Carlo Frabetti

El tablero mágico

Juegos y pasatiempos alrededor del ajedrez

gedisa
editorial

Diseño de colección y realización: AG & Asociados

1.ª edición, mayo de 1995, Barcelona

ISBN: 84-7432-559-5
Depósito legal: B-24.941-1995

Impreso en Romanya Valls
Verdaguer, 1 - 08786 Capellades (Barcelona)

Impreso en España
Printed in Spain

Indice

A mi padre, en recuerdo de nuestras interminables partidas de ajedrez.

Agradecimientos

Desde mi infancia y durante más de treinta años, he leído asiduamente los libros y artículos de Martin Gardner sobre matemática recreativa y otras materias, y me he servido de sus precisas y oportunas referencias bibliográficas para profundizar en los temas que más me interesaban. Sin su prolongado magisterio, probablemente no habría escrito este libro.

Apenas menor es mi deuda con Raymond Smullyan, cuyos maravillosos libros de acertijos lógicos y problemas de ajedrez revitalizaron mi interés y estimularon mi dedicación en grado sumo.

También tengo una deuda muy especial con mis lectores y colaboradores de "El Juego de la Lógica", mi sección de pasatiempos matemáticos en la desaparecida revista científica *Algo,* y entre ellos debo destacar a Mario Bohoslavsky, Antonio Casao, Jorge Fernández Herce, Andrés García Parrilla, Víctor Graus, Eugenia Izquierdo, Miguel Angel Lerma y Pedro Pablo Rivas. Lamento no poder mencionarlos a todos, pues necesitaría un capítulo entero sólo para eso.

Prólogo

De niño solía jugar al ajedrez con mi padre todas las semanas. No éramos grandes jugadores, a pesar de lo cual (o precisamente por eso) nos divertíamos muchísimo. Las partidas eran interminables, pues cuando uno de los dos se equivocaba, o cuando el desarrollo nos parecía poco interesante, rectificábamos sin ningún pudor. A menudo nos planteábamos cuestiones del tipo "¿Qué habría ocurrido si ese alfil, en vez de ir por las blancas, hubiera ido por las negras?", o "¿Qué pasaría si la dama pudiera mover también como el caballo?", con lo que, sin darnos cuenta, nos adentrábamos en los ilimitados dominios del ajedrez heterodoxo.

Otras veces, en lugar de jugar una partida, echábamos mano de un viejo libro de ajedrez italiano de principios de siglo, heredado de algún abuelo, e intentábamos resolver alguno de los problemas que proponía, o nos planteábamos nuestros propios problemas (que, por supuesto, no habíamos inventado nosotros): ¿Cuántas posiciones distintas pueden darse después del primer movimiento de las negras? ¿Y después del segundo? ¿Cuál es el mate más rápido posible? ¿Por cuántos caminos diferentes puede ir un caballo de una esquina del tablero a la opuesta en el mínimo número de jugadas?

Posteriormente, mis estudios de matemáticas y mi especial interés por su vertiente recreativa me llevaron a conocer numerosos problemas directa o indirectamente relacionados con el ajedrez. Y el proceso culminó cuando, durante más de cinco años, llevé una sección de juegos y pasatiempos lógicos en la desaparecida revista científica *Algo* , que, como evidente homenaje a Lewis Carroll, titulé "El Juego de la Lógica".

La sección se nutría, más que de mis modestos archivos (y de mi aún más modesta capacidad para crear nuevos pasatiempos), de las aportaciones de los lectores, que continuamente mandaban propuestas, comentarios, variaciones, refutaciones y juegos descubiertos o inventados por ellos. Y un significativo porcentaje de estas aportaciones tenía que ver con el ajedrez, por lo que mi archivo ajedrecístico creció en volumen y calidad hasta el punto de "obligarme" a escribir este libro. Pues si bien en casi todos los libros de juegos matemáticos hay algunos relacionados con el ajedrez, no existe (o al menos yo no la conozco) ninguna recopilación monotemática de estos pasatiempos.

No me refiero, por supuesto, a los problemas de ajedrez convencionales, del tipo "juegan las blancas y dan mate en tres movimientos". Hay numerosas y excelentes recopilaciones de estos interesantes problemas, que, como ha dicho alguien, constituyen la poesía del ajedrez.

