(*Testes intermédios e exames 2005/2006*)

156. Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
Seja (y_n) a sucessão de termo geral $y_n = 1+\ln(x_n)$. Qual é o valor de $\lim y_n$?
(A) 2 (B) 3 (C) $1+e$ (D) $2+e$

(Intermédio 2)

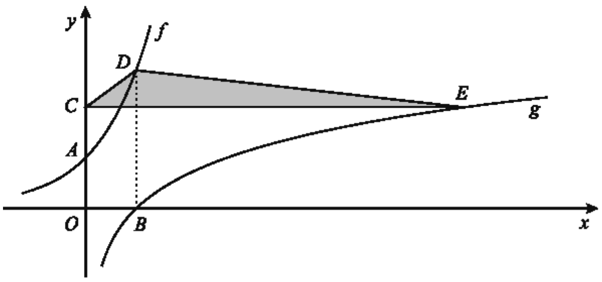
157. Indique o número real que é solução da equação $e^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$

(Intermédio 2)

158. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\log_3(1-x)\leq 1$
(A) $[-2,1[$ (B) $[-1,2[$ (C) $]-\infty,-2]$ (D) $[-2,+\infty[$

(Intermédio 2)

159. Na figura abaixo estão representadas, em referencial o. n. xOy: parte do gráfico da função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=e^x$; parte do gráfico da função *g*, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\ln x$. O ponto A é o ponto de intersecção do gráfico de *f* com o eixo Oy e o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico de *g* com o eixo Ox.



Na figura está também representado um triângulo [CDE]. O ponto C pertence ao eixo Oy, o ponto D pertence ao gráfico de *f* e o ponto E pertence ao gráfico de *g*. Sabe-se ainda que: a recta BD é paralela ao eixo Oy e a recta CE é paralela ao eixo Ox; $\overline{AC} = \overline{OA}$. Qual é a área do triângulo [CDE]?
(A) $\frac{(e-1)\ln 2}{2}$ (B) $\frac{(e^2-1)\ln 2}{2}$ (C) $\frac{e(e-2)}{2}$ (D) $\frac{e^2(e-2)}{2}$

(Intermédio 2)

160. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público, de acordo com a função $V(x) = e^{14-x}$ sendo x o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e $V(x)$ a quantidade vendida num mês (medida em litros).

a) A empresa tem um conjunto de despesas (compra ao produtor, empacotamento, publicidade, transportes, etc.) com a compra e a venda do azeite. Sabendo que cada litro de azeite vendido acarreta à empresa uma despesa total de 3 euros, justifique que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite, é dado por $L(x) = (x-3)e^{14-x}$

b) Utilize a calculadora para resolver graficamente o seguinte problema:
Entre que valores deve variar o preço de um litro de azeite de venda ao público para que o lucro mensal seja superior a dezasseis mil e quinhentos euros? Apresente os valores em euros, arredondados aos cêntimos (de euro).
Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

(Intermédio 2)

161. Considere a função *f*, de domínio $]0,+\infty[$, definida por $f(x)=\frac{1-\ln x}{x}$. Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

a) Mostre que $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(4e^2)$

b) Estude a função *f* quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

(Intermédio 2)

162. Com o objectivo de estudar as leis do aquecimento e do arrefecimento, realizou-se, num laboratório de Física, a seguinte experiência: aqueceu-se ao lume uma certa quantidade de água, durante cinco minutos; passado este tempo, apagou-se o lume e deixou-se a água a arrefecer. A temperatura da água foi sendo medida, ao longo do decorrer da experiência. Admita que: neste laboratório, a temperatura ambiente é constante; a temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida, era igual à temperatura ambiente; depois de se ter apagado o lume, a temperatura da água tende, com o passar do tempo, a igualar a temperatura ambiente. Em resultado da experiência, concluiu-se que a relação entre a temperatura da água e o tempo *t*, contado em minutos, a partir do instante em que se colocou a água ao lume, é modelada por uma, e uma só, das quatro funções, *a*, *b*, *c* e *d*, definidas a seguir:

