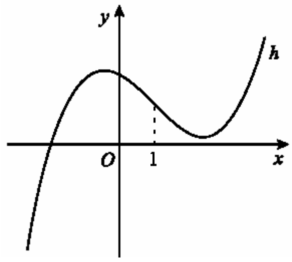
(*Exames Nacionais 2004*)

136. Para um certo valor de k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função g, definida por g(x)= $\begin{cases} k+\cos x & se\ x\leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & se\ x>0 \end{cases}$. Qual é o valor de k?

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(1ª fase)

137. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função polinomial h.



O ponto de abcissa 1 é o único ponto de inflexão de h. Qual das expressões seguintes pode definir h'', segunda derivada da função h?

(A) $(x\text{-}1)^2$ (B) $(1+x)^2$ (C) x-1 (D) 1-x

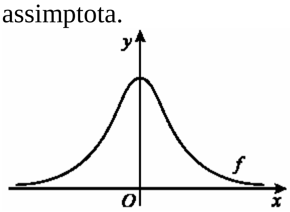
(1ª fase)

138. Sabe-se que $\log_2 a$= 1/5. Qual é o valor de $\log_2(a^5/8)$?

(A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) -4

(1ª fase)

139. Na figura abaixo está parte da representação gráfica de uma função f, par e positiva, da qual a recta de equação y=0 é assimptota.



Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}$?

(A) 0 (B) 1 (C) +∞ (D) -∞

(1ª fase)

140. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por f(x)=$1+3x^2e^{-x}$

a) Sem recorrer à calculadora, mostre que a função f tem um único mínimo relativo e determine-o.

b) Sem recorrer à calculadora (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), mostre que, no intervalo]–1,0[, existe pelo menos um objecto cuja imagem, por meio de f, é 4.

(1ª fase)

141. Indique o valor de p para o qual se verifica a igualdade de $\log_p 16=4$

(A) -4 (B) 4 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$

(2ª fase)

142. Sabe-se que:

• o nível de álcool no sangue de uma pessoa, uma hora depois de ter tomado uma bebida alcoólica, é, numa certa unidade, igual ao quociente entre o peso do álcool ingerido (em gramas) e 70% do peso dessa pessoa (em quilogramas);.

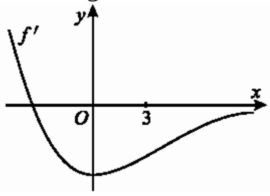
• num decilitro de um certo tipo de vinho existem 5 gramas de álcool.

Qual das expressões seguintes dá o nível de álcool no sangue de uma pessoa, em função do seu peso (em quilogramas), uma hora depois de essa pessoa ter bebido dois decilitros desse vinho?

(A) $\frac{10}{70x}$ (B) $\frac{10}{0{,}7x}$ (C) $\frac{2}{70x}$ (D) $\frac{2}{0{,}7x}$

(2ª fase)

143. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Na figura junta encontra-se parte do gráfico de f ', função derivada de f.



Sabe-se ainda que f(0)=2. Qual pode ser o valor de f(3)?

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 7

(2ª fase)

144. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por f($x$)= $\frac{e^x-1}{x}$

a) Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes:

a_1) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

a_2) Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

b) O conjunto solução da inequação f(x)≤3+ln$x$ é um intervalo fechado [a,b]. Recorrendo à sua calculadora, determine, graficamente, valores para a e b, arredondados às centésimas.

Nota: apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o gráfico ou gráficos obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

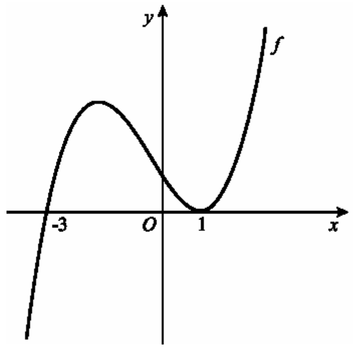
(2ª fase)

145. Considere, para cada α∈]0,1[, a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por f(x)=x^α. Prove que, qualquer que seja o valor de α∈]0,1[, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2005*)

146. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f, contínua em $\mathbb{R}$. A função f tem apenas dois zeros: –3 e 1.



Seja g a função definida por $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função g?

(A) $]-\infty,1]$ (B) $\mathbb{R}\backslash\{-3,1\}$ (C) $]-\infty,-3]$ (D) $[-3,+\infty[$

(1ª fase)

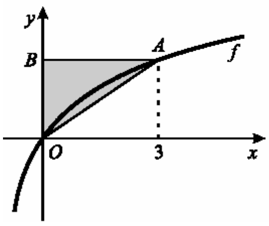
147. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, contínua em todo o seu domínio. Sabe-se que: $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x) - x] = 0$

Em cada uma das opções seguintes, estão escritas duas equações, representando cada uma delas uma recta. Em qual das opções as duas rectas assim definidas são as assimptotas do gráfico da função f?