Pero se echaba de menos un libro que recogiera la gran diversidad de juegos, pasatiempos y problemas de otros tipos (es decir, no relacionados directamente con la partida convencional) a que han dado lugar ese fascinante "cuadrado mágico" de orden ocho que es el tablero de ajedrez y ese inagotable ejército en miniatura que son sus piezas.

No pretendo llenar ese hueco con esta modesta recopilación, aunque sí suministrar, tanto a los aficionados al ajedrez como a los amantes de la matemática recreativa, un muestrario representativo de los distintos tipos de pasatiempos, rompecabezas y problemas nacidos del rey de los juegos, así como una bibliografía y una serie de referencias que permitan al lector acudir a fuentes más autorizadas.

Carlo Frabetti

Advertencias y ruegos preliminares

Este no es un libro *de* ajedrez sino *sobre* ajedrez o, más exactamente, alrededor del ajedrez, ya que explora sus zonas periféricas y colindantes más que sus dominios tradicionales. Para entenderlo y (espero) disfrutarlo, así como para resolver los problemas que en cada capítulo se proponen al lector, no es necesario ser jugador de ajedrez, aunque sí, por supuesto, conocer las reglas básicas del juego.

Aunque, en general, he evitado utilizar la jerga ajedrecística, tal vez convenga hacer algunas puntualizaciones terminológicas. Así, según el contexto, "jugada" puede significar el movimiento de uno solo de los bandos o la jugada completa, que incluye un movimiento de las blancas y la correspondiente respuesta de las negras. Análogamente, "piezas" puede significar el conjunto de los trebejos (incluidos los peones), o sólo las piezas propiamente dichas (reyes, damas, torres, alfiles y caballos).

Para anotar posiciones, movimientos y partidas, he utilizado el sistema algebraico reducido, que no sólo es el más difundido actualmente, sino también el más adecuado para describir todo tipo de situaciones no directamente relacionadas con la partida de ajedrez convencional. Como este libro no está dirigido sólo (ni siquiera principalmente) a los ajedrecistas, convendrá explicar brevemente la notación algebraica reducida:

Las filas se numeran de 1 a 8, a partir de la fila en que se colocan las piezas blancas (que siempre ocupan la parte inferior del tablero), y las columnas se designan con las letras de la *a* a la *h* de izquierda a derecha (también desde el punto de vista de las blancas), de forma que a cada casilla le corresponde una letra y un número. Las piezas se designan por sus iniciales, y para indicar un movimiento se escribe, simplemente, la inicial de la pieza que mueve y la casilla a la que se traslada. Los peones no se designan con letra alguna: cuando mueve uno de ellos, simplemente se escribe la casilla a la que se desplaza. Para indicar que con un movimiento se efectúa una captura, se pone el signo x entre la inicial de la pieza que mueve y la casilla a la que va; si es un peón el que "come", antes de la x se pone la letra de la columna en la que está dicho peón. El enroque corto se indica así, 0-0, y el largo, 0-0-0. El jaque se indica con una cruz, +, y el jaque mate con dos, ++.

Las jugadas se numeran por pares: la primera de cada par corresponde a las blancas y la segunda a las negras. Así, 1 e4, e6 significa que en la primera jugada de la partida las blancas han adelantado su peón de rey dos casillas y las negras han adelantado el suyo una casilla. Una continuación podría ser: 2 Cf3, Cc6, que significa que, en la segunda jugada, las blancas han llevado su caballo de rey delante del peón de alfil y las negras han hecho lo propio con su caballo de dama. Sigamos: 3 Ca3, f5; 4 Cc4, fxe4 (que significa que el peón negro de la columna f se ha comido al que había en e4) y llegamos a la posición de la figura 1.