$$a(t)=\begin{cases} 24-2t & se\ \ 0\leq t\leq 5 \\ 24-10\,e^{-0{,}04\,(t-5)} & se\ \ t>5\end{cases}$$

$$b(t)=\begin{cases} 12\,(t+2) & se\ \ 0\leq t\leq 5 \\ 24+70\,e^{-0{,}04\,(t-5)} & se\ \ t>5\end{cases}$$

$$c(t)=\begin{cases} 14\,(t+1) & se\ \ 0\leq t\leq 5 \\ 24+60\,e^{-0{,}04\,(t-5)} & se\ \ t>5\end{cases}$$

$$d(t)=\begin{cases} 12\,(t+2) & se\ \ 0\leq t\leq 5 \\ 24+60\,e^{-0{,}04\,(t-5)} & se\ \ t>5\end{cases}$$

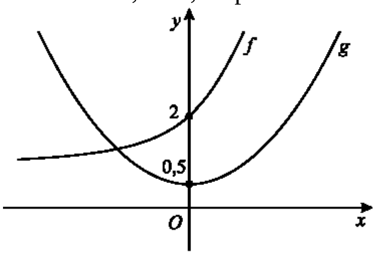
Qual das quatro funções é a correcta? Numa pequena composição, explique porque não pode ser nenhuma das outras três, indicando, para cada uma delas, uma razão pela qual a rejeita, explicando a sua inadequação, relativamente à situação descrita.

(Intermédio 2)

163. De uma função *g*, de domínio $]0,+\infty[$, sabe-se que: não tem zeros; a recta de equação $y=x+2$ é assimptota do seu gráfico. Seja *h* a função de domínio $]0,+\infty[$, definida por $h(x)=\frac{x^2}{g(x)}$. Prove que a recta de equação $y=x-2$ é assimptota do gráfico de *h*.

(Intermédio 2)

164. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, partes dos gráficos de duas funções, f e g, contínuas em $\mathbb{R}$. Tal como a figura sugere,
• nenhum dos gráficos intersecta o eixo Ox;
• os gráficos de g e de f intersectam o eixo Oy nos pontos de ordenadas 0,5 e 2, respectivamente.



Apenas uma das equações seguintes é impossível. Qual delas?
(A) f(x)+g(x)=0 (B) f(x)–g(x)=0
(C) f(x)×g(x)=1 (D) f(x)/g(x)=1

(1ªfase)

165. Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x)=\frac{e^x+5}{2+\cos x}$. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n+1}{n^2}$. Indique o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)$

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

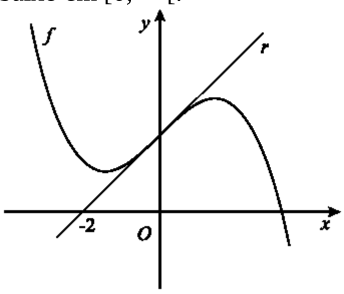
(1ªfase)

166. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por h(x)=$\frac{\ln(\sqrt{e^x})}{2}$. Qual das seguintes expressões pode também definir h?

(A) $\sqrt{x}$ (B) $\frac{x}{2}$ (C) $\frac{x}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{x}}{2}$

(1ªfase)

167. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial f. Tal como a figura sugere, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em]–∞,0] e voltada para baixo em [0,+∞[.

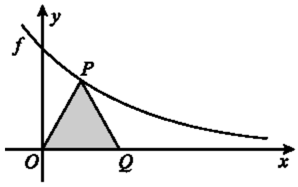


A recta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares e intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa –2. Sabendo que f' e f'' designam, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas de f, indique o valor de $f(0)+f'(0)+f''(0)$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(1ªfase)

168. Na figura estão representados: parte do gráfico da função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=e^{-x}$; um triângulo <u>isósceles</u> [OPQ] ($\overline{PO} = \overline{PQ}$), em que:
• O é a origem do referencial;
• P é um ponto do gráfico de f;
• Q pertence ao eixo das abcissas.