(A) y=x e y=2 (B) y=2 e x=5
(C) y=x e x=5 (D) y=–3 e x=2

(1ª fase)

148. Na figura junta, está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, definida, em $]-1,+\infty[$, por $f(x)=\log_2 x +1$. Na mesma figura, está também representado um triângulo rectângulo [ABO].



O ponto A tem abcissa 3 e pertence ao gráfico de f. O ponto B pertence ao eixo Oy. Qual é a área do triângulo [ABO]?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(1ª fase)

149. Admita que o número de elementos de uma população de aves, t anos após o início de 1970, é dado aproximadamente por $P(t)=5{,}2\times 10^7 \times e^{(N-M)t}$, $t\geq 0$, em que N e M são duas constantes, denominadas, respectivamente, *taxa de natalidade* e *taxa de mortalidade* da população.

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

a) Sabendo que N<M, calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} P(t)$ e interprete o resultado obtido, no contexto do problema.

b) No início de 2000, a população era metade da que existia no início de 1970. Sabendo que a *taxa de natalidade* é 7,56, determine a *taxa de mortalidade*. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

(1ª fase)

150. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que a sua derivada é dada por $f'(x)= 2+x\ln x$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$

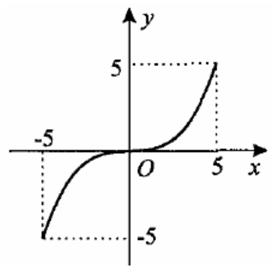
Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes:

a) Seja r a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1. Seja P o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox. Sabendo que f(1)=3, determine a abcissa do ponto P.

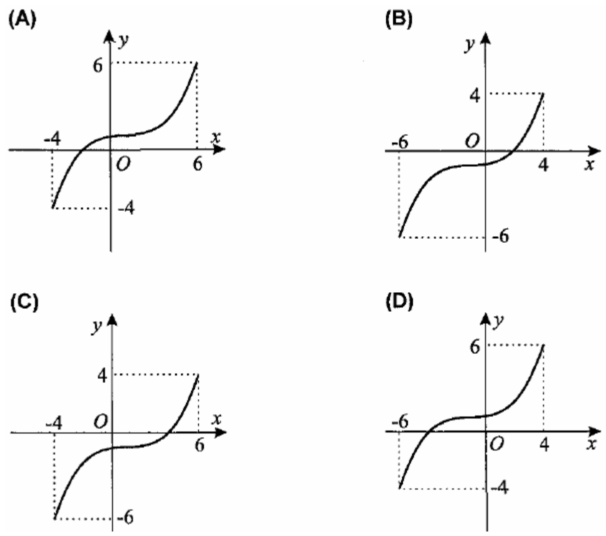
b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

(1ª fase)

151. Considere a função f, de domínio [–5,5] e contradomínio [–5,5], representada graficamente na figura junta.



Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g, definida por g(x)=1+f(x+1)?



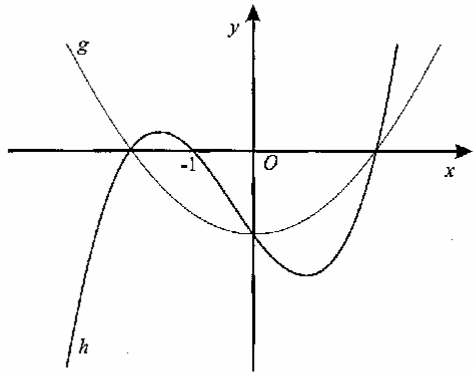
(2ª fase)

152. De uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que f(3)=8 e f(7)=1. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $1\leq f(6)\leq 8$ (B) A função f não tem zeros em [3,7]
(C) f(4)>f(5) (D) 2 pertence ao contradomínio de f

(2ª fase)

153. Na figura estão representadas partes dos gráficos de 2 funções polinomiais, g e h, ambas de domínio $\mathbb{R}$.

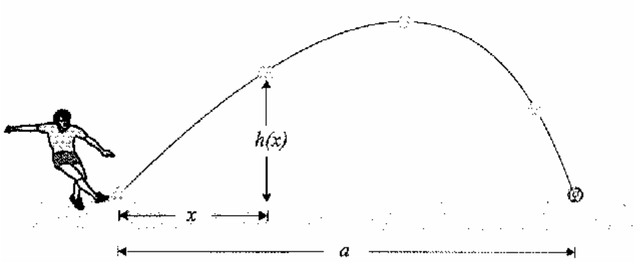


Qual das expressões seguintes pode definir uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, tal que f×g=h?