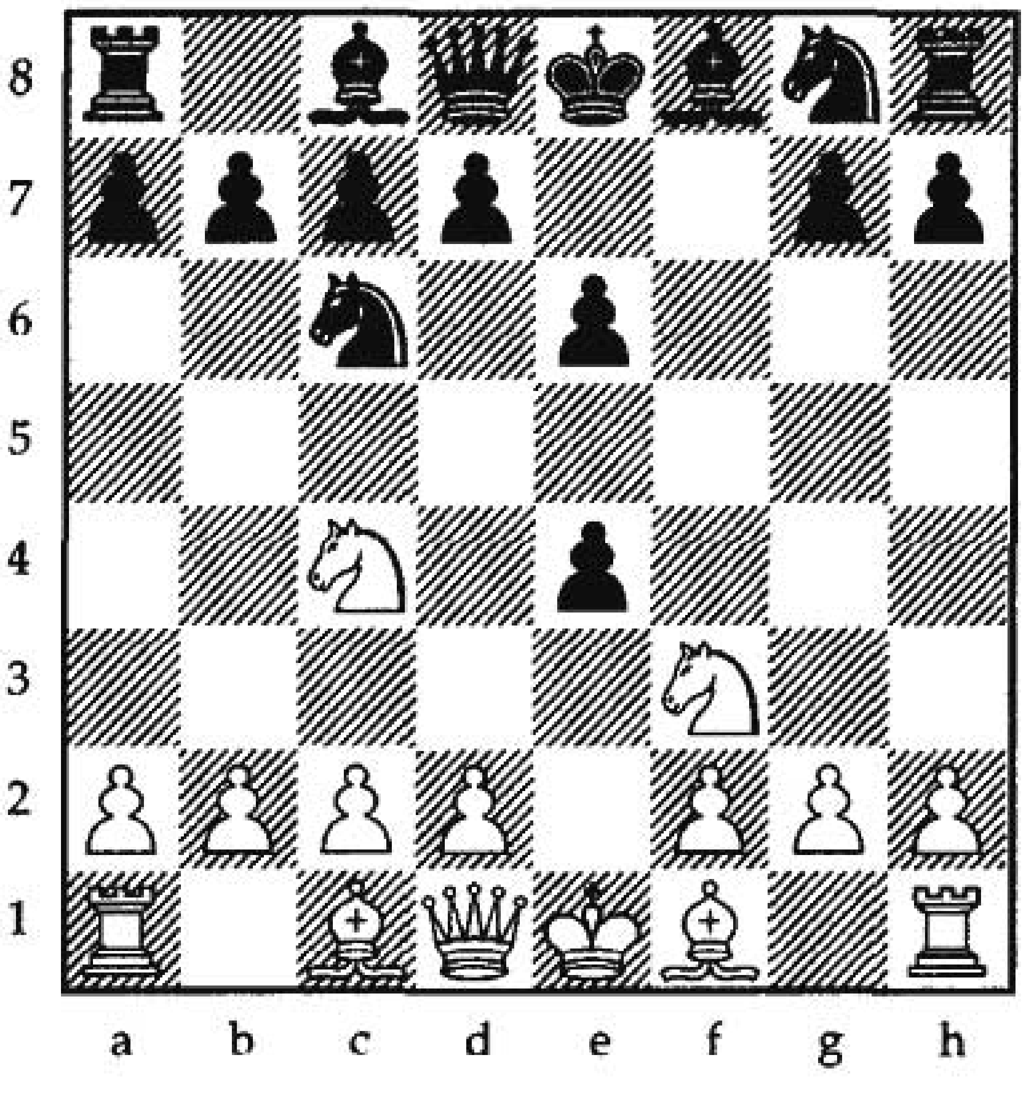


Figura 1. Posición después de 4 Cc4, fxe4.

Ahora ambos caballos blancos pueden ir a la casilla e5. Si simplemente escribiéramos 5 Ce5, no sabríamos cuál de los dos es el que mueve, por lo que en este caso anotaríamos 5 C3-e5, con lo que se indica que el caballo que mueve es el que está en la fila 3 (si ambos caballos estuvieran en la misma fila, indicaríamos la columna del que mueve, en este caso 5 Cf-e5). De modo que la partida podría seguir así: 5 C3-e5, Cxe5 (el caballo negro come al caballo blanco); 6 Dh5+ (la dama blanca mueve a h5 y da jaque al rey negro), etcétera.

Las escuetas referencias bibliográficas que aparecen a lo largo del libro se completan en el apartado "Bibliografía" (en el que también se incluyen algunos títulos de interés general no mencionados en ningún capítulo), donde se consignan las ediciones originales y, cuando las hay, las ediciones en castellano.

