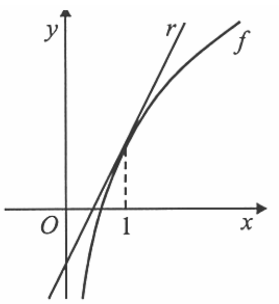
(*Exames Nacionais 2002*)

105. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy: parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=1+2\ln x$; a recta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1. Qual é o declive da recta r?

(A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4



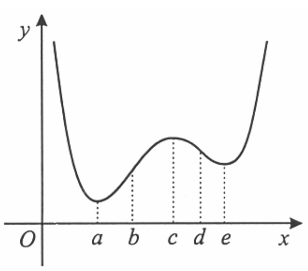
(1ª chamada)

106. Seja h uma função <u>contínua</u>, de domínio R. Qual dos seguintes conjuntos <u>não pode</u> ser o contradomínio de h?

(A) R (B) R\{0} (C) R^- (D)]0,1[

(1ª chamada)

107. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio R.
Numa das alternativas seguintes estão os quadros de sinais de f´ e de f´´. Em qual delas?



(A)

x		a		c		e	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−

x		b		d	
$f''(x)$	+	0	−	0	+

(B)

x		a		c		e	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−

x		b		d	
$f''(x)$	−	0	+	0	−

(C)

x		a		c		e	
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+

x		b		d	
$f''(x)$	+	0	−	0	+

(D)

x		a		c		e	
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+

x		b		d	
$f''(x)$	−	0	+	0	−

(1ª chamada)

108. O gráfico da função f, de domínio R, definida por $f(x)=0{,}1+0{,}2e^{0{,}3x}$, tem uma única assimptota. Qual das condições seguintes é uma equação dessa assimptota?

(A) y=0 (B) y=0,1 (C) y=0,2 (D) y=0,3

(1ª chamada)

109. Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos. Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respectivamente, por $A(t)=4t^3e^{-t}$ e $C(t)=2t^3e^{-0,7t}$.
A variável t designa o tempo, medido em horas, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ($t \in [0, 12]$).

a) Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

a_1) Determine o valor da concentração deste antibiótico no sangue da Ana, quinze minutos depois de ela o ter tomado. Apresente o resultado, em miligramas por litro de sangue, arredondado às centésimas.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

a_2) No instante em que as duas pessoas tomam o medicamento, as concentrações são iguais (por serem nulas). Determine quanto tempo depois as concentrações voltam a ser iguais. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

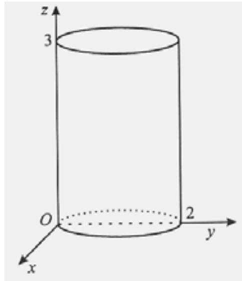
b) Considere as seguintes questões:
1. Quando a concentração ultrapassa 7,5 miligramas por litro de sangue, o medicamento pode ter efeitos secundários indesejáveis. Esta situação ocorrerá, neste caso, com alguma destas duas pessoas? Caso afirmativo, com quem? E em quantos miligramas por litro o referido limiar será ultrapassado?
2. Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 1 miligrama por litro de sangue, é necessário tomar nova dose do medicamento. Quem deve tomá-la em primeiro lugar, a Ana ou o Carlos? E quanto tempo antes do outro?
Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar estas duas questões. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas)

(1ª chamada)

110. De uma função f, de domínio R, sabe-se que: f(5)=0; f é uma função par. Seja g a função, de domínio R, definida por g(x)=f(x+3). Qual dos seguintes pode ser o conjunto dos zeros de g?
(A) {0,3} (B) {3,5} (C) {-8,2} (D) {2,8}
(2ª chamada)

111. De uma função h, de domínio R^-, sabe-se que a recta de equação y=2 é assimptota do seu gráfico. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{e^x}$?
(A) $+\infty$ (B) $-\infty$ (C) 0 (D) 2
(2ª chamada)

112. Na figura está representado, em referencial o.n. Oxyz, um cilindro de revolução. Tem –se que: a altura do cilindro é 3; uma das bases está contida no plano xOy, sendo o seu centro o ponto (0,1,0) e o seu raio igual a 1. Seja $b\in]0,2[$ e seja f a função que, a cada valor de b, faz corresponder o perímetro da secção produzida no cilindro pelo plano de equação y=b. Qual é o máximo da função f?

