

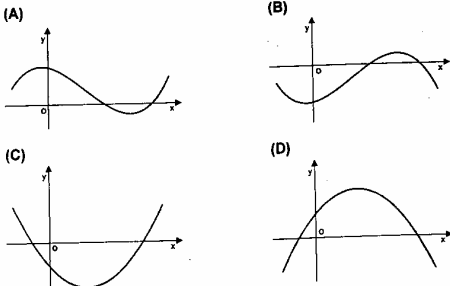
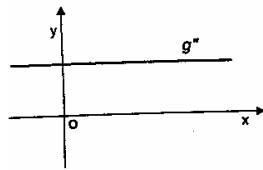
(Exames Nacionais 2000)

65. Sejam a, b e c 3 números reais tais que $\log_a b = c$. Qual é o valor de $\log_a(ab)$?

- (A) $1+c$ (B) $a+c$ (C) ac (D) $a+bc$

(Prova Modelo)

66. Na figura ao lado está representado o gráfico de g'' , 2ª derivada de uma certa função g . Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g ?



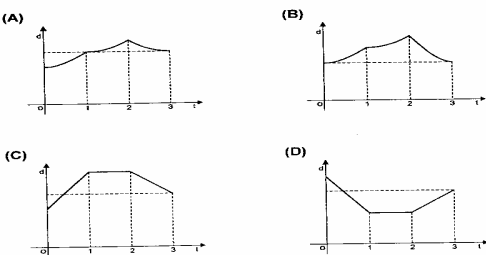
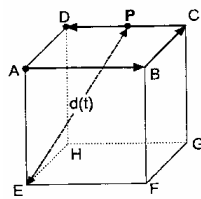
(Prova Modelo)

67. De uma função f , contínua em \mathbb{R} , sabe-se que: f é estritamente crescente; $f(0)=1$; o eixo Ox e a bissectriz dos quadrantes ímpares são assíntotas do gráfico de f . Qual é o contradomínio de f ?

- (A) $[1, +\infty[$ (B) $]-\infty, 1]$ (C) $]0, +\infty[$ (D) $]-\infty, 0[$

(Prova Modelo)

68. Na figura está representado um cubo. Considere que um ponto P se desloca ao longo do trajecto que a figura sugere: P parte de A e percorre sucessivamente as arestas $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$, terminando o percurso em D . O ponto P demora um segundo a percorrer cada uma das arestas. Seja $d(t)$ a distância do ponto P ao ponto E , t segundos após a partida. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d ?



(Prova Modelo)

69. Um laboratório farmacêutico lançou no mercado um novo analgésico: o AntiDor. A concentração deste medicamento, em decigramas por litro de sangue, t horas após ser administrado a uma pessoa, é dada por

$$C(t) = t^2 e^{-0,6t} \quad (t \geq 0)$$

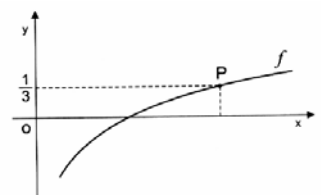
a) Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determine o valor de t para o qual é máxima a concentração de AntiDor no sangue de uma pessoa que o tenha tomado. Calcule o valor dessa concentração máxima, apresentando o resultado na unidade considerada, com aproximação às décimas.

b) O mesmo laboratório realizou uma campanha de promoção deste medicamento, baseada no slogan: "AntiDor-acção rápida e prolongada". Numa breve composição, de 60 a 120 palavras, comente o slogan, tendo em conta que: para a maioria das dores, o Antidor só produz efeito se a sua concentração for superior a 1 dg por litro de sangue: de acordo com uma associação de defesa do consumidor, um bom analgésico deve começar a produzir efeito, no máximo, meia hora após ter sido tomado, e a sua acção deve permanecer durante, pelo menos, 5 horas (após ter começado a produzir efeito).

Nota: na resolução desta questão, deve utilizar as capacidades gráficas da sua calculadora e enriquecer a sua composição com o traçado de 1 ou mais gráficos.

(Prova Modelo 2000)

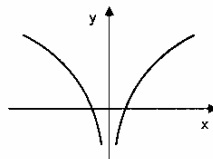
70. Na figura está parte da representação gráfica da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \log_8 x$. P é um ponto do gráfico de f , que tem ordenada $1/3$. Qual é a abcissa de P ?