Algunos de los problemas propuestos en el libro son conocidos desde hace mucho y es improbable que haya fallos o lagunas importantes en sus soluciones; otros son recientes y podrían deparar sorpresas (sobre todo los de cosecha propia). Por otra parte, desde que han entrado en escena los grandes ordenadores ("grandes" en el el sentido de potentes, pues en realidad son cada vez más pequeños), es muy osado afirmar, como hago en ocasiones, que un problema aún no ha sido resuelto (sobre todo si es de tipo combinatorio), pues en muchos casos el que haya sido resuelto o no sólo depende de que alguien haya tenido la ocurrencia y la posibilidad de poner a trabajar en él un ordenador lo suficientemente potente durante el tiempo necesario.

Por todo ello, además de pedir disculpas anticipadas por posibles errores u omisiones, ruego a los lectores que me envíen cuantas correcciones, sugerencias, aportaciones, variaciones o refutaciones consideren oportunas, en la certeza de que serán tenidas en cuenta en futuras ediciones o secuelas de este libro, cuyo mayor éxito sería poder convertirse en punto de partida de otro más completo.

1

El ajedrez y los números

Al hablar de las relaciones del ajedrez con los números (que, en cierto modo, es un tema que subyace a todo el libro), es inevitable aludir a la conocida leyenda sobre la recompensa que el mítico inventor del juego, Sissa Ben Dahir, le pidió al rey Shirham de la India: un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta y así sucesivamente, doblando en cada casilla el número de granos de la anterior, hasta llegar a la última.

Un sencillo cálculo demuestra que el número total de granos es $2^{64}-1$, unos 18 trillones y medio (exactamente 18.446.744.073.709.551.615), cantidad equivalente a la producción mundial de trigo durante unos dos mil años.

Curiosamente, el astronómico número $2^{64}-1$ aparece también en relación con otro interesante juego: la torre de Hanoi, inventada por el matemático francés Edouard Lucas y comercializada como juguete en 1883. En la figura 2 vemos el juego en su versión más habitual. Se trata de trasladar la "torre" de discos ensartados a uno cualquiera de los dos ejes libres en el menor número de movimientos, moviendo un disco a la vez y sin poner nunca un disco sobre otro más pequeño.

Se decía que el juego era una versión simplificada de la mítica torre de Brahma que hay en un templo de Benarés, bajo una cúpula que señala el centro del mundo. La torre consta de 64 discos de oro de tamaño decreciente, que los sacerdotes del templo trasladan de unos ejes a otros según las reglas que acabamos de ver. Cuando hayan transferido los 64 discos desde su eje de origen a uno de los otros dos, se acabará el mundo.

No es difícil demostrar (invito al lector a que lo intente antes de buscar la demostración al final del capítulo) que, para *n* discos,

