinário aplica um teste que ou dá positivo ou dá negativo. Sabe-se que:

• quando o frango está infetado, a probabilidade de o teste dar positivo é 96%

• quando o frango não está infetado, a probabilidade de o teste dar negativo é 90%

Trinta dias após o instante em que o vírus foi detetado, existiam no aviário 450 frangos não infetados. Nesse dia, de entre todos os frangos do aviário (infetados e não infetados), o veterinário escolheu, ao acaso, um frango e aplicou-lhe o teste. O teste deu negativo. Qual é a probabilidade de o frango escolhido não estar infetado? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

(Intermédio 1)

276. Para cada valor de k, a expressão

$$f(x) = \begin{cases} k + xe^{x} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{2x + \ln x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

define uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cujo gráfico tem:

• uma assíntota horizontal, quando $x \to +\infty$

• uma assíntota horizontal, quando $x \to -\infty$

Existe um valor de k para o qual as duas assíntotas são coincidentes, ficando assim o gráfico de *f* com uma única assíntota horizontal. Determine esse valor de k , sem recorrer à calculadora.

(Intermédio 1)

277. Seja *a* um número real maior do que 1 e seja $b = a^{\pi}$
Qual é o valor, arredondado às unidades, de $\log_a (a^{12} \times b^{100})$?
(A) 138 (B) 326 (C) 1238 (D) 3770

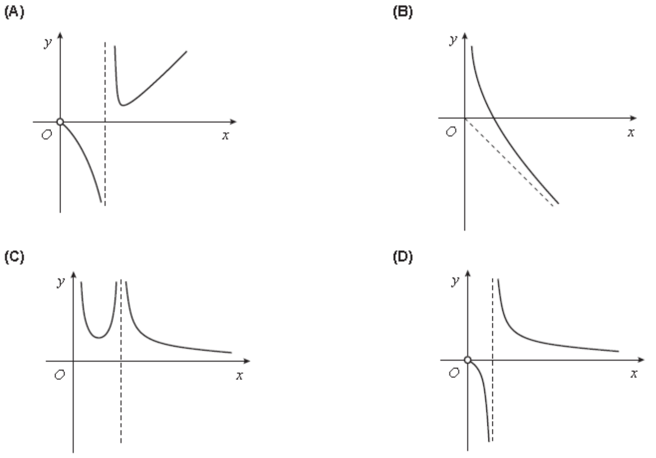
(Intermédio 2)

278. Seja *f* uma função de domínio $\mathbb{R}^+$, contínua em todo o seu domínio. Sabe-se que:

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

• a bissetriz dos quadrantes ímpares é assíntota do gráfico de *f*

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função $\frac{1}{f}$?



(Intermédio 2)

279. Relativamente a duas funções, *f* e *g*, sabe-se que:
• têm domínio [2, 3]
• são funções contínuas
• $f(2) - g(2) > 0$ e $f(3) - g(3) < 0$
Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?
(A) Os gráficos de *f* e *g* intersectam-se em pelo menos um ponto.
(B) A função $f - g$ é crescente.
(C) Os gráficos de *f* e *g* não se intersectam.
(D) A função $f - g$ é decrescente.

(Intermédio 2)

280. De uma certa função *f* sabe-se que:
• o seu domínio é]1, +∞[
• a sua derivada é dada por
$f'(x) = x^2 - 4x + \frac{9}{2} - 4\ln(x-1)$

a) Na Figura 3, estão representadas:
• parte do gráfico da função *f*
• a reta *r* que é tangente ao gráfico da função *f* no ponto A, de abcissa 2
• a reta *s* que é tangente ao gráfico da função f no ponto B

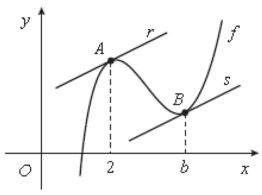


Figura 3

As retas *r* e *s* são paralelas. Seja b a abcissa do ponto B
Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de b
Na sua resposta, deve:
• equacionar o problema;
• reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que tiver necessidade de visualizar na calculadora para resolver graficamente a equação;
• assinalar o ponto relevante para a resolução do problema;
• apresentar o valor de b arredondado às centésimas.

b) Tal como a figura sugere, o gráfico da função *f* tem um ponto de inflexão. Determine a abcissa desse ponto, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(Intermédio 2)

281. Seja *f* a função de domínio ℝ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - 2e^2}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ 3e^x + \ln(x-1) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Averigue se a função *f* é contínua em $x = 2$

(Intermédio 2)

282. Seja *f* uma função de domínio ℝ, definida por $f(x) = e^x - 3$
Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite afirmar que a equação $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, uma solução?
(A) $]0, \frac{1}{5}[$ (B) $]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}[$ (C) $]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}[$ (D) $]\frac{1}{3}, 1[$

(1ª fase)

283. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função *g*, de domínio $[a,+\infty[$, com $a < -\frac{1}{3}$

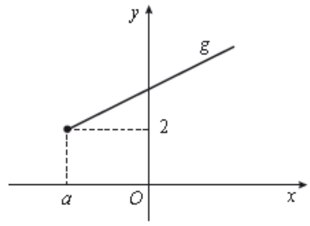


Figura 1

Para esse valor de *a*, a função *f*, contínua em ℝ, é definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right) & \text{se } x < a \\ g(x) & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