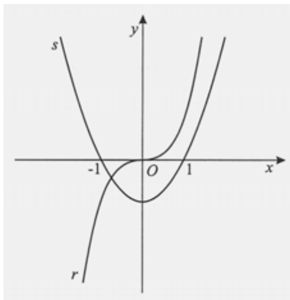


(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12
(2ª chamada)

113. O nível N de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade I, medida em watt por metro quadrado, de acordo com a igualdade $N=10\log_{10}(10^{12}I)$ para I>0.
Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as 2 alíneas seguintes.
a) Verifique que $N=120+10\log_{10}I$
b) Admita que o nível de ruído de um avião a jacto, ouvido por uma pessoa que se encontra na varanda de um aeroporto, é de 140 decibéis. Determine a intensidade desse som, em watt por metro quadrado.
(2ª chamada)

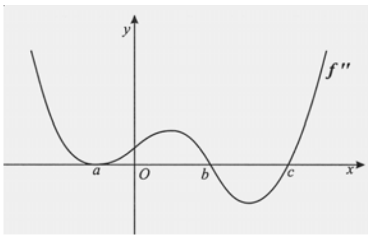
114. Seja f uma função contínua, de domínio [0,5] e contradomínio [3,4]. Seja g a função, de domínio [0,5], definida por g(x)=f(x)-x. Prove que a função g tem, pelo menos, um zero.
(2ª chamada)

115. Na figura estão parcialmente representados os gráficos de 2 funções polinomiais, r e s.
Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função r/s?



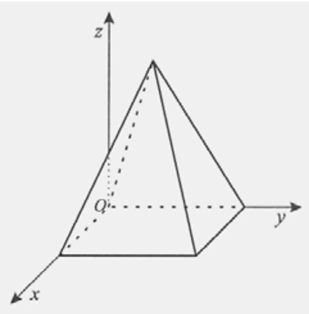
(A) R (B) R\{0}
(C) R\{-1,1} (D) R\{-1,0,1}
(2ª fase)

116. Seja f uma função de domínio R. Na figura está representada parte do gráfico de f´´, 2ª derivada da função f.
Relativamente ao gráfico da função f, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

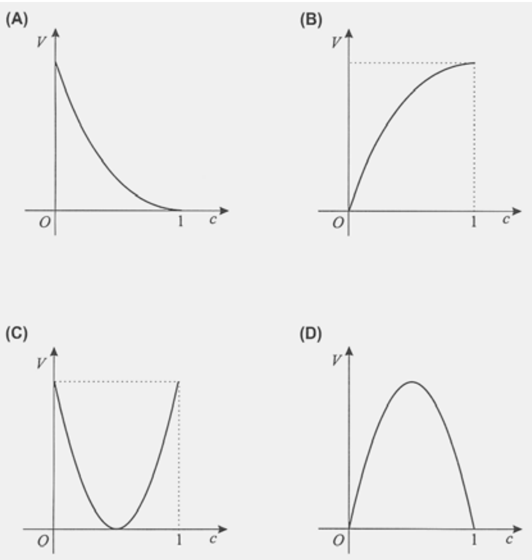


(A) O ponto de abcissa *a* é um ponto de inflexão.
(B) O ponto de abcissa *c* é um ponto de inflexão.
(C) A concavidade está voltada para baixo no intervalo [0,b]
(D) A concavidade está sempre voltada para cima
(2ª fase)

117. Considere, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide quadrangular regular, de altura 1, cuja base está contida no plano xOy.



Para cada c∈[0,1], seja V(c) o volume da parte da pirâmide constituída pelos pontos cuja cota é <u>superior ou igual</u> a c. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função V?



(2ª fase)

118. Uma nova empresa de refrigerantes pretende lançar no mercado embalagens de sumo de fruta, com capacidade de <u>2 litros</u>. Por questões de *marketing*, as embalagens deverão ter a forma de um <u>prisma quadrangular regular</u>.

a) Mostre que a área total da embalagem é dada por $A(x) = \frac{2x^3+8}{x}$

(x é o comprimento da aresta da base, em dm)

<u>Nota</u>: recorde que 1 litro=1 dm^3

b) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, mostre que existe um valor x para o qual a área total da embalagem é mínima e determine-o.