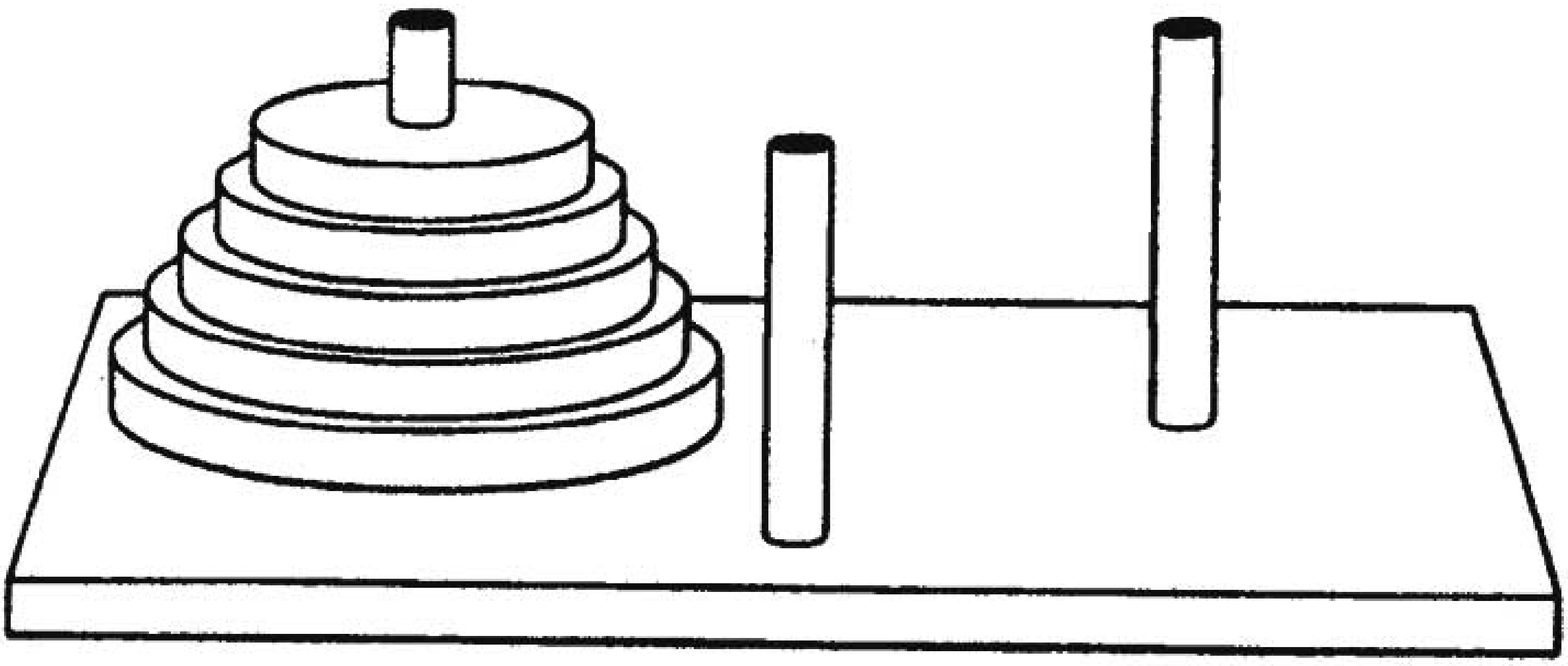


Figura 2. La torre de Hanoi.

el mínimo número de movimientos necesarios para efectuar la transferencia es 2^n-1. Por lo tanto, en el caso de los 64 discos de oro del templo de Benarés harán falta tantos movimientos como granos de trigo pidiera Sissa Ben Dahir por inventar el ajedrez: $2^{64}-1$. De ser cierta la leyenda, no tendríamos que preocuparnos por una pronta extinción del universo, ya que, suponiendo que los sacerdotes trabajaran sin descanso día y noche, todos los días del año, moviendo un disco cada segundo, tardarían casi 600.000 millones de años en terminar su tarea.

Algunos números de la forma 2^n-1 son primos, como $2^2-1 = 3$, $2^3-1 = 7$, $2^5-1 = 31$, etc.; son los números de Mersenne, llamados así en honor del matemático y teólogo francés del siglo XVII Marin Mersenne, gran amigo de Descartes.

Evidentemente, $2^{64}-1$ no es primo (para que 2^n-1 sea primo es condición necesaria, aunque no suficiente, que lo sea *n*), puesto que termina en 5 y, por lo tanto, es divisible por 5 (también es divisible por 3, pues lo es la suma de sus dígitos); pero si en vez de 64 discos la torre de Brahma tuviera 89, 107 o 127, los sufridos sacerdotes de Benarés, además de ver considerablemente aumentada su tarea, tendrían que hacer, en cada caso, un número de movimientos que resulta ser un número primo.

El propio Lucas (tal vez jugando con torres cada vez más altas) demostró que $2^{127}-1$ es primo. Este enorme número de Mersenne de 39 cifras fue durante mucho tiempo el mayor primo conocido, y es el más grande que jamás haya sido hallado sin ayuda electrónica, pues sólo con la colaboración de los ordenadores se ha podido encontrar primos mayores (como los números de Mersenne $2^{2281}-1$ y $2^{3217}-1$).

Obsérvese que $2^{127}-1$ es casi el cuadrado de $2^{64}-1$. Eso significa que si en otro templo (que llamaremos de Lucas) hubiera una torre de 127 discos, cuando los sacerdotes de Benarés hubiesen terminado su tarea de 600.000 millones de años, los de Lucas no habrían hecho más que empezar la suya, pues para éstos todos esos eones serían, proporcionalmente, equiparables al primer instante de actividad de sus colegas.

¿Cuántas partidas podemos jugar?

Pero volvamos a nuestro tablero. Librémoslo de la pesada carga de 18 trillones y medio de granos de trigo para colocar en sus posiciones de partida las 32 piezas habituales. Una carga sólo en apariencia más ligera, pues en cuanto las piezas empiecen a moverse los números astronómicos aparecerán por doquier y rápidamente dejarán corto al viejo $2^{64}-1$.

