Teste de Matemática A

2017 / 2018

Teste N.º 5

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Considere as seguintes proposições:

$p: \sum_{i=1}^{5} 2^{i-1} = 31$

$q: \sum_{i=2013}^{2018} (i-1) = 12\,092$

Pode concluir-se que:

(A) p é falsa e q é verdadeira.

(B) p é verdadeira e q é falsa.

(C) são ambas verdadeiras.

(D) são ambas falsas.

2. Considere a função polinomial f definida por $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.

2.1. Mostre que -1 e 1 são zeros da função f.

2.2. Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os valores reais de x para os quais a função f é negativa.

2.3. Sabe-se que o gráfico da função f tem quatro pontos cuja abcissa é igual ao simétrico da ordenada: seja A o ponto de menor abcissa. Considere também o ponto B do gráfico de f cuja ordenada é igual ao máximo relativo de f.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do triângulo $[OAB]$.

Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

Na sua resposta:

- apresente as coordenadas do ponto A com aproximação às centésimas;
- apresente as coordenadas do ponto B;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

3. Considere a amostra do peso, em kg, de dez bebés que nasceram numa maternidade durante o último fim de semana:

$$(3{,}15;\ 2{,}98;\ 3{,}45;\ 3{,}78;\ 4{,}10;\ 3{,}70;\ 3{,}09;\ 3{,}68;\ 3{,}44;\ 4{,}01)$$

Para esta amostra, a média e o percentil de ordem 50 são, respetivamente:

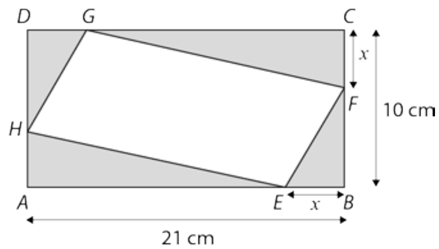
(A) $\bar{x} = 3{,}538$ e $P_{50} = 3{,}565$

(B) $\bar{x} = 3{,}565$ e $P_{50} = 3{,}538$

(C) $\bar{x} = 3{,}538$ e $P_{50} = 3{,}15$

(D) $\bar{x} = 3{,}538$ e $P_{50} = 3{,}78$

4. Na figura encontra-se representado o projeto para um convite de uma festa de aniversário com a forma de um retângulo.



Nesse retângulo, a base $[AB]$ mede 21 centímetros e a altura $[BC]$ mede 10 centímetros.

O convite vai ter uma área reservada só para texto e uma área reservada só para imagens, estando esta última representada a sombreado na figura.

Os vértices E, F, G e H pertencem, respetivamente a $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ e $[DA]$.

Tem-se que $\overline{EB} = \overline{FC} = \overline{GD} = \overline{HA} = x$ com $x \in]0, 10[$.

4.1. Mostre que a área reservada ao texto, em centímetros quadrados, é dada, em função de x, por:

$$A(x) = 2x^2 - 31x + 210\,, \quad x \in]0, 10[$$

4.2. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, o conjunto dos valores de x para os quais a área destinada ao texto é inferior a 111 centímetros quadrados.

Apresente o resultado sob a forma de intervalo de números reais.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	
8	10	20	15	8	15	20	**96**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

5. Considere, num referencial o.n. xOy, a região definida pela condição:

$$x^2+y^2-2x+2y\leq 0 \quad \wedge \quad y\leq -x$$

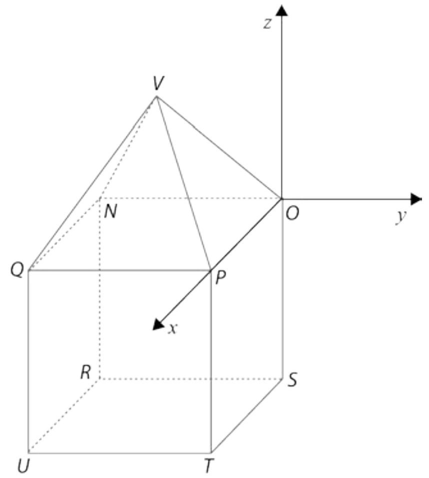
Qual é a área dessa região?