Considere que o P ponto se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f. O ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$. Seja A a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto P, a área do triângulo [OPQ].

a) Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, se tem $A(x)=xe^{-x}$

b) <u>Sem recorrer à calculadora</u>, estude a função A quanto à monotonia e conclua qual é o valor máximo que a área do triângulo [OPQ] pode assumir.

(1ªfase)

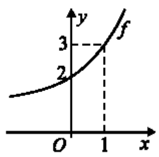
169. De uma certa função f, de domínio, sabe-se que:
• f é contínua;
• a recta de equação $y=x$ é assimptota do gráfico de f, quer quando $x \to +\infty$, quer quando $x \to -\infty$. Mostre que o gráfico da função g, definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x)=xf(x)$, não tem qualquer assimptota.

(1ªfase)

170. Considere a função f definida no intervalo [1,2] por $f(x) = \cos(x-1) + \ln x$. Para um certo valor real positivo a e para um certo valor real b, a função g, definida no intervalo [1,2] por $g(x) = af(x) + b$, tem por contradomínio o intervalo [4,5]. Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine os valores de a e de b, arredondados às centésimas. Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que tenha visualizado na calculadora, bem como coordenadas relevantes de algum, ou alguns, pontos. Sempre que, em valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve um mínimo de três casas decimais.

(1ªfase)

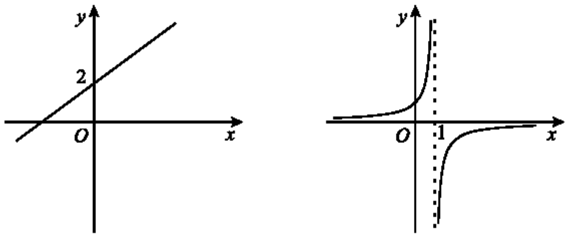
171. Sejam a e b dois números reais positivos. Na figura está parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=a^x + b$. Tal como a figura sugere, os pontos (0,2) e (1,3) pertencem ao gráfico de f. Quais são os valores de a e de b?



(A) $a = 2$ e $b = 1$ (B) $a = 2$ e $b = 3$
(C) $a = 3$ e $b = 2$ (D) $a = 3$ e $b = 1$

(2ªfase)

172. De duas funções, f e g, sabe-se que: • o gráfico de f é uma recta, cuja ordenada na origem é igual a 2; • o gráfico de g é uma hipérbole. Nas figuras seguintes estão representadas parte dessa recta e parte dessa hipérbole.

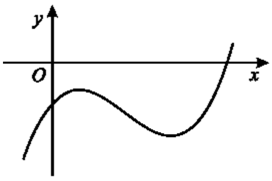


A recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico de g. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(A) 0 (B) 2 (C) $+\infty$ (D) $-\infty$

(2ªfase)

173. Na figura abaixo está parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$.



Sejam h' e h'' a primeira e a segunda derivadas de h, respectivamente. Admita que estas duas funções também têm domínio $\mathbb{R}$. Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A) $h(0) + h''(0)$ (B) $h(0) - h'(0)$

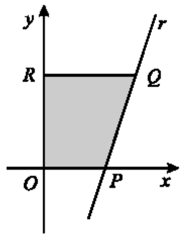
(C) $h'(0) - h''(0)$ (D) $h'(0) \times h''(0)$

(2ªfase)

174. Seja f a função, de domínio $]1,+\infty[$, definida por $f(x)= x + x\ln(x-1)$. <u>Sem recorrer à calculadora</u>, resolva as duas alíneas seguintes:

a) Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

b) Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, uma recta r e um trapézio [OPQR]. • Q tem abcissa 2 e pertence ao gráfico de f (o qual não está representado na figura); • r é tangente ao gráfico de f no ponto Q; • P é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox; • R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto Q. Determine a área do trapézio [OPQR]. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



(2ªfase)

175. Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0)=f(2)=0$ e $f(1)>0$. Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $]0,1[$ tal que $f(c)=f(c+1)$.