Qual é o valor de *a* ?
(A) $-\frac{28}{3}$ (B) $-\frac{25}{3}$ (C) $-\frac{19}{3}$ (D) $-\frac{8}{3}$

(1ª fase)

284. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função *f*, de domínio ℝ

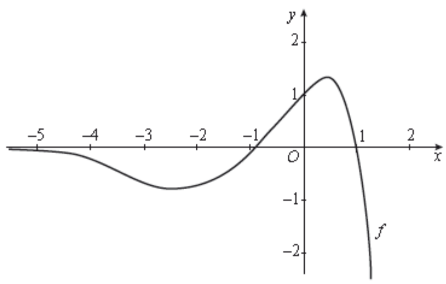


Figura 2

Sejam f' e f'', de domínio ℝ, a primeira derivada e a segunda derivada de f, respetivamente. Qual dos valores seguintes pode ser positivo?
(A) $f'(1)$ (B) $f'(-3)$ (C) $f'(-3)$ (D) $f''(1)$

(1ª fase)

285. Considere a função f, de domínio ℝ, e a função g, de domínio $]0,+\infty[$, definidas por $f(x) = e^{x-2} - \frac{4e^{-x}+4}{e^2}$ e $g(x) = -\ln x + 4$

a) Mostre que $\ln(2 + 2\sqrt{2})$ é o único zero da função f, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

b) Considere, num referencial o. n. xOy, os gráficos das funções *f* e *g* e o triângulo [OAB]. Sabe-se que:

• O é a origem do referencial;
• A e B são pontos do gráfico de f
• a abcissa do ponto A é o zero da função f
• o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o gráfico da função g

Determine a área do triângulo [OAB], recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
• reproduzir os gráficos das funções f e g , devidamente identificados, incluindo o referencial;
• assinalar os pontos A e B
• indicar a abcissa do ponto A e as coordenadas do ponto B com arredondamento às centésimas;
• apresentar o valor da área pedida com arredondamento às décimas.

(1ª fase)

286. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x & \text{se} \quad x>0 \\ \\ x\,e^{1-x} & \text{se} \quad x\leq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

b) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x = -1$

(1ª fase)

287. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f , de domínio]–1, 3[. Sabe-se que:
• $f(1) = -4$
• a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f
• (x_n) é uma sucessão com termos em]–1, 1[
• $\lim (x_n) = 1$

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) $+\infty$ (B) -4
(C) -5 (D) -6

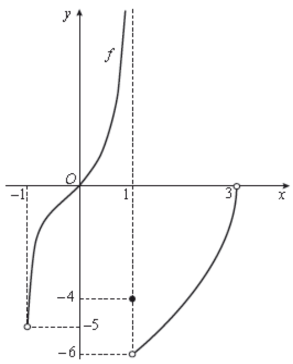


Figura 1

(2ª fase)

288. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f , de domínio]–6, +∞[, definida por $f(x) = \ln(\frac{x}{3}+2)$

Sabe-se que:
• a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a
• a inclinação da reta r é, em radianos, $\frac{\pi}{4}$

Qual é o valor de a ?

(A) -4 (B) $-\frac{9}{2}$ (C) $-\frac{11}{2}$ (D) -5

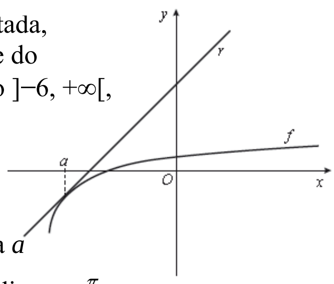


Figura 2

(2ª fase)

289. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 1$
• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$
• $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
• $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$

Em qual das opções seguintes as duas equações definem assíntotas do gráfico da função f ?

(A) $x = 1$ e $y = -2x + 1$ (B) $x = 1$ e $y = 2x + 1$
(C) $y = 3$ e $y = -2x + 1$ (D) $y = 2$ e $y = 2x + 1$

(2ª fase)

290. Considere a função f , de domínio [–7, 0[, definida por $f(x) = e^x + \ln(x^2) + 3$. Sejam A e B os pontos de intersecção do gráfico de f com a bissetriz dos quadrantes pares, e seja d a distância entre os pontos A e B. Determine d, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• assinalar os pontos A e B
• indicar as coordenadas dos pontos A e B com arredondamento às centésimas;
• apresentar o valor de d com arredondamento às centésimas.

(2ª fase)

$\boxed{\text{E36}}$ Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de h'' , segunda derivada de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$

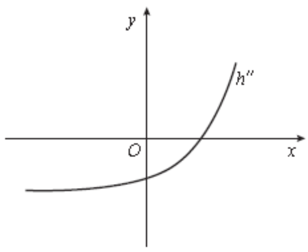
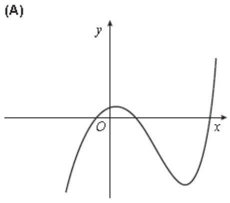
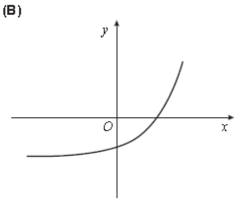
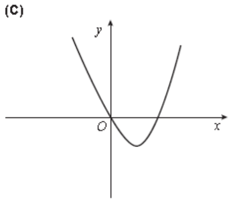


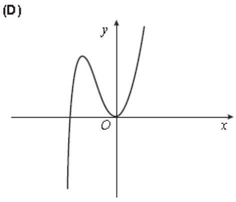
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?