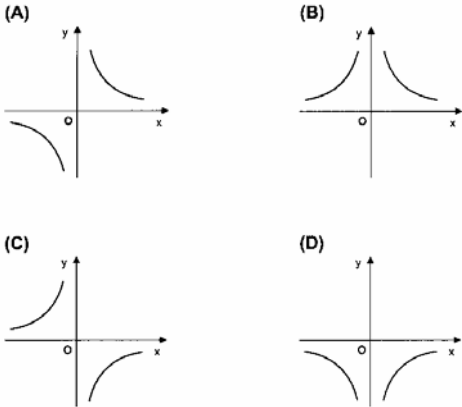
- (A) $8/3$ (B) 1 (C) $\ln(8/3)$ (D) 2

(1ª chamada)

71. Na figura está parte da representação gráfica da função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g' , derivada de g ?



(1ª chamada)

72. Um tanque tem a forma de um paralelepípedo rectângulo, com 7 m de comprimento, 5 m de largura e 4 m de altura. Admita que o tanque está vazio. Num certo instante, é aberta uma torneira que verte água para o tanque, à taxa de 2 m³ por hora, até este ficar cheio. Qual é a função que dá a altura, em metros, da água no tanque, t horas após a abertura da torneira?

- (A) $h(t)=4-2t, t \in [0,70]$
- (B) $h(t)=2t/35, t \in [0,70]$
- (C) $h(t)=4-2t, t \in [0,140]$
- (D) $h(t)=2t/35, t \in [0,140]$

(1ª chamada)

73. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x)=e^x(x^2+x)$. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, sem utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

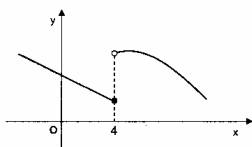
- a) Verifique que $f'(x)=e^x(x^2+3x+1)$ e determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f , no ponto de abcissa 0.
- b) Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

(1ª chamada)

74. Considere uma função f de domínio \mathbb{R}^+ . Admita que f é positiva e que o eixo Ox é assíntota do gráfico de f . Mostre que o gráfico da função $1/f$ não tem assíntota horizontal.

(1ª chamada)

75. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f , de domínio \mathbb{R} .



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)=f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)=f(4)$
- (B) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)=f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq f(4)$
- (C) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)=f(4)$
- (D) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq f(4)$

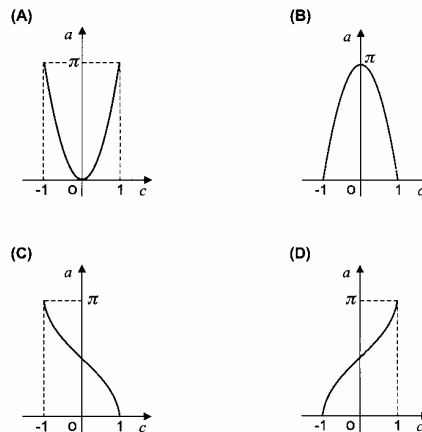
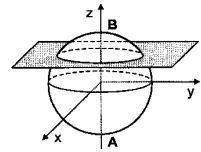
(2ª chamada)

76. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} e contradomínio $[-3,2]$. Qual é o contradomínio de $|f|$?

- (A) $[2,3]$
- (B) $[-2,3]$
- (C) $[0,2]$
- (D) $[0,3]$

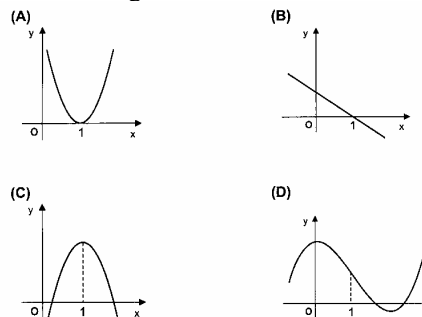
(2ª chamada)

77. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera definida pela condição $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Admita que um ponto P se desloca ao longo do diâmetro $[AB]$, que está contido no eixo Oz . Para cada posição do ponto P , considere o plano que contém P e que é paralelo ao plano xOy . Seja g a função que faz corresponder, à cota c do ponto P , a área a da secção produzida na esfera pelo referido plano. Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função g ?