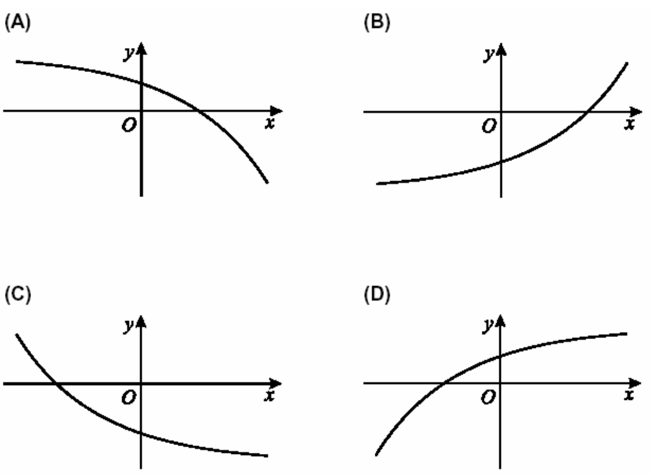
(2ª fase)

119. Seja f uma função de domínio R, com derivada finita em todos os pontos do domínio, e <u>crescente</u>. Sejam a e b 2 quaisquer nºs reais. Considere as rectas r e s, tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e b, respectivamente. Prove que as rectas r e s <u>não</u> podem ser perpendiculares.

(2ª fase)

(*Exames Nacionais 2003*)

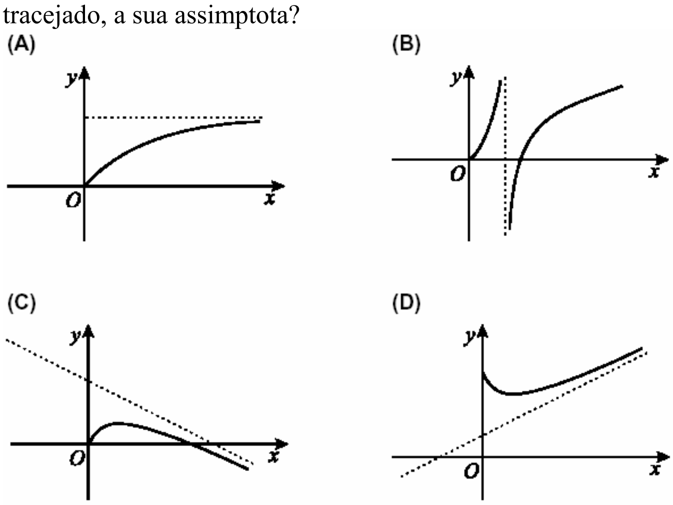
120. Seja f uma função de domínio R. Sabe-se que a primeira e a segunda derivadas de f são negativas em R. Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f?



(1ª chamada)

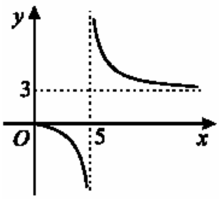
121. Considere uma função g, de domínio [0,+∞[, contínua em todo o seu domínio. Sabe-se que: O gráfico de g tem uma única assimptota; $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$

Em qual das alternativas seguintes podem estar representadas, em referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função g e, a tracejado, a sua assimptota?



(1ª chamada)

122. Na figura está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio [0,5[∪]5,+∞[. As rectas de equações x=5 e y=3 são as únicas assimptotas do gráfico de h.

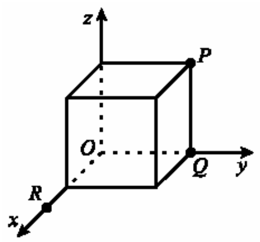


Indique o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{3+e^{-x}}$

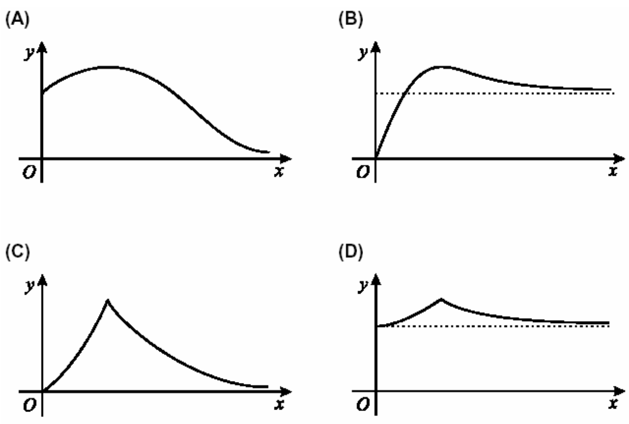
(A) 0 (B) 1 (C) 5 (D) +∞

(1ª chamada)

123. Na figura está representado um cubo, em referencial o. n. xOy. Três das arestas do cubo estão contidas nos eixos do referencial. Os pontos P e Q são dois dos vértices do cubo, pertencentes ao plano yOz. Admita que um ponto R, partindo da origem do referencial, se desloca ao longo do semieixo positivo Ox.