(A)


(B)


(C)


(D)


(época especial)

$\boxed{\text{E37}}$ Sejam f e g funções de domínio $]0, +\infty[$. Sabe-se que:

• a reta de equação y = 3 é assíntota horizontal do gráfico de f

• f não tem zeros;

• $g(x) = \frac{e^{-x} - 3}{f(x)}$

Qual das opções seguintes define uma assíntota horizontal do gráfico de g ?

(A) y = 3 (B) y = e (C) y = 0 (D) y = −1

(época especial)

$\boxed{\text{E38}}$ Sejam a, b e c três números tais que $a \in]1,+\infty[$, $b \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}^+$. Sabe-se que $\log_a b = c$ e que $\log_a \sqrt{c} = 3$

Qual das expressões seguintes é equivalente a $\log_a \sqrt{b \times c}$?

(A) c + 3 (B) c − 3 (C) $\frac{c}{2} + 3$ (D) $\frac{c}{2} - 3$

(época especial)

$\boxed{\text{E39}}$ Admita que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, t minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por $C(t) = 0,5t^2 \times e^{-0,1t}$ com $t \geq 0$. Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação desse produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

b) Determine o valor de t para o qual a concentração desse produto químico na água é máxima.

(época especial)

$\boxed{\text{E40}}$ Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

• a, b e c são números reais positivos e $a < b < c$

• h tem um mínimo relativo em $]a, c[$

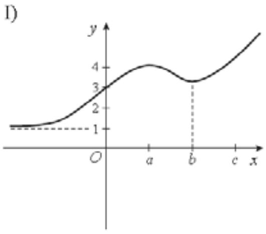
• h é crescente em $]-\infty,0[$

• $\lim_{x \to -\infty} (h(x) - 1) = 0$

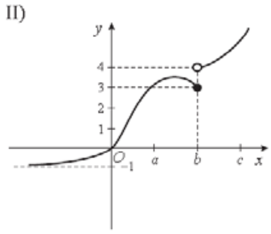
• a segunda derivada, h'', da função h é tal que $h''(x) > 0$ para $x > b$

Apenas uma das opções seguintes pode representar uma parte do gráfico da função h

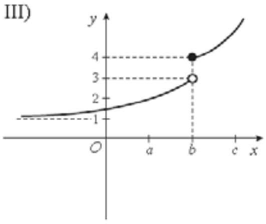
I)



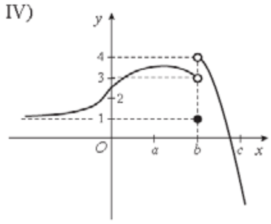
II)



III)



IV)



Elabore uma composição na qual:

• indique a opção que pode representar h

• apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

(época especial)

$\boxed{\text{E41}}$ Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{0,1x} + \ln(3x + 1)$

Seja P um ponto do gráfico de f. A distância do ponto P à origem é igual a 2. Determine a abcissa do ponto P, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;

• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar a abcissa do ponto P com arredondamento às centésimas.

(época especial)

(*Testes intermédios e exames 2012/2013*)

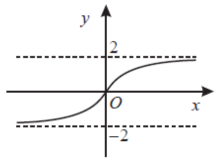
291. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_a b = 2$. Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a + \log_a \sqrt{b}$?

(A) $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ (B) $-2 + \sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

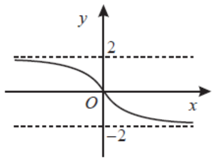
(Intermédio 1)

292. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \frac{1}{n}$. De uma certa função f, sabe-se que $\lim f(u_n) = +\infty$. Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função f?

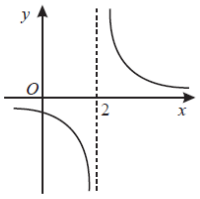
(A)



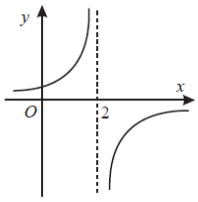
(B)



(C)



(D)



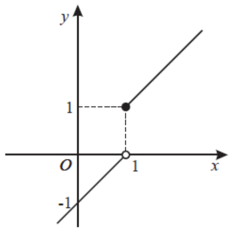
(Intermédio 1)

293. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

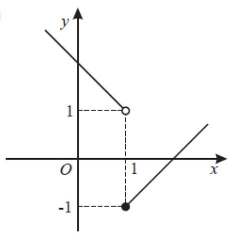
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Seja g uma outra função, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a função $f \times g$ é contínua no ponto 1. Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função g ?