Sugestão: considere a função g: $[0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x)=f(x) - f(x+1)$

(2ªfase)

(*Testes intermédios e exames 2006/2007*)

176. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $e^{-x} > \frac{1}{e}$

(A) $]-\infty,-1[$ (B) $]-\infty,1[$ (C) $]-1,+\infty[$ (D) $]1,+\infty[$

(Intermédio 2)

177. Seja a um número real maior do que 1. Indique o valor de $\log_a(a \times \sqrt[3]{a})$

(A) 5/4 (B) 4/3 (C) 5/3 (D) 3/2

(Intermédio 2)

178. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que a recta de equação $y = 2x + 3$ é assimptota do gráfico de g. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{g(x)}{x} \times (g(x) - 2x)\right]$

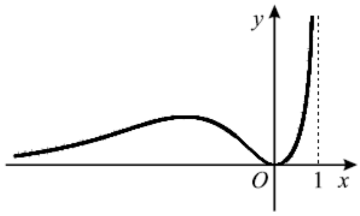
(A) 0 (B) 5 (C) 6 (D) $+\infty$

(Intermédio 2)

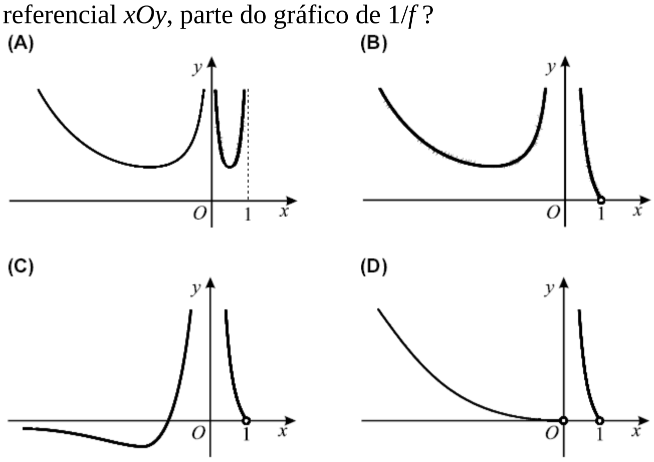
179. Na figura está representada, em referencial xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $]-\infty,1[$, contínua em todo o seu domínio. Tal como a figura sugere, tem-se:

• o gráfico de f contém a origem do referencial;

• as rectas de equações $y = 0$ e $x = 1$ são assimptotas do gráfico de f.



Em qual das opções seguintes poderá estar representada, em referencial xOy, parte do gráfico de $1/f$?



(Intermédio 2)

180. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x^3+x} & se \ \ x<0 \\ 2 & se \ \ x=0 \\ \dfrac{3x^2 - x\ln(x+1)}{x^2} & se \ \ x>0 \end{cases}$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, averigúe se a função *f* é contínua em $x = 0$. Justifique a sua resposta.

(Intermédio 2)

181. A acidez de uma solução é medida pelo valor do seu *pH*, que é dado por $pH = -\log_{10}(x)$ onde *x* designa a concentração de iões H_3O^+ , medida em *mol/dm*³. <u>Sem recorrer à calculadora</u>, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

a) Admita que o *pH* do sangue arterial humano é 7,4. Qual é a concentração (em *mol/dm*³) de iões H_3O^+, no sangue arterial humano? Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, com *b* inteiro e *a* entre 1 e 10. Apresente o valor de *a* arredondado às unidades.

b) A concentração de iões H_3O^+ no café é tripla da concentração de iões H_3O^+ no leite. Qual é a diferença entre o *pH* do leite e o *pH* do café? Apresente o resultado arredondado às décimas.

<u>Sugestão</u>: comece por designar por *l* a concentração de iões H_3O^+ no leite e por exprimir, em função de *l*, a concentração de iões H_3O^+ no café.