Seja g a função que faz corresponder, à abcissa x do ponto R, a área da secção produzida no cubo pelo plano PQR.
Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função g?



(1ª chamada)

124. Num laboratório, foi colocado um purificador de ar. Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois. Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar diminuiu, enquanto o purificador esteve ligado. Uma vez o purificador desligado, o nível de poluição do ar começou de imediato a aumentar.
Admita que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por $P(t) = 1 - \dfrac{\ln(t+1)}{t+1}$, t ∈ [0,24]
Nas duas alíneas seguintes, sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.
a) Qual é o nível de poluição à uma hora e trinta minutos da tarde? Apresente o resultado na unidade considerada, arredondado às décimas.
b) Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:
Quanto tempo esteve o purificador de ar ligado?
Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

(1ª chamada)

125. Prove que, para qualquer função quadrática g , existe um e um só ponto do gráfico onde a recta tangente é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

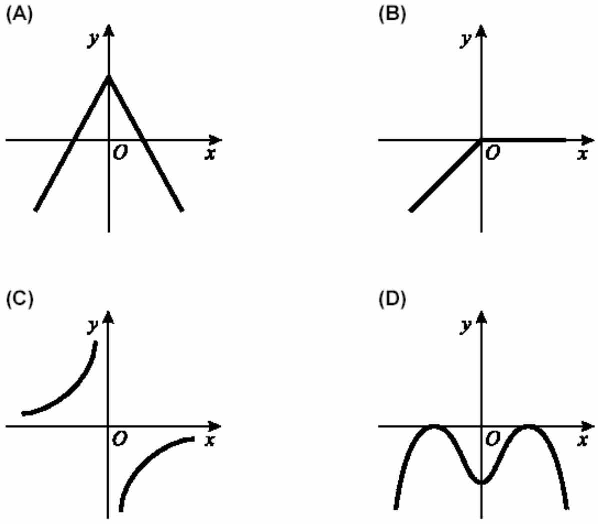
(1ª chamada)

126. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\log_2 x}{e^x - 1}$

(A) 0 (B) 1 (C) -∞ (D) +∞

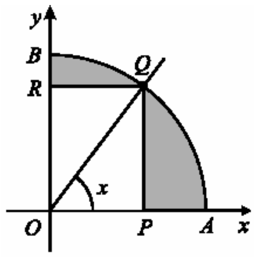
(2ª chamada)

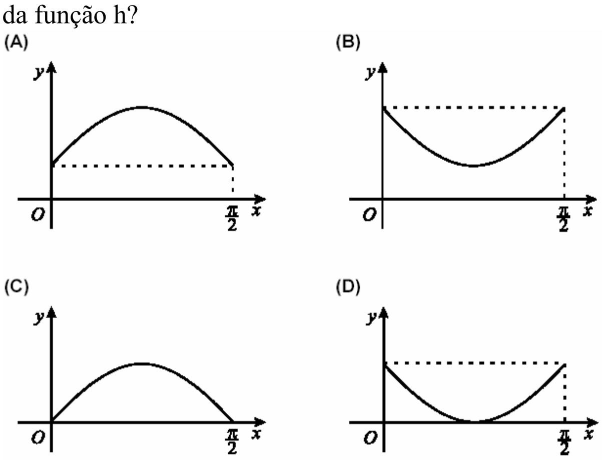
127. Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico de uma função par, de domínio R e contradomínio]-∞,0]?



(2ª chamada)

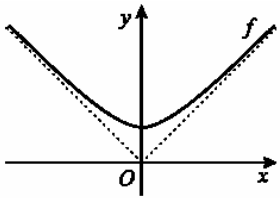
128. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco de circunferência AB, de centro na origem do referencial. O ponto Q move-se ao longo desse arco. Os pontos P e R, situados sobre os eixos Ox e Oy, respectivamente, acompanham o movimento do ponto Q, de tal forma que o segmento de recta [PQ] é sempre paralelo ao eixo Oy e o segmento de recta [QR] é sempre paralelo ao eixo Ox. Para cada posição do ponto Q, seja x a amplitude do ângulo AOQ e seja h(x) a área da região sombreada. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h?