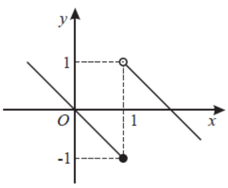
(A)



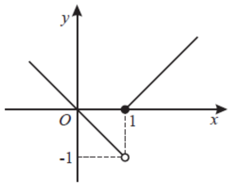
(B)



(C)



(D)



(Intermédio 1)

294. Seja f a função, de domínio R, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} & \text{se } x \leq 4 \\ \dfrac{\ln(3x-11)}{x-4} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue se existe $\lim_{x \to 4} f(x)$

b) O gráfico da restrição da função f ao intervalo $]-\infty, 4]$ tem uma assíntota horizontal. Determine uma equação dessa assíntota.

c) Considere, num referencial o.n. xOy, o triângulo [OPQ] tal que:

• o ponto P é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;

• o ponto Q é o ponto do gráfico da função f que tem abcissa positiva e ordenada igual à ordenada do ponto P

Determine um valor aproximado da área do triângulo [OPQ], recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• reproduzir, num referencial, o gráfico da função f para $x \in [0,10]$

• desenhar o triângulo [OPQ]

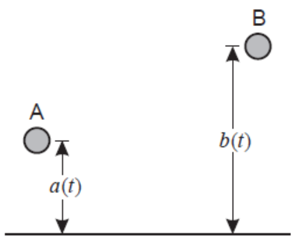
• indicar a abcissa do ponto Q arredondada às milésimas;

• apresentar a área do triângulo [OPQ] arredondada às centésimas.

<u>Nota</u> – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

(Intermédio 1)

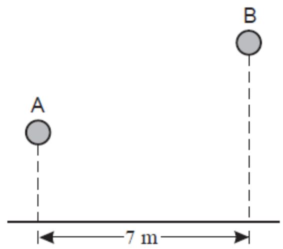
295. Considere que dois balões esféricos, que designamos por balão A e por balão B, se deslocam na atmosfera, por cima de um solo plano e horizontal. Num determinado instante, é iniciada a contagem do tempo. Admita que, durante o primeiro minuto imediatamente a seguir a esse instante, as distâncias, medidas em metros, do centro do balão A ao solo e do centro do balão B ao solo são dadas, respetivamente, por



$a(t) = e^{-0{,}03t} - 0{,}02t + 3$ e $b(t) = 6e^{-0{,}06t} - 0{,}02t + 2$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0,60]$). Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos. Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

a) Determine a distância entre o centro do balão A e o centro do balão B, cinco segundos após o início da contagem do tempo, sabendo que, nesse instante, a distância entre as projeções ortogonais dos centros dos balões no solo era 7 metros. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.



b) Sabe-se que, alguns segundos após o início da contagem do tempo, os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo.

Determine quanto tempo decorreu entre o instante inicial e o instante em que os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo. Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

(Intermédio 1)

296. Para um certo número real k, positivo, seja f a função, de domínio $]-\infty,1[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\ln(k-x) & \text{se } x\le 0\\ 2e^x+\dfrac{1}{\ln x} & \text{se } 0<x<1\end{cases}$$

Sabe-se que f é contínua. Qual é o valor de k ?
(A) ln2 (B) e^2 (C) ln3 (D) e^3

(Intermédio 2)

297. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^a + a^2 \ln x$ (a é um número real maior do que 1), e seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a. Qual é o declive da reta r ?
(A) $a^{a-1} + a^2$ (B) $a^a + a^2$ (C) $a^{a-1} + a$ (D) $a^a + a$

(Intermédio 2)

298. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e seja f ´´ a segunda derivada da função f. Sabe-se que f ´´ tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x) = e^{-x}x^2(x-1)$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
(A) O gráfico da função f tem exatamente quatro pontos de inflexão.
(B) O gráfico da função f tem exatamente três pontos de inflexão.
(C) O gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão.
(D) O gráfico da função f tem exatamente um ponto de inflexão.

(Intermédio 2)

299. Seja a um número real tal que $a > e$ (e – número de Neper ou número de Euler). Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = a\,x + \ln x$. Mostre que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]\frac{1}{a},\frac{1}{e}\right[$

(Intermédio 2)

300. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+f(x)}{3x}=1$. Qual das equações seguintes pode definir uma assíntota do gráfico da função f ?
(A) $y=\frac{1}{3}x$ (B) $y=\frac{2}{3}x$ (C) y = x (D) y = 3x

(1.ª fase)

301. Considere, para um certo número real a superior a 1, as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=a^x$ e $g(x)=a^{-x}$.

Considere as afirmações seguintes.
I) Os gráficos das funções f e g não se intersectam.
II)– As funções f e g são monótonas crescentes.
III) $f'(-1)-g'(1)=\frac{2\ln a}{a}$
Qual das opções seguintes é a correta?
(A) II e III são verdadeiras.
(B) I é falsa e III é verdadeira.
(C) I é verdadeira e III é falsa.
(D) II e III são falsas.

(1.ª fase)

302. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{e^{4x}-1} & \text{se } x<0\\ x\ln(x) & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.
a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.
b) Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0, e]$
Resolva o item c), recorrendo à calculadora gráfica.
c) Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$. Sabe-se que:
• A é o ponto de coordenadas (2, 0)
• B é o ponto de coordenadas (5, 0)
• P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g
Para cada posição do ponto P, considere o triângulo [ABP]. Determine as abcissas dos pontos P para os quais a área do triângulo [ABP] é 1. Na sua resposta, deve:
• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas.