(2ª chamada)

78. Seja g uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abcissa 1. Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da 2ª derivada de g ?



(2ª chamada)

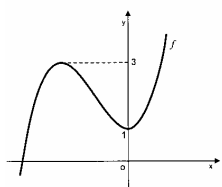
79. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, sem utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

- a) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.
- b) Resolva a equação $\ln[f(x)]=x$.
- c) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais do seu gráfico.

(2ª chamada)

80. Seja f uma função polinomial de 3º grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.



Quantas são soluções da equação $f(x)=2$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(2ª fase)

81. O coeficiente de ampliação A de 1 certa lupa é dado, em função da distância d (em decímetros) da lupa ao objecto, por $A(d)=\frac{5}{5-d}$. Indique a que distância do objecto tem de estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.

- (A) 2 dm (B) 4 dm (C) 6 dm (D) 8 dm

(2ª fase)

82. Sejam f e g 2 funções de domínio \mathbb{R} . Sabe-se que: o gráfico de g é uma recta, que designamos por s ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-g(x))=0$. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) A recta s é tangente ao gráfico de f
- (B) A recta s é secante ao gráfico de f
- (C) A recta s não intersecta o gráfico de f
- (D) A recta s é 1 assíntota do gráfico de f

(2ª fase)

83. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em km), por $P(h)=101e^{-0,12h}$.

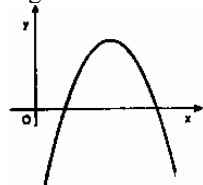
a) A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico-Açores. A altitude do cume do Pico é 2350 metros. Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.

b) Determine x tal que, para qualquer h , $P(h+x)=\frac{1}{2}P(h)$. Apresente o resultado arredondado às décimas. Interprete o valor obtido, no contexto do problema.

(2ª fase)

(Exames Nacionais 2001)

84. Na figura está representada parte de uma parábola, que é o gráfico de uma certa função g , de domínio \mathbb{R} .

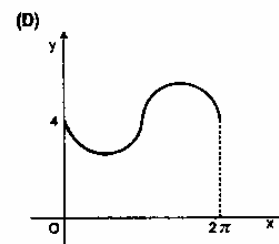
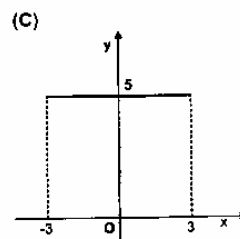
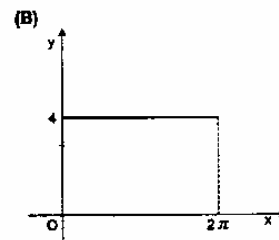
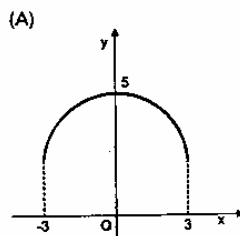
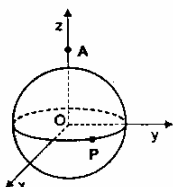


Seja h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x)=g(x)\cdot(x+3)^2$. Qual pode ser o conjunto dos zeros da função h ?

- (A) {2,3,4} (B) {-3,1,4}
(C) {-3,2,3,5} (D) {-1,5,9}

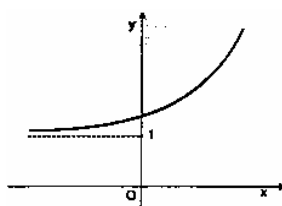
(Prova Modelo)

85. Na figura estão representados, em referencial o.n. $Oxyz$: o ponto A , de coordenadas $(0,0,4)$; a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=9$; a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy . Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa. Considere a função f que faz corresponder, à abscissa do ponto P , a distância de P a A . Qual dos seguintes é o gráfico da função f ?