(A) x–1 (B) –x+1 (C) x+1 (D) –x–1

(2ª fase)

154. Na figura está representada a trajectória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador da selecção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.



Designou-se por *a* a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu. Considere a função h definida em [0,*a*] por h(x)=2x+10ln(1–0,1x).

Admita que h(x) é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projecção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.

a) Recorrendo à calculadora, determine o valor de *a*, arredondado às centésimas. Explique como procedeu, apresentando todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora.

b) Sem utilizar a calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, estude a função h quanto à monotonia e conclua qual foi a maior altura que a bola atingiu, relativamente ao solo, depois de pontapeada. Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

c) Sem utilizar a calculadora, mostre que a taxa de variação média da função h, no intervalo [1,3], é $\ln[e^2(7/9)^5]$

(2ª fase)

155. No início de 1972, havia 400 lobos num determinado parque natural. As medidas de protecção a lobos fizeram com que o referido nº aumentasse continuamente. Os recursos do parque permitem que o nº de lobos cresça até bastante perto de um milhar, mas não permitem que este valor seja ultrapassado. Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função P que dá o nº aproximado de lobos existentes no parque natural, t anos após o início de 1972.

(A) $\frac{1000}{1+e^{-0,5t}}$ (B) $\frac{1000}{1+1,5e^{-0,5t}}$

(C) $\frac{1200}{1+2e^{-t}}$ (D) $1000-\frac{600(t^3+1)}{e^t}$

Qual é a expressão correcta? Numa pequena composição, com cerca de 10 linhas, explique as razões que o levam a rejeitar as outras 3 expressões (apresente 3 razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada).

Nota: poder-lhe-á ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtidos(s).

(2ª fase)

E1. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, definida por $f(x)=\frac{x-2}{x-3}$. Em cada uma das opções seguintes estão escritas 2 equações. Em qual das opções as 2 equações definem as asssimptotas do gráfico de *f* ?

(A) *x*=2 e *y*=1 (B) *x*=2 e *y*=2

(C) *x*=3 e *y*=1 (D) *x*=3 e *y*=2

(Época especial)

E2. Para um certo valor de *k*, é contínua em $\mathbb{R}$ a função *f* definida por $f(x)=\begin{cases} k+\operatorname{sen} x & se\ x\leq 0 \\ \frac{3x+\ln(1+x)}{x} & se\ x>0 \end{cases}$. Qual é valor de *k* ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

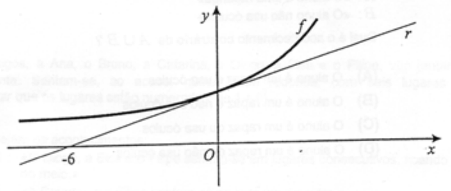
(Época especial)

E3. De uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua derivada é dada por $f'(x)=x^3-3x+1$. Em qual dos conjuntos seguintes o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo?

(A)]–1,1[(B)]–∞,–1[(C)]0,3[(D)]–∞,0[

(Época especial)

E4. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função *f*, de domínio R, definida por $f(x)=e^{ax}+1$ (*a* é uma constante real positiva).



Na figura está também representada a recta *r*, que é tangente ao gráfico de *f* no ponto em que este intersecta o eixo Oy. A recta *r* intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa –6. Qual é o valor de *a*?

(A) ½ (B) 1/3 (C) 2/3 (D) 3/2

(Época especial)

E5. O tempo t, medido em anos, que um planeta demora a realizar uma translação completa em torno do Sol, está relacionado com a distância média, *d*, desse planeta ao Sol, medida em milhões de quilómetros, por meio da fórmula $2\ln(t)=k+3\ln(d)$ (*k* é uma constante real). Sem usar a calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as 2 alíneas seguintes:

a) Sabe-se que: a distância média de Urano ao Sol é (aproximadamente) o dobro da distância média de Saturno ao Sol; o planeta Urano demora (aproximadamente) 84 anos a realizar uma translação completa em torno do Sol.
Determine quanto tempo demora o planeta Saturno a realizar uma translação completa em torno do Sol.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

b) Sabendo que a distância média da Terra ao Sol é, aproximadamente, de 149,6 milhões de km, determine o valor de k (apresente o resultado arredondado às unidades).

(Época especial)

E6. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que: f tem derivada finita em todos os pontos de $\mathbb{R}$; $f(0)=-1$; f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^-$ e é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=[f(x)]^2$. Prove que 1 é o mínimo da função g.

(Época especial)