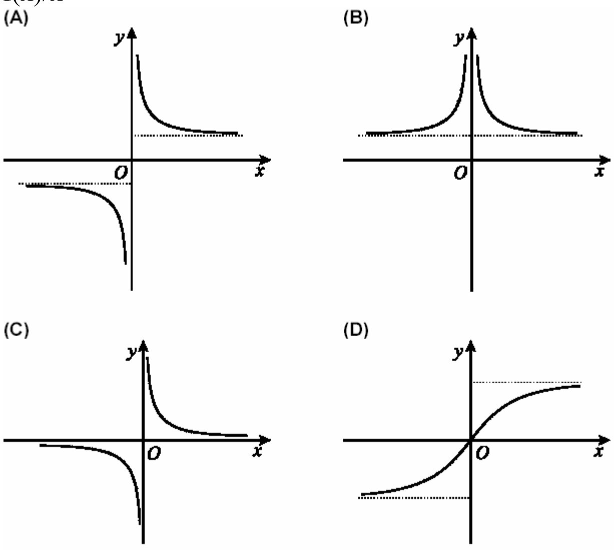




(2ª chamada)

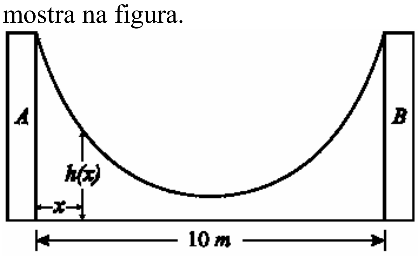
129. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função f de domínio R, contínua em todo o seu domínio. A bissectriz dos quadrantes pares e a bissectriz dos quadrantes ímpares são assimptotas do gráfico de f. Indique em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g definida por g(x)=f(x)/x





(2ª chamada)

130. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes, A e B, distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura.



Considere a função definida por
$h(x) = 15 - 4\ln(-x^2 + 10x + 11)$

Admita que h(x) é a altura, em metros, do ponto da rampa situado x metros à direita da parede A.

a) Determine a altura da parede A. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) Sem recorrer à calculadora, estude a função h quanto à monotonia e conclua daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante das duas paredes que a altura da rampa é mínima.

c) Mostre, analiticamente, que h(5-x)=h(5+x). Interprete esta igualdade no contexto da situação descrita.

(2ª chamada)

131. De uma função f, de domínio R, sabe-se que a sua derivada é dada por $f'(x) = (x+1)\,e^x - 10\,x$

Seja A o único ponto de inflexão do gráfico de f. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a abcissa do ponto A, arredondada às décimas. Explique como procedeu. Inclua, na sua explicação, o(s) gráfico(s) que obteve na calculadora.

(2ª chamada)

132. De uma função f, de domínio [-4,5] e contínua em todo o seu domínio, sabe-se que: f(-4)=6; f(2)=-1; f(5)=1; f é estritamente decrescente no intervalo [-4,2]; f é estritamente crescente no intervalo [2,5].

Quantas soluções tem a equação f(x)=0?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2ª fase)

133. Seja g uma função, de domínio A, definida por $g(x)=\ln(1-x^2)$. Qual dos seguintes poderá ser o conjunto A?

(A)]-e+1,e-1[(B)]-1,1[(C)]0,+∞[(D)]-∞,1[

(2ª fase)

134. Seja f uma função de domínio R, e seja g a função definida por g(x)=f(x+1). A recta de equação y=2x+4 é a única assimptota do gráfico de f. Qual das seguintes é uma equação da única assimptota do gráfico de g?

(A) y=2x+6 (B) y=2x+4 (C) y=2x-4 (D) y=2x-6

(2ª fase)

135. Admita que, ao longo dos séculos XIX e XX e dos primeiros anos do século XXI, a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, aproximadamente, por $p(t) = 3,5 + \dfrac{6,8}{1+12,8e^{-0,036t}}$

(considere que t é medido em anos e que o instante t=0 corresponde ao início do ano 1864).

a) De acordo com este modelo, qual será a população de Portugal Continental no final do presente ano (2003)? Apresente o resultado em milhões de habitantes, arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

b) Sem recorrer à calculadora (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema: De acordo com este modelo, em que ano a população de Portugal Continental foi de 3,7 milhões de habitantes?

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

(2ª fase)