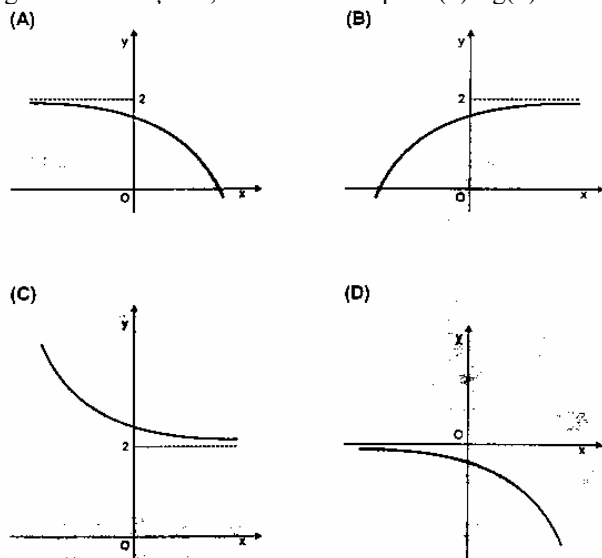


(Prova Modelo)

86. Na figura está parte da representação gráfica de uma certa função g , de domínio \mathbb{R} .



Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h , definida em \mathbf{R} por $h(x)=-g(x)+1$?



(Prova Modelo)

87. Malmequeres de Baixo é uma povoação com 5.000 habitantes.

87.1. Num certo dia, ocorreu um acidente em Malmequeres de Baixo, que foi testemunhado por algumas pessoas. Admita que, t horas depois do acidente, o n° (expresso em milhares) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do ocorrido era, aproximadamente,

$f(t) = \frac{5}{1+124e^{-0,3t}}$, $t \geq 0$. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assíntotas do seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

87.2. Alguns dias depois, ocorreu outro acidente no mesmo local, testemunhado pelas mesmas pessoas. No entanto, neste 2º acidente, a notícia propagou-se mais depressa, no sentido em que, decorrido o mesmo tempo após o acidente, mais pessoas sabiam do ocorrido. Admita que, t horas depois deste 2º acidente, o n° (expresso em milhares) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do ocorrido era, aproximadamente,

$g(t) = \frac{5}{1+ae^{-bt}}$, $t \geq 0$ (para certos valores de a e b).

Numa pequena composição, com cerca de 10 linhas, refira o que pode garantir sobre os valores de a e de b , comparando cada um deles com o valor da constante correspondente da expressão analítica de f .

(Prova Modelo)

88. De uma função f , contínua no intervalo $[1,3]$, sabe-se que $f(1)=7$ e $f(3)=4$. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[1,3]$
- (B) A função f não tem zeros no intervalo $[1,3]$
- (C) A equação $f(x)=5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,3]$
- (D) A equação $f(x)=5$ não tem solução no intervalo $[1,3]$

(1ª chamada)

89. Qual das seguintes expressões é, para qualquer n° real positivo a , igual a e^{2lna} ?

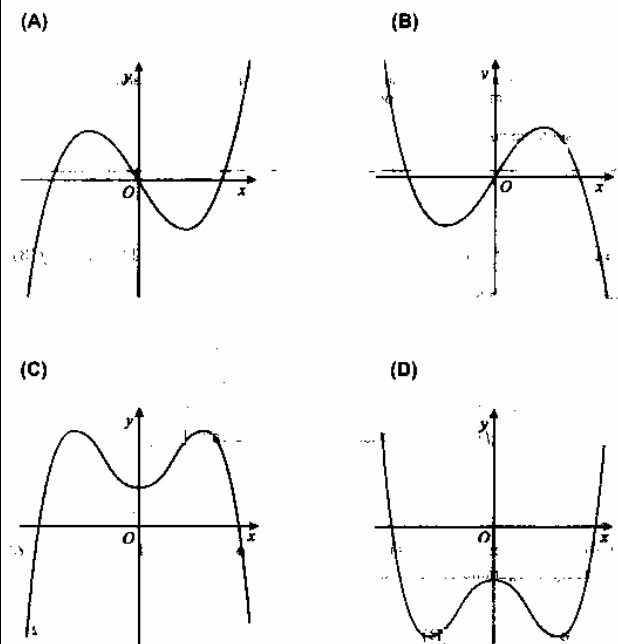
- (A) $2a$
- (B) $2+a$
- (C) 2^a
- (D) a^2

90. A recta de equação $y=x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f , no ponto de abcissa 0. Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

- (A) x^2+x
- (B) x^2+2x
- (C) x^2+2x+1
- (D) x^2+x+1

(1ª chamada)

91. Seja g uma função, de domínio \mathbf{R} , tal que a sua 2ª derivada é definida por $g''(x)=1-x^2$. Em qual das figuras seguintes poderá estar parte da representação gráfica da função g ?