(1.ª fase)

303. Na Figura 2 , está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3. Sabe-se que:
• -1 e 2 são os únicos zeros da função f
• g ´, a primeira derivada de uma certa função g, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $g'(x)=f(x)\times e^{-x}$
• $\lim_{x\to+\infty}[g(x)-2]=0$

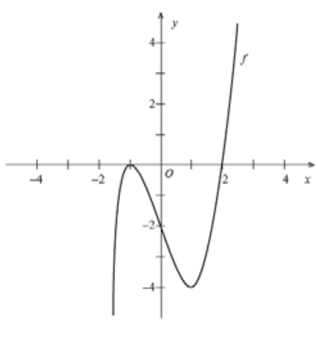
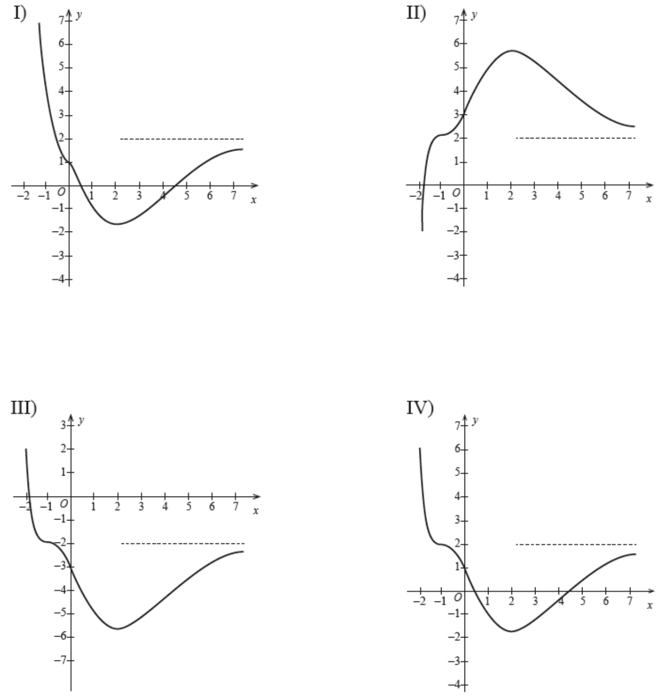


Figura 2

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função g



<u>Nota</u> – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, uma assíntota desse gráfico.

Elabore uma composição na qual:

• identifique a opção que pode representar a função g

• apresente as razões para rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões diferentes, uma por cada gráfico rejeitado.

(1.ª fase)

304. Considere, para um certo número real a positivo, uma função f , contínua, de domínio $[-a, a]$. Sabe-se que $f(-a) = f(a)$ e $f(a) > f(0)$. Mostre que a condição $f(x) = f(x + a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$.

(1.ª fase)

305. Sejam a e b dois números reais tais que $1 < a < b$ e $\log_a b = 3$. Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de

$\log_a(a^5 \times \sqrt[3]{b}) + a^{\log_a b}$?

(A) $6 + b$ (B) $8 + b$ (C) $6 + a^b$ (D) $8 + a^b$

(2.ª fase)

306. Seja f uma função de domínio $[-e,1]$. Sabe-se que:

• f é contínua no seu domínio;

• $f(-e) = 1$

• $f(1) = e$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A equação $f(x) - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(B) A equação $f(x) = e$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(C) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(D) A equação $f(x) = \frac{e}{2}$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(2.ª fase)

307. Sejam f ′ e f ′′, de domínio $\mathbb{R}$, a primeira derivada e a segunda derivada de uma função f , respetivamente. Sabe-se que:

• a é um número real;

• P é o ponto do gráfico de f de abcissa a

• $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$

• $f''(a) = -2$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) a é um zero da função f

(B) $f(a)$ é um máximo relativo da função f

(C) $f(a)$ é um mínimo relativo da função f

(D) P é ponto de inflexão do gráfico da função f

(2.ª fase)

308. Na Figura 2, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial g, de grau 3. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, que verifica a condição $f(x) = g(x - 3)$. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ′, primeira derivada da função f ?

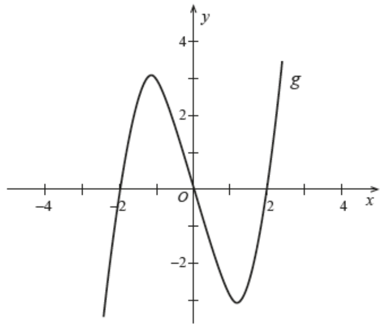
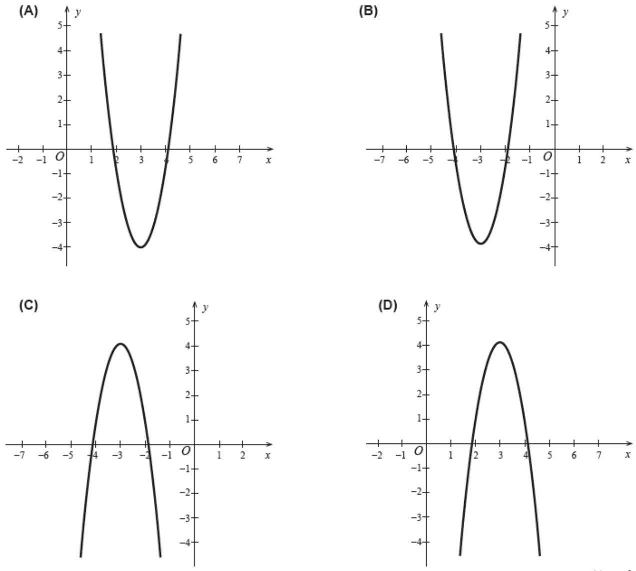


Figura 2



(2.ª fase)

309. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g ′, de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por $g'(x) = \ln(e^x + 6e^{-x} + 4x)$. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

(2.ª fase)

310. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[-1, 2]$, definida por

$f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$, o ponto A de coordenadas (2, 0) e um ponto P que se desloca ao longo do gráfico da função f. Existe uma posição do ponto P para a qual a área do triângulo [AOP] é mínima. Determine a área desse triângulo, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar o valor da área do triângulo [AOP] com arredondamento às centésimas.