(Intermédio 2)

182. Considere, num referencial o. n. *xOy*, • a curva C, que representa graficamente a função *f*, de <u>domínio [0,1]</u> definida por $f(x) = e^x + 3x$; • a recta *r*, de equação $y = 5$

a) <u>Sem recorrer à calculadora</u>, justifique que a recta *r* intersecta a curva *C* em pelo menos um ponto.

b) <u>Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora</u>, visualize a curva C e a recta *r*, na janela [0,1]×[0,7] (janela em que $x \in [0,1]$ e $y \in [0,7]$). Reproduza, na sua folha de teste, o referencial, a curva C e a recta *r*, visualizados na calculadora. Assinale ainda os pontos O, P e Q, em que:

• O é a origem do referencial;

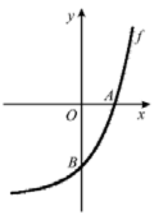
• P é o ponto de coordenadas (0,*e*);

• Q é o ponto de intersecção da curva C com a recta *r* ; relativamente a este ponto, indique, com duas casas decimais, a sua abcissa, que deve determinar com recurso à calculadora.

Desenhe o triângulo [OPQ] e <u>determine a sua área</u>. Apresente o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

(Intermédio 2)

183. Seja *c* um número real maior do que 1. Na figura está representada uma parte do gráfico da função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - c$.



Tal como a figura sugere

• A é o ponto de intersecção do gráfico de *f* com o eixo *Ox*

• B é o ponto de intersecção do gráfico de *f* com o eixo *Oy*

Mostre que: Se o declive da recta AB é *c* −1, então *c* =*e*

(Intermédio 2)

184. Identifique o valor de $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{4-x^2}$

(A) 0 (B) 1 (C) +∞ (D) −∞

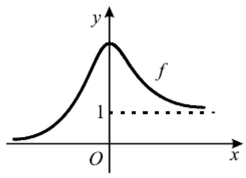
(1ªfase)

185. Sabendo que $\ln(x) - \ln(e^{1/3}) > 0$, um valor possível para *x* é

(A) 0 (B) −1 (C) 1 (D) 2

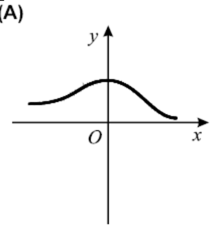
(1ªfase)

186. Na figura está parte da representação gráfica de uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}$.

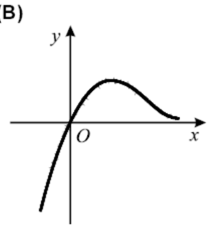


Tal como a figura sugere, o eixo *Ox* e a recta de equação $y = 1$ são assimptotas do gráfico de *f*. Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln[f(x)]$. Numa das opções seguintes está parte da representação gráfica da função *g*. Em qual delas?

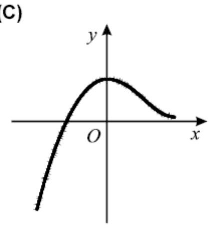
(A)



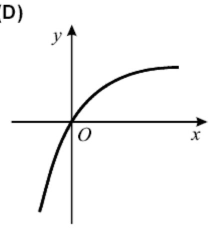
(B)



(C)



(D)



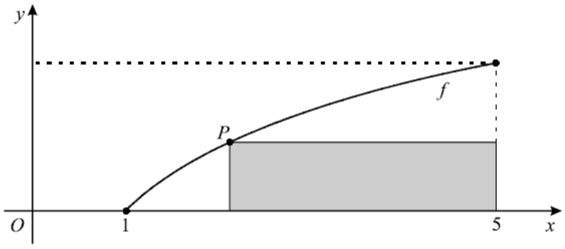
(1ªfase)

187. Seja *f* uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que 3 é um zero da função *f*. Seja *g* a função definida por $g(x) = f(x-1) + 4$ para qualquer número real *x*. Qual dos seguintes pontos pertence garantidamente ao gráfico da função *g* ?

(A) (2,4) (B) (4,4) (C) (4,8) (D) (1,7)

(1ªfase)

188. Seja *f* a função, de domínio [1,5], definida por $f(x) = \ln x$. Na figura está representado, em referencial ortonormado *xOy*, o gráfico da função *f*.



Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de *f*. Para cada posição do ponto P, considere o rectângulo em que um dos lados está contido no eixo *Ox*, outro na recta de equação $x = 5$ e os outros dois nas rectas vertical e horizontal que passam pelo ponto P. Exprima a área do rectângulo em função da abcissa de P, e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de P (aproximada às centésimas) para a qual a área do rectângulo é máxima. Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora:
- o gráfico obtido; - o ponto de ordenada máxima e respectivas coordenadas.

(1ªfase)

189. Admita que a intensidade da luz solar, *x* metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por $I(x) = ae^{-bx}$ $(x \geq 0)$. *a* e *b* são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efectuada a medição. Sempre que se atribui um valor a *a* e um valor a *b*, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$

a) Medições efectuadas, num certo instante e em determinado local do oceano Atlântico, mostraram que, a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água. Determine o valor de *b*, para esse instante e local. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

b) Considere agora $b = 0,05$ e $a = 10$. Estude essa função quanto à monotonia e existência de assimptotas do seu gráfico. Interprete os resultados obtidos no contexto da situação descrita.

(1ªfase)

190. Considere um rectângulo cuja área é igual a 5. Qual das seguintes expressões representa o perímetro deste rectângulo, em função do comprimento, *x*, de um dos seus lados?

(A) $2x + \frac{10}{x}$ (B) $2x + \frac{2x}{5}$ (C) $2x + \frac{5}{x}$ (D) $x + \frac{5}{x}$

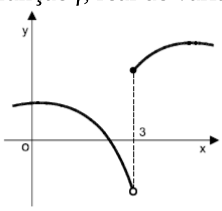
(2ªfase)

191. Seja $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 3 - 2\cos x$. Indique o valor de *x* para o qual *f*(*x*) é máximo.

(A)0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

(2ªfase)

192. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função *f*, real de variável real.



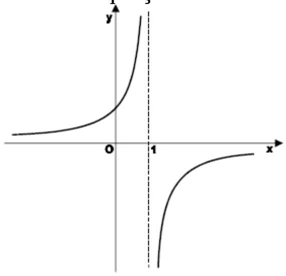
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = 0$ (B) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$

(C) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{2}$ (D) Não existe $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)}$

(2ªfase)

193. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função *g*, real de variável real. Tal como a figura sugere, a recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico da função *g*.



Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = x - 1$. O valor do $\lim\limits_{x\to 1} \frac{h(x)}{g(x)}$ é:

(A) $-\infty$ (B) $+\infty$ (C) 0 (D) 1

(2ªfase)

194. Considere a função *g*, definida no intervalo]1,7[por $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \ln x}{x}$. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, visualize o gráfico da função *g* e reproduza-o na sua folha de prova. Com base nesse gráfico e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema: *Seja g' a função derivada de g. O conjunto solução da inequação* $g'(x) < 0$ *é um intervalo aberto]a,b[. Determine os valores de a e de b. Apresente os resultados arredondados às centésimas.* Justifique a sua resposta.

(2ªfase)

195. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função *h*, de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

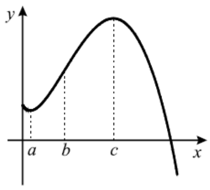


Figura 1

Em cada uma das figuras abaixo está representada parte do gráfico de uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$. Uma das funções representadas é *h'*, primeira derivada de *h*, e a outra é *h''*, segunda derivada de *h*.

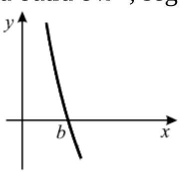


Figura 2

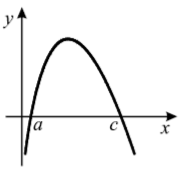


Figura 3

Numa pequena composição, explique em qual das figuras está representado o gráfico da primeira derivada e em qual está representado o gráfico da segunda derivada. Na sua composição, deve referir-se à variação de sinal das funções *h'* e *h''*, relacionando-a com características da função *h* (monotonia e sentido das concavidades do seu gráfico).

(2ªfase)

196. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln(x^2)$. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos:

a) Determine os pontos de intersecção do gráfico de *f* com o eixo *Ox*

b) Estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

(2ªfase)