(1ª chamada)

92. Considere a função f , de domínio \mathbf{R}^+ , definida por $f(x)=3x-2\ln x$.

92.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as 2 alíneas seguintes.

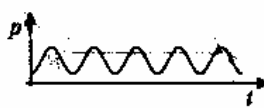
a) Estude f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

b) Mostre que a função f tem um único mínimo.

92.2. O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é o quadrado da abcissa. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa desse ponto (apresente o resultado arredondado às décimas). Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

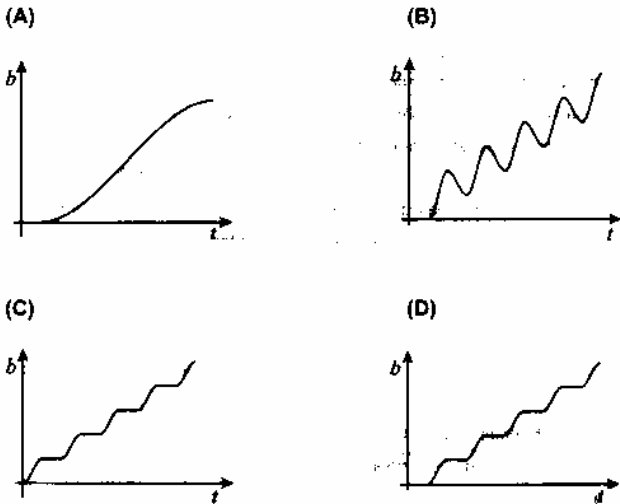
(1ª chamada)

93. A Joana está a encher um balão. Na figura abaixo está o gráfico da função que dá a massa p de ar, nos pulmões da Joana, t segundos após o instante em que ela, pela 1ª vez, começa a inspirar o ar, para encher o balão.



Para encher o balão, a Joana precisa de inspirar várias vezes, mas, de cada vez que inspira, mantém o pipo apertado, evitando assim que o ar saia do balão. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que dá a massa b de ar no balão, t segundos após o referido instante (aquele em que, pela

(1ª chamada)



Numa pequena composição, de 10 a 15 linhas, aproximadamente, justifique a resposta.

Note bem: Não explique por que razão considera adequado o gráfico por si escolhido como correcto. Deve limitar-se a explicar por que é que os outros 3 estão incorrectos, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.

(1ª chamada)

94. Seja h a função, de domínio \mathbf{R} , definida por

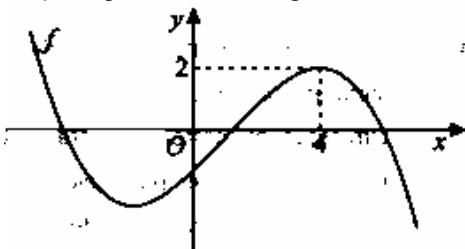
$$h(x) = \begin{cases} 1 + e^x & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 3x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função h , no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) É contínua
- (B) É contínua à esquerda e descontínua à direita
- (C) É contínua à direita e descontínua à esquerda
- (D) É descontínua à esquerda e à direita

(2ª chamada)

95. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f , polinomial do 3ª grau.



2 é um máximo relativo da função f . Seja g a função, de domínio \mathbf{R} , definida por $g(x) = f(x) - 2$. Quantos são os zeros da função g ?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

(2ª chamada)

96. Considere as funções f e g , de domínio \mathbf{R} , definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 3^x$. Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$?