(2.ª fase)

E42 Seja f uma função cuja derivada, f ´, de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f'(x) = (4 + x)^2$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$

(B) A função f tem um máximo relativo em x = -4

(C) O gráfico da função f não tem pontos de inflexão.

(D) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas (-4, f (-4))

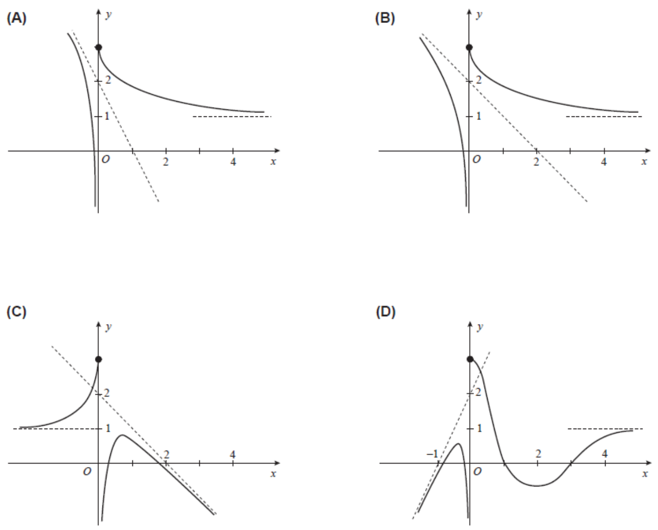
(época especial)

E43 Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + 2x] = 2$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?



Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, assíntotas desse gráfico.

(época especial)

E44 Seja a um número real positivo. Considere o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}: \ln(e^{-x} - a) \leq 0\}$. Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto S ?

(A) $]-\ln(1 + a), -\ln a[$ (B) $[-\ln(1 + a), -\ln a[$

(C) $]-\infty \ln(1 + a)]$ (D) $[-\ln(1 + a), +\infty[$

(época especial)

E45 Considere, para um certo número real k positivo, a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{1-e^{2x}} & \text{se } x < 0 \\ \ln k & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{x}{2} - \ln\left(\dfrac{6x}{x+1}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine k de modo que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

b) Mostre que $\ln(\frac{\sqrt{e}}{3})$ é um extremo relativo da função f no intervalo $]0, +\infty[$

(época especial)

E46 Considere duas funções g e h, de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que:

• a reta de equação y = 2x - 1 é assíntota do gráfico da função g

• a função h é definida por $h(x) = \dfrac{1-[g(x)]^2}{x^2}$. Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal.

(época especial)

(*Testes intermédios e exames 2013/2014*)

311. Seja b um número real. Sabe-se que log b = 2014. Qual é o valor de log (100b)?
(A) 2016 (B) 2024 (C) 2114 (D) 4028

(Intermédio 2)

312. Na Figura 1, está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1,e\}$. Tal como a figura sugere, as retas de equações y = 0, x = 1 e x = *e* são as assíntotas do gráfico da função h. Seja (x_n) uma sucessão tal que lim $h(x_n) = +\infty$. Qual das expressões seguintes não pode ser termo geral da sucessão (x_n) ?

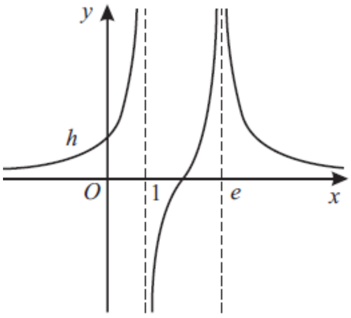


Figura 1

(A) $(1+\frac{1}{n})^n$ (B) $(1+\frac{1}{n})^3$

(C) $1-\frac{1}{n}$ (D) $e+\frac{1}{n}$

(Intermédio 2)

313. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. A sua derivada, f ‘, é definida por $f\,'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$. Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f ?
(A) Zero. (B) Um. (C) Dois. (D) Três.

(Intermédio 2)

314. Seja f a função, de domínio R, definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1+e^{-x} & \text{se } x\le 0 \\ \dfrac{3x+\ln x}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Seja t a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1. Determine a equação reduzida da reta t

b) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico. Na sua resposta, deve:
• mostrar que existe uma única assíntota vertical e escrever uma equação dessa assíntota;
• mostrar que existe uma assíntota horizontal quando x →+∞ e escrever uma equação dessa assíntota;
• mostrar que não existe assíntota não vertical quando x→–∞

c) Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f , os pontos A e B, ambos pertencentes ao gráfico de f , e a reta AB. Sabe-se que:
• a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares;
os pontos A e B têm abcissas simétricas;
• a abcissa do ponto A pertence ao intervalo]0,1[
Seja *a* a abcissa do ponto A. Determine o valor de a, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:
• equacionar o problema;
• reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
• indicar o valor de *a*, com arredondamento às milésimas.