Consideremos, para empezar por el principio, el número de movimientos distintos que pueden hacer las blancas en la primera jugada. Es fácil ver que son 20: cada uno de los ocho peones puede mover de dos formas distintas (adelantando una o dos casillas) y cada uno de los caballos puede ir a dos casillas diferentes.

Y puesto que a cada movimiento inicial de las blancas las negras pueden responder, asimismo, de 20 formas distintas, tras la primera jugada de las negras hay $20 \times 20 = 400$ combinaciones posibles. En la práctica, sólo unas cuantas de estas 400 situaciones se dan en una partida real (¿quiénes empezarían jugando, por ejemplo, 1 a3, a6?), pero, evidentemente, si queremos llevar a cabo un análisis matemático de las jugadas posibles tenemos que considerarlas todas.

Tal vez 400 posibilidades no parezcan muchas, pero es que sólo estamos en la primera jugada (tampoco le parecieron muchos los granos de trigo al pobre rey Shirham cuando iban por la primera fila) y la mayoría de las piezas están bloqueadas por los peones.

Tras el segundo movimiento de las blancas, las situaciones posibles son ya más de 5.000 (¿podría el lector hallar el número exacto?), y tras el segundo movimiento de las negras, más de 70.000 (exactamente 72.084, cantidad que no se precisó hasta mediados de los años cuarenta, lo que da idea de la dificultad de este tipo de cálculos).

Tras el tercer movimiento de las blancas hay más de 800.000

posiciones posibles, y más de 9.000.000 tras el tercero de las negras.

Llegados a este punto, cabe preguntarse cuántas situaciones distintas pueden darse en el tablero de ajedrez (acordes con las reglas del juego, se entiende). Mediante cálculos aproximativos que sería prolijo describir, se estima que el número total de situaciones posibles es del orden de 2×10^{43} (veinte septillones).

No hay que confundir el número de posiciones distintas que pueden darse sobre el tablero de ajedrez con el número de partidas posibles, que es mucho mayor, ya que a una misma posición se puede llegar de muchas maneras. Si nos limitamos a las partidas que no se prolongan deliberadamente, con un máximo de unas 40 jugadas (por cada bando), se ha calculado que el número de partidas diferentes posibles está entre 10^{115} y 10^{120}. Pero si contamos también las partidas "absurdas", aunque compatibles con las reglas del juego (por ejemplo, si dos jugadores, tras quedarse sólo con los reyes y un alfil, apuraran las 50 jugadas legales anteriores a la declaración de tablas), el número aumenta de forma monstruosa, como veremos a continuación.

La partida más corta y la partida más larga

El conocido "mate del pastor" da lugar a la partida más corta que suele verse en la vida real (aún hay muchos principiantes que sucumben a él). Recordemos su fulminante desarrollo con una de sus variantes más frecuentes:

1 e4, e5; 2 Ac4, Cc6; 3 Df3, d6; 4 Dxf7++.

Pero ésta no es la partida más corta posible pues, al menos en teoría, el mate se puede lograr con la mitad de movimientos que el astuto pastor. (¿Puede el lector hallar una de estas brevísimas partidas mínimas? ¿Puede hallarlas todas?)

Menos sencillo es determinar la partida más larga posible. De entrada, hay que precisar a qué clase de partida nos referimos.

En principio, dos jugadores que no pretendieran ganar ni perder, sino prolongar la partida lo más posible, podrían hacerlo indefinidamente sin más que efectuar jugadas inoperantes. Pero, según el reglamento de la FIDE (Federación Internacional de Ajedrez), una partida se considera automáticamente tablas cuando se efectúan 50 jugadas por bando sin que se haya movido ningún peón ni comido ninguna pieza. Esto impone un límite a la