- (A) \emptyset
- (B) \mathbf{R}^-
- (C) \mathbf{R}^+
- (D) \mathbf{R}

1ª vez, a Joana começa a inspirar o ar, para encher o balão)?
97. Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em kg), por $A(p) = -0,52 + 0,55 \ln p$. Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as 2 alíneas seguintes.

a) O Ricardo tem 1,4 m de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso? Apresente o resultado em kg, arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 2 casas decimais.

b) Verifique que, para qualquer valor de p , a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (com 2 casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

(2ª chamada)

98. De uma função g , de domínio \mathbf{R}^+ , sabe-se que a bissectriz dos quadrantes ímpares é uma assíntota do seu gráfico. Seja h a função, de domínio \mathbf{R}^+ , definida por $h(x) = g(x)/x^2$. Prove que o eixo Ox é uma assíntota do gráfico de h .

(2ª chamada)

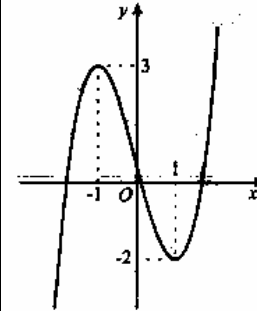
99. Para um certo valor de k , é contínua em \mathbf{R} , a função f

definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(x+k) & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Qual é o valor de k ?

- (A) -1
- (B) 0
- (C) 1
- (D) 2

(2ª fase)

100. Na figura está parte da representação gráfica de uma certa função g , polinomial do 3º grau.



A função g admite máximo relativo igual a 3 para $x = -1$ e admite mínimo relativo igual a -2 para $x = 1$. Qual é o conjunto dos valores de b para os quais a equação $g(x) = b$ tem 3 soluções distintas?

- (A) $]-\infty, 3[$
- (B) $]-2, +\infty[$
- (C) $]-2, 3[$
- (D) $]-2, 3]$

(2ª fase)

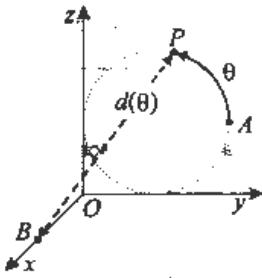
101. Seja f uma função tal que a sua derivada, no ponto 3, é igual a 4. Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$

- (A) $2/3$
- (B) $3/2$
- (C) 4
- (D) 0

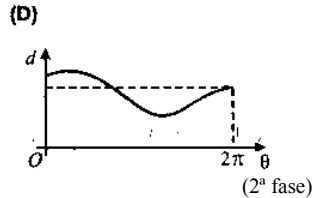
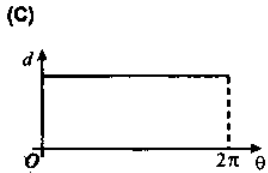
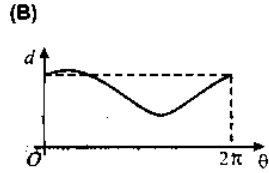
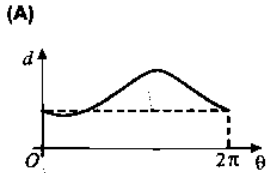
(2ª fase)

102. Na figura estão representados, em referencial o.n. Oxyz: uma circunferência de raio 1, centrada no ponto $(0,1,1)$ e contida no plano yOz ; o ponto $A(0,2,1)$; o ponto B , pertencente ao semieixo positivo Ox . Considere que um ponto P , partindo de A , se desloca sobre uma volta completa, no

(2ª chamada)



Para cada posição do ponto P, seja θ a amplitude, em radianos, do arco AP ($\theta \in [0, 2\pi]$) e seja $d(\theta)$ a distância de P ao ponto B. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d?



sentido indicado na figura.

103. Um petroleiro, que navegava no oceano Atlântico, encalhou numa rocha e sofreu um rombo no casco. Em consequência disso, começou a derramar crude. Admita que, às t horas do dia a seguir ao do acidente, a área, em km^2 , de crude espalhado sobre o oceano é dada por $A(t) = 16e^{0,1t}$, $t \in [0, 24]$.

a) Verifique que, para qualquer valor de t, $\frac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às décimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

b) Admita que a mancha de crude é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou. Sabendo que esse local se encontra a 7 km da costa, determine a que horas, do dia a seguir ao do acidente, a mancha de crude atingirá a costa. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

(2ª fase)

104. De uma função g, contínua em \mathbf{R} , sabe-se que: 1 é zero de g; $g(3) > 0$. prove que a equação $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, 1 solução no intervalo $]1, 3[$

(2ª fase)