(Intermédio 2)

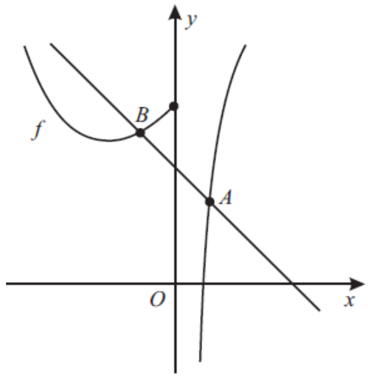


Figura 2

315. Numa certa escola, eclodiu uma epidemia de gripe que está a afetar muitos alunos. Admita que o número de alunos com gripe, t dias após as zero horas de segunda-feira da próxima semana, é dado aproximadamente por

$$f(t)=(4t+2)\,e^{3,75-t}, \quad \text{para } t\in[0,6]$$

Como, por exemplo, f(1,5) ≈ 76, pode concluir-se que 76 alunos dessa escola estarão com gripe às 12 horas de terça-feira da próxima semana.

a) Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Estude a função f quanto à monotonia e conclua em que dia da próxima semana, e a que horas desse dia, será máximo o número de alunos com gripe.

b) Nessa escola, há 300 alunos. Às 18 horas de quinta-feira da próxima semana, vão ser escolhidos aleatoriamente 3 alunos, de entre os 300 alunos da escola, para responderem a um inquérito. Qual é a probabilidade de pelo menos um dos alunos escolhidos estar com gripe? Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

(Intermédio 2)

316. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Qual é o valor de $\lim \frac{2}{f(x_n)}$?

(A) –∞ (B) –*e* (C) 0 (D) +∞

(1.ª fase)

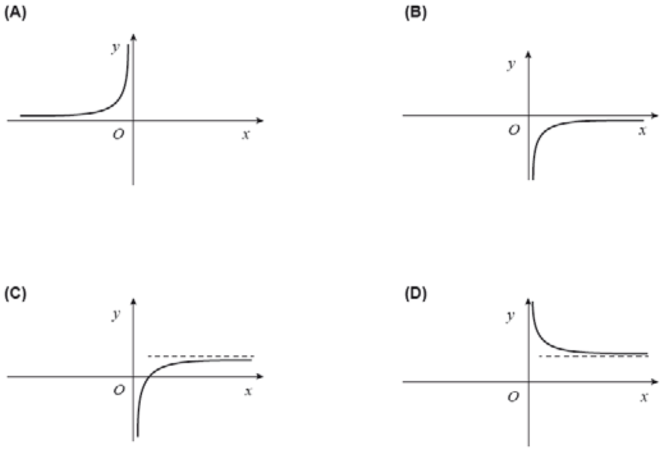
317. Considere, para um certo número real k, a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por f (x) = k e^x + x. O teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo]0,1[. A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k ?

(A) $\left]-e,-\frac{1}{e}\right[$ **(B)** $\left]-\frac{1}{e},0\right[$

(C) $\left]0,\frac{1}{e}\right[$ **(D)** $\left]\frac{1}{e},1\right[$

(1.ª fase)

318. Considere, para um certo número real a positivo, a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a + \ln \frac{a}{x}$. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ‘, primeira derivada da função f ?



(1.ª fase)

319. Considere a função f , de domínio ℝ, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-4}-3x+11}{4-x} & \text{se } x<4\\[2ex] \ln\left(2e^{x}-e^{4}\right) & \text{se } x\geq 4\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue se a função f é contínua em x = 4

b) O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para +∞, de equação y = x + b, com b ∈ ℝ. Determine b

(1.ª fase)

320. Considere a função f, de domínio $]-e^2, +\infty[$, definida por $f(x) = -\ln(x + e^2)$. Na Figura 5, estão representados, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f e o triângulo [ABC]

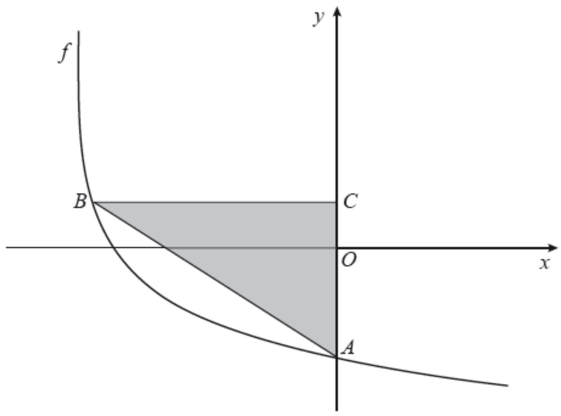


Figura 5

Sabe-se que:
• o ponto A tem coordenadas (0, -2)
• o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa negativa;
• o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B
• a área do triângulo [ABC] é igual a 8

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
– escrever uma expressão da área do triângulo [ABC] em função da abcissa do ponto B
– equacionar o problema;
– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
– indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

(1.ª fase)

321. Seja g uma função, de domínio $]-\infty, e[$, definida por g(x) = ln (e − x). Considere a sucessão estritamente crescente de termo geral $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Qual é o valor de lim $g(x_n)$?