(A) π **(B)** 2π **(C)** 3π **(D)** 4π

6. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um sólido que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

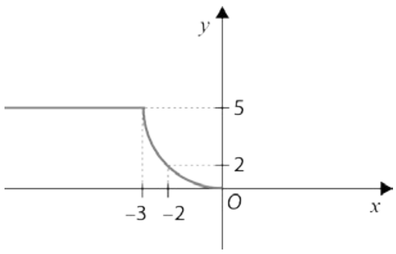
- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy;
- o ponto P pertence ao eixo Ox;
- o ponto U tem coordenadas $(3,-3,-3)$.



6.1. Determine uma condição que defina a superfície esférica de centro U e que passe no ponto P.

6.2. Determine uma equação vetorial da reta que passa pelo ponto V e é paralela ao eixo das cotas.

7. Considere a função f, definida por $f(x)=2x-1$, e a função g, da qual se sabe que é par e tem domínio $\mathbb{R}$. Parte do gráfico da função g encontra-se representado na figura:



Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $(f\times g)(-1)=0$

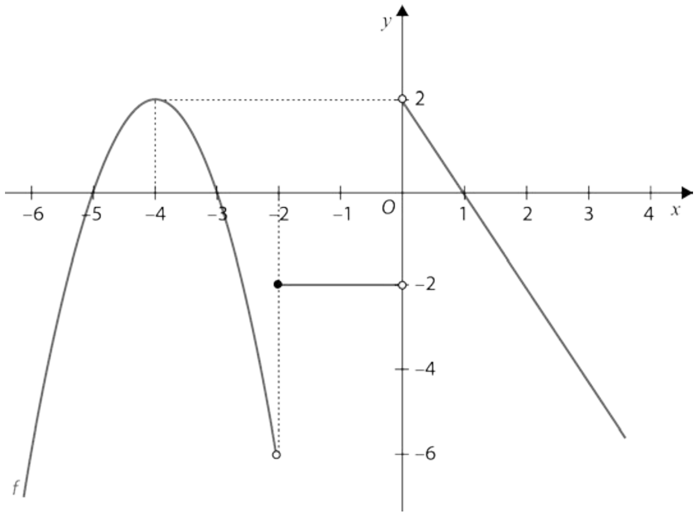
(B) $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)=3$

(C) $(f\circ g)(3)=9$

(D) $(f^{-1}+f)(3)=0$

8. Na figura está representada graficamente a função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Sabe-se que -5, -3 e 1 são zeros da função f.



8.1. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

8.1.1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) > 0$

8.1.2. $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

8.2. Defina a função f por ramos, de acordo com as condições da figura e sabendo que no intervalo $]-\infty, -2[$ a função pode ser definida por uma função quadrática.

8.3. Considere agora $G_g = \{(-4,4),(1,3),(5,-2),(6,8),(0,1)\}$ o gráfico de uma função g. Sejam p, q e r as proposições:

p: "A função g é injetiva."

q: "$(f \circ g)(0)$ não está definido."

r: "$(g \circ f)(0) = 0$"

Determine o valor lógico da proposição $(\sim q \vee r) \wedge (p \Rightarrow r)$.

9. Considere as seguintes condições:

$a(x): \sqrt{x-2} = x - 4$

$b(x): |x-2| < |x-1|$

Em $\mathbb{R}$, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $a(x) \wedge b(x)$ é uma condição impossível.

(B) $a(x) \vee b(x)$ é uma condição universal.

(C) $\sim a(x) \vee b(x)$ é uma condição possível não universal.

(D) $a(x) \Rightarrow b(x)$ é uma condição universal.

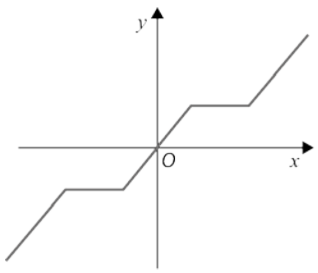
10. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

- f é ímpar;
- f é bijetiva.

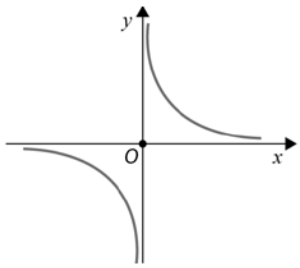
Apenas uma das representações gráficas a seguir apresentadas é a representação gráfica da função f. Indique qual.

Elabore uma composição na qual explique porque é que as outras três estão incorretas, apresentando, para cada uma das representações gráficas, uma razão pela qual essa representação gráfica não pode ser a representação gráfica da função f .

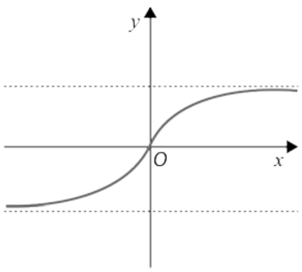
(A)



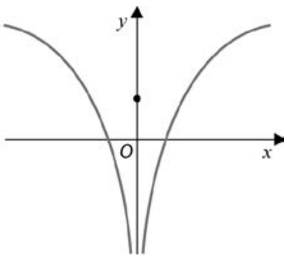
(B)



(C)



(D)



FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item										
Cotação (em pontos)										
5.	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	**8.1.1.**	**8.1.2.**	**8.2.**	**8.3.**	**9.**	**10.**	
8	9	9	8	8	8	16	15	8	15	**104**

TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

$$\sum_{i=1}^{5} 2^{i-1} = 2^{1-1} + 2^{2-1} + 2^{3-1} + 2^{4-1} + 2^{5-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

Assim, p é verdadeira.

$$\sum_{i=2013}^{2018} (i-1) = (2013-1) + (2014-1) + (2015-1) + (2016-1) + (2017-1) + (2018-1) =$$

$$= 12\,087$$

Assim, q é falsa.

2.

2.1. $f(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 - 7 \times (-1)^2 + (-1) + 6 = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0$

Logo, –1 é zero de f.

$f(1) = 1^4 - 1^3 - 7 \times 1^2 + 1 + 6 = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0$

Logo, 1 é zero de f.

2.2. Pretende-se determinar os valores de x para os quais $f(x) < 0$.

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x^2 - x - 6) =$$
$$= (x+1)(x-1)(x-3)(x+2)$$

Assim:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-3)(x+2) < 0$$

Cálculos auxiliares

	1	-1	-7	1	6
-1		-1	2	5	-6
	1	-2	-5	6	$\boxed{0}$
1		1	-1	-6	
	1	-1	-6	$\boxed{0}$	

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \,]-2,-1[\, \cup \,]1,3[$$

2.3. $y_1 = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

$y_2 = -x$

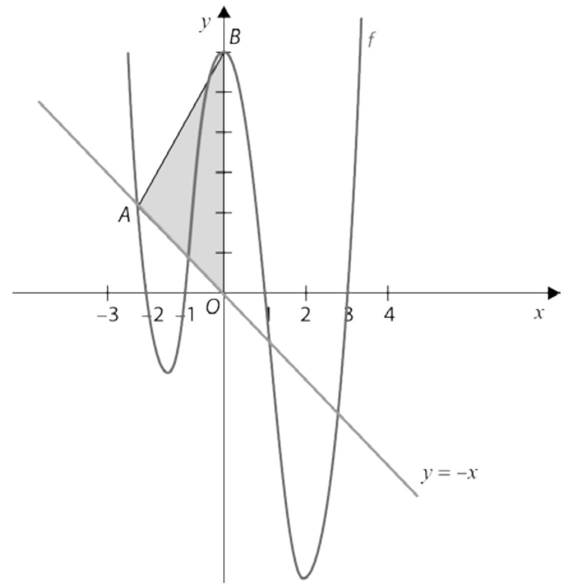
$A(-2{,}12;\ 2{,}12)$

Seja $x_A = -2{,}12$.

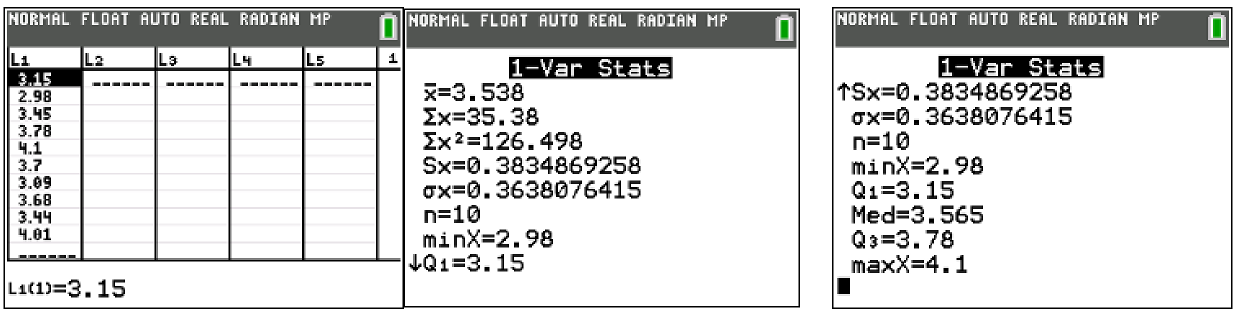
$B(0,\ 6)$

Assim, a área do triângulo [OAB] é igual a:

$\frac{\overline{OB} \times |x_A|}{2} \approx \frac{6 \times 2{,}12}{2} \approx 6{,}4$



3. Opção (A)



$\bar{x} = 3{,}538$ e $P_{50} = Med = 3{,}565$

4.

4.1. A área reservada ao texto é dada por:

$A_{[EFGH]} = A_{[ABCD]} - 2A_{[GCF]} - 2A_{[EBF]} =$

$= 21 \times 10 - 2 \times \frac{(21-x)x}{2} - 2 \times \frac{(10-x)x}{2}, \quad 0 < x < 10$

$= 210 - 21x + x^2 - 10x + x^2\ ,\ 0 < x < 10$

$= 2x^2 - 31x + 210\ ,\ 0 < x < 10$

4.2. $A(x) < 111 \ \wedge\ 0 < x < 10$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 31x + 210 < 111 \quad \wedge \quad 0 < x < 10$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 31x + 99 < 0 \quad \wedge \quad 0 < x < 10$

$\Leftrightarrow 4{,}5 < x < 11 \ \wedge\ 0 < x < 10$

$\Leftrightarrow 4{,}5 < x < 10$

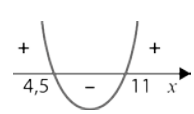
C.S. = $]4{,}5;\ 10[$

Cálculo auxiliar

$2x^2 - 31x + 99 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 4 \times 2 \times 99}}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{31 \pm 13}{4}$

$\Leftrightarrow x = 11 \vee x = 4{,}5$



Caderno 2

5. Opção (A)

$$x^2+y^2-2x+2y\leq 0 \quad \wedge \quad y\leq -x \Leftrightarrow \underbrace{x^2-2x+1}+\underbrace{y^2+2y+1}\leq 1+1 \quad \wedge \quad y\leq -x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2+(y+1)^2\leq 2}_{\text{Círculo de centro }(-1,\,1)\text{ e raio }\sqrt{2}.} \quad \wedge \quad \underbrace{y\leq -x}_{\text{Semiplano fechado inferior, determinado pela bissetriz dos quadrantes pares.}}$$

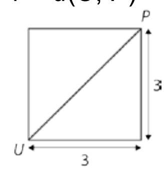
A área pretendida é, então, a área do semicírculo: $\frac{\pi\times\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}=\pi$.

6.

6.1. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=18$

r = *d*(*U*, *P*) = $3\sqrt{2}$



6.2. A reta que passa pelo ponto *V* e é paralela ao eixo das cotas passa também, por exemplo, pelo centro do quadrado [*OPQN*], que tem de coordenadas $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0\right)$.

Assim, uma equação vetorial da reta pretendida pode ser:

$$(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0\right)+k(0{,}0{,}1), k\in\mathbb{R}$$

7. Opção (C)

- $(f\times g)(-1)=f(-1)\times g(-1)=-3\times k$, com $k>0$.

  Logo, $(f\times g)(-1)\neq 0$.

- $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)=\frac{f(-1)}{g(-1)}=\frac{-3}{k}$, com $k>0$.

  Logo, $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)<0$.

  Assim, $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)\neq 3$.

- $(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(5)$ pois, como g é par, $g(3)=g(-3)=5$.

  $=2\times 5-1=9$

- $(f^{-1}+f)(3)=\underbrace{f^{-1}(3)}_{2x-1=3\Leftrightarrow x=2}+f(3)=2+5=7$

  Logo,$(f^{-1}+f)(3)\neq 0$.

8.

8.1.

8.1.1. Falso, pois, em $]-1,+\infty[$, tem-se que $f(x) < 0$.

8.1.2. Verdadeiro, pois em $\mathbb{R}^+$, f é estritamente decrescente.

8.2. $f(x) = \begin{cases} -2(x+4)^2+2 & \text{se } \; x < -2 \\ -2 & \text{se } \; -2 \leq x < 0 \\ -2x+2 & \text{se } \; x > 0 \end{cases}$

- Em $]-\infty,-2[$, f está definida por uma função quadrática cuja representação gráfica é uma parábola de vértice *V*(–4, 2) e que passa, por exemplo, no ponto de coordenadas (–3, 0):

  $y = a(x+4)^2 + 2$

  $0 = a(-3+4)^2 + 2$

  $\Leftrightarrow a = -2$

  Logo, $f(x) = -2(x+4)^2 + 2$, para $x < -2$.
- $f(x) = -2$, para $-2 \leq x < 0$.
- Em $]0,+\infty[$, f está definida por uma função afim cuja representação gráfica é uma reta de declive $\frac{2-0}{0-1} = -2$ e ordenada na origem 2.

  Logo, $f(x) = -2x + 2$, para $x > 0$.

8.3. $p \Leftrightarrow V$, pois a objetos diferentes correspondem imagens diferentes.

$q \Leftrightarrow F$, pois $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 0$.

$r \Leftrightarrow F$, pois $(g \circ f)(0) = g(f(0))$ e $0 \notin D_f$. Logo, $0 \notin D_{g \circ f}$ e, portanto, $(g \circ f)(0)$ não está definida.

Assim:

$$(\sim q \vee r) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((V \vee F) \wedge (V \Rightarrow F))$$
$$\Leftrightarrow (V \wedge F)$$
$$\Leftrightarrow F$$

9. Opção (D)

Em $\mathbb{R}$, seja A o conjunto-solução da condição $a(x)$ e seja B o conjunto-solução da condição $b(x)$:

(1) $\sqrt{x-2} = x - 4 \Rightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)^2 = (x-4)^2$

$$\Leftrightarrow x - 2 = x^2 - 8x + 16$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 18}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 6 \;\vee\; x = 3$$

Verificação

- $x = 3$

$\sqrt{3-2} = 3-4 \Leftrightarrow 1 = -1$ proposição falsa

- $x = 6$

$\sqrt{6-2} = 6-4 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2$

$\Leftrightarrow 2 = 2$ proposição verdadeira

Assim, $A = \{6\}$

(2) $|x-2| < |x-1| \Leftrightarrow |x-2|^2 < |x-1|^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 < (x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < x^2 - 2x + 1$

$\Leftrightarrow -2x < -3$

$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

$B = \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

Em $\mathbb{R}$:

Como $A \cap B \neq \emptyset$, então $a(x) \wedge b(x)$ não é uma condição impossível.

Como $A \cup B \neq \mathbb{R}$, então $a(x) \vee b(x)$ não é uma condição universal.

Como $\overline{A} \cup B = \mathbb{R}$, então $\sim a(x) \vee b(x)$ não é uma condição possível não universal.

Como $A \subset B$, então $a(x) \Rightarrow b(x)$ é uma condição universal.

10. Opção (B)

Sabe-se que f é ímpar, logo o gráfico de f é simétrico em relação à origem do referencial.

Assim, a representação gráfica da opção (D) não pode ser a representação gráfica da função f.

Sabe-se também que $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função bijetiva, ou seja, f é injetiva e sobrejetiva.

Assim, a representação gráfica da opção (A) não pode ser a representação gráfica da função f, pois nesta opção a função representada não é injetiva. A representação gráfica da opção (C) também não pode ser a representação gráfica da função f, pois nesta opção a função representada não é sobrejetiva, isto é, o contradomínio da função não coincide com o conjunto de chegada $\mathbb{R}$.

Logo, apenas a representação gráfica apresentada na opção (B) pode ser a representação gráfica da função f.