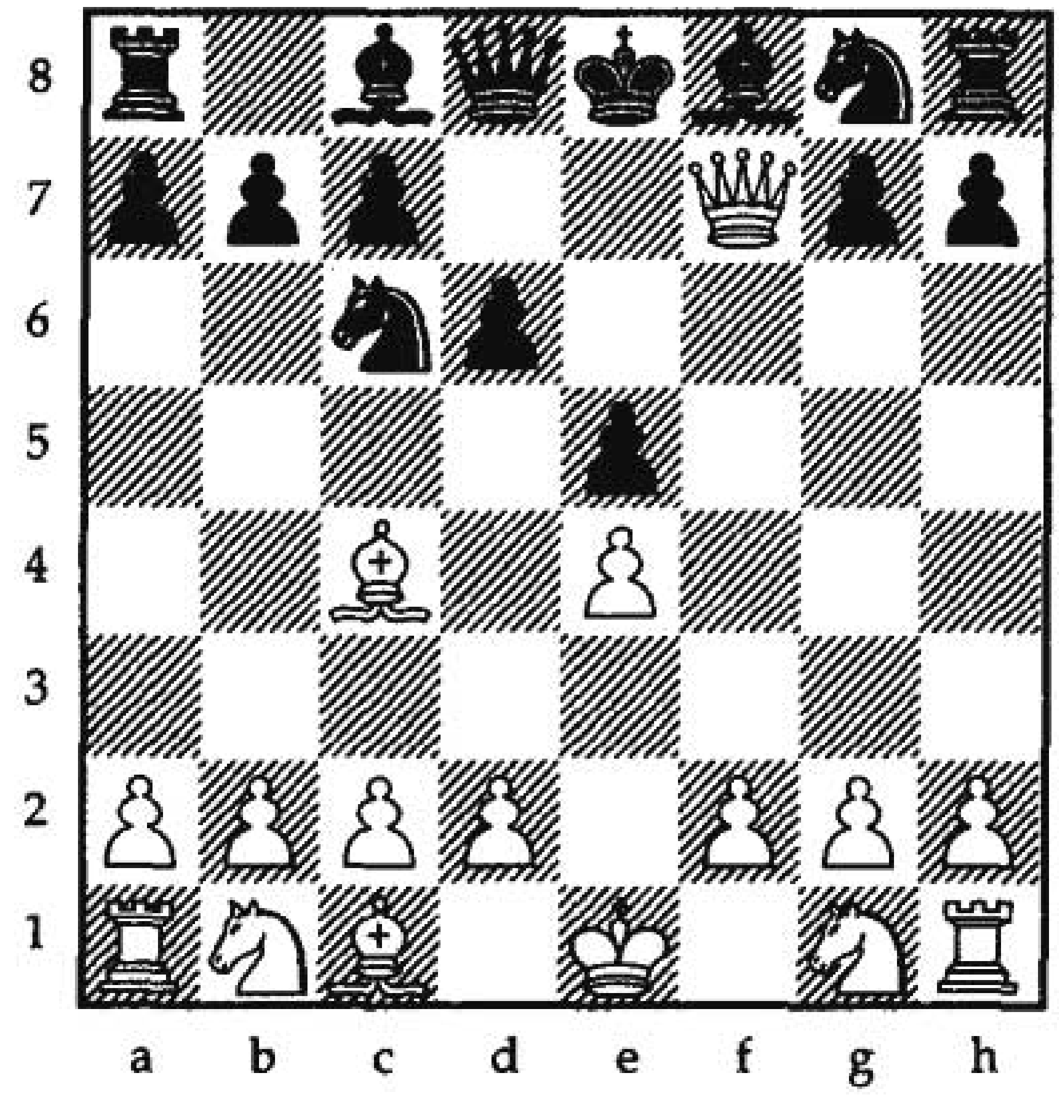


Figura 3. El mate del pastor.

partida más larga, que constará de tantas veces 50 jugadas (de ambos bandos) como movimientos de peones y capturas de piezas sean posibles.

Con los peones sólo se pueden hacer 48 movimientos por bando, y dentro de estos 96 movimientos tiene que haber 8 capturas de piezas por peones, pues de lo contrario los peones contrarios situados en una misma columna se bloquearían mutuamente. Las 6 piezas restantes y las 16 producidas por promoción de todos los peones serán comidas al ritmo más lento posible (una cada 50 jugadas) hasta que sólo queden los dos reyes en el tablero. Por lo tanto, habrá un máximo de $96 + 6 + 16 = 118$ grupos de 50 jugadas, o sea $118 \times 50 = 5.900$ jugadas. Un análisis más preciso (en el que no vamos a entrar aquí) demuestra que, en realidad "la partida más larga" terminaría con la jugada 5.899 de las blancas, en la que el rey blanco come la última pieza negra para quedarse a solas con el rey rival.

Evidentemente, si también tenemos en cuenta todas las partidas deliberadamente prolongadas al máximo, el número de partidas diferentes posibles crece de forma anonadante. Considerando que una partida puede, en teoría, llegar hasta la jugada 5.899 de las blancas, N. Petrovic ha calculado que el número total de partidas posibles es del orden de 10^{18900}.

Tras estos ejemplos iniciales, puede dar la impresión de que la relación del ajedrez con las matemáticas se plantea en el inaprensible nivel de los números astronómicos. Y, desde luego, en buena medida es así. Pero también hay muchas y muy interesantes cuestiones matemáticas relacionadas con el ajedrez que se desarrollan a una escala numérica más "humana". De ellas nos ocuparemos básicamente en los próximos capítulos.

Soluciones

La torre de Hanoi

En el caso trivial de una torre de un solo disco, es evidente que sólo se necesita un movimiento para trasladarla de su eje inicial a otro.

Si la torre consta de dos discos, harán falta tres movimientos. Llamemos A al eje en el que los discos están ensartados inicialmente, y B y C a los otros dos. En el primer movimiento, llevaremos el disco menor a uno de los ejes libres, por ejemplo a B; en el segundo movimiento, llevamos el disco mayor a C; y en el tercer y último movimiento llevamos el disco menor de B a C, con lo que quedará de nuevo sobre el mayor y se habrá completado el traslado.

Con una torre de tres discos, empezaremos haciendo con los dos superiores la misma operación que en el caso anterior, es decir, los trasladaremos al eje C en tres movimientos; acto seguido pasaremos el disco mayor a B, y luego, con otros tres movimientos análogos a los primeros, llevaremos los otros dos discos sobre el más grande.

Vemos, pues, que, siempre que añadamos un disco a la torre, necesitaremos el doble de movimientos que en el caso anterior más uno, con lo que se obtiene la serie: 1, $2 \times 1 + 1 = 3$, $2 \times 3 + 1 = 7$, $2 \times 7 + 1 = 15$...

Que esta serie responde a la fórmula general 2^n-1 se demuestra recurriendo de nuevo (ya lo hemos hecho en el paso anterior) al método de inducción; pues bastará demostrar que si un número es de la forma 2^m-1, su doble más uno también es de esa forma, con el exponente aumentado en una unidad. Y, en efecto, $2(2^m - 1) + 1 = 2^{m+1} - 2 + 1 = 2^{m+1} - 1$. Por lo tanto, como el primer miembro de nuestra serie (correspondiente a una torre de un solo disco) se puede expresar en la forma $2^1 - 1$, los siguientes serán $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^4 - 1$... $2^n - 1$, como queríamos demostrar.

En el primer capítulo de su delicioso libro de divulgación *Uno, dos, tres... infinito,* George Gamow utiliza la leyenda del ajedrez y los granos de trigo y la apócrifa historia de la torre de Brahma como introducción al tema de los grandes números. Y en *Mathematical Puzzles and Diversions,* Martin Gardner dedica todo un capítulo a la torre de Hanoi y a su sorprendente relación con los circuitos de Hamilton.

La segunda jugada

Para calcular cuántas posiciones distintas pueden darse tras el segundo movimiento de las blancas, podemos considerar primero las posibles combinaciones de dos movimientos blancos y multiplicarlas por 20 (que son las posibilidades de las negras en su único movimiento).

El cálculo puede desglosarse de la forma siguiente, en función de las diversas opciones del bando blanco para sus dos movimientos:

Mueve dos peones: 16 × 14 × 20 : 2 = 2.240
Mueve dos veces un mismo peón: 16 × 20 + 14 posibles capturas –8 clavadas = 326
Mueve un peón y una pieza: 121 × 20 – 4 obstrucciones = 2.416
Mueve un caballo y lo devuelve a su casilla: 20
Mueve un caballo dos veces sin retroceder: 10 × 20 = 200
Mueve los dos caballos: 4 × 20 = 80
Mueve un caballo y una torre: 4 × 20 = 80
Total: 2.240 + 326 + 2.416 + 20 + 200 + 80 + 80 = 5.326

La partida más corta

Con la suicida colaboración de las blancas, las negras pueden dar mate en dos jugadas: 1 f3, e6; 2 g4, Dh4++.