(A) +∞ (B) e (C) 1 (D) −∞

(2.ª fase)

322. Na Figura 2, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico da função g´´, segunda derivada de uma função g

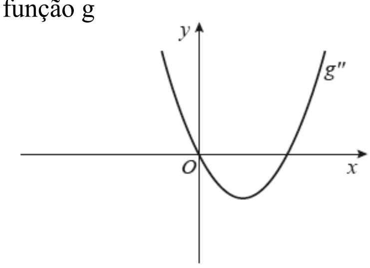
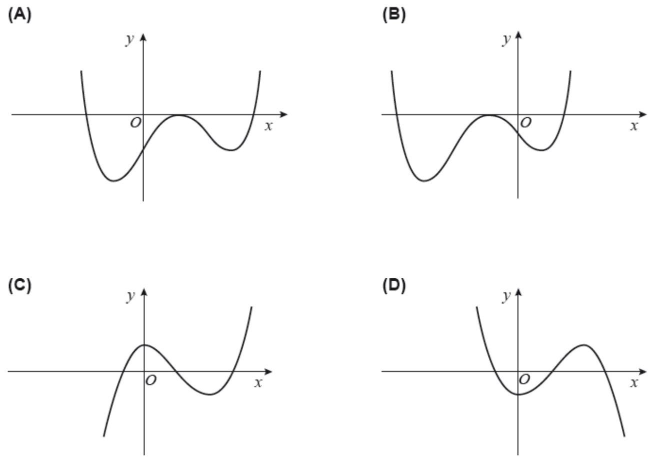


Figura 2

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g ?



(2.ª fase)

323. Considere as funções f e g, de domínio]-∞, 0[, definidas por $f(x) = x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}$ e g(x)=-x+f(x). Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico e, caso existam, indique as suas equações.

b) Mostre que a condição f(x) = $-e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e, -1[$

c) Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos. Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

(2.ª fase)

324. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio [0,10], definida por

$$f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$$

e dois pontos A e B. Sabe-se que:
• o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;
• o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa positiva;
• a reta AB tem declive -2
Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
— equacionar o problema;
— reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
— indicar o valor da abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

(2.ª fase)

325. Na Figura 6, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 3. Sabe-se que:
• -2 e 3 são os únicos zeros da função f
• a função f tem um extremo relativo em x = −2
• h', primeira derivada de uma função h, tem domínio ℝ e é definida por $h'(x) = \dfrac{f(x)}{e^{2x}}$
• $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 3$

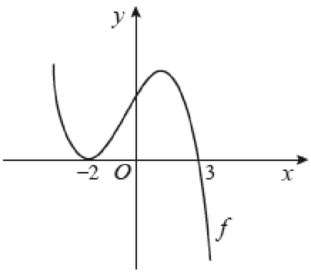


Figura 6

Considere as afirmações seguintes.
I) A função h tem dois extremos relativos.
II) h''(−2) = 0
III) y + 3 = 0 é uma equação da assíntota do gráfico da função h quando x tende para +∞
Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

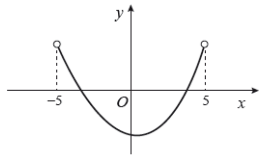
(2.ª fase)

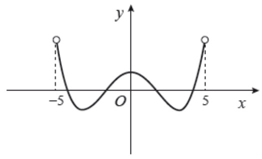
E47 Seja f a função, de domínio ℝ\{0}, definida por $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x - 1}$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = -\dfrac{1}{n}$. Qual é o valor de lim f(x_n) ?

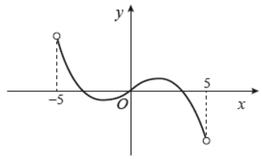
(A) -∞ (B) 0 (C) 1 (D) +∞

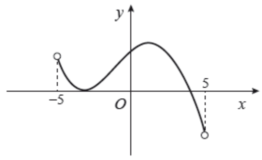
(época especial)

E48 Seja f uma função de domínio]-5, 5[. Sabe-se que o gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão. Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função f ´´ , segunda derivada da função f ?

(A)


(B)


(C)


(D)


(época especial)

E49 Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. A reta de equação y = 2x − 5 é assíntota do gráfico da função f. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x-1}{f(x)}$?

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) +∞

(época especial)

E50 Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$g(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$$

a) Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

b) Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, os pontos A e B, e a reta r de equação y = mx, com m <0. Sabe-se que:
• os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g
• a abcissa do ponto A é o zero da função g
• o ponto B é o ponto de intersecção da reta r com o gráfico da função g
• a área do triângulo [OAB] é igual a 1
Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
— equacionar o problema;
— reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
— indicar a abcissa do ponto A e a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

(época especial)

E51 Considere uma função f , de domínio ℝ. Sabe-se que:
• a reta de equação x = 0 é assíntota do gráfico da função f
• f (-3)× f (5)< 0

• $\lim_{x\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe e é positivo, para qualquer número real x não nulo;

• $\lim_{x\to -\infty} (f(x) - 2x) = 0$

Considere as afirmações seguintes.

I) O teorema de Bolzano permite garantir, no intervalo [-3,5], a existência de, pelo menos, um zero da função f

II) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para -∞

III) A função f é crescente em]0, +∞[

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

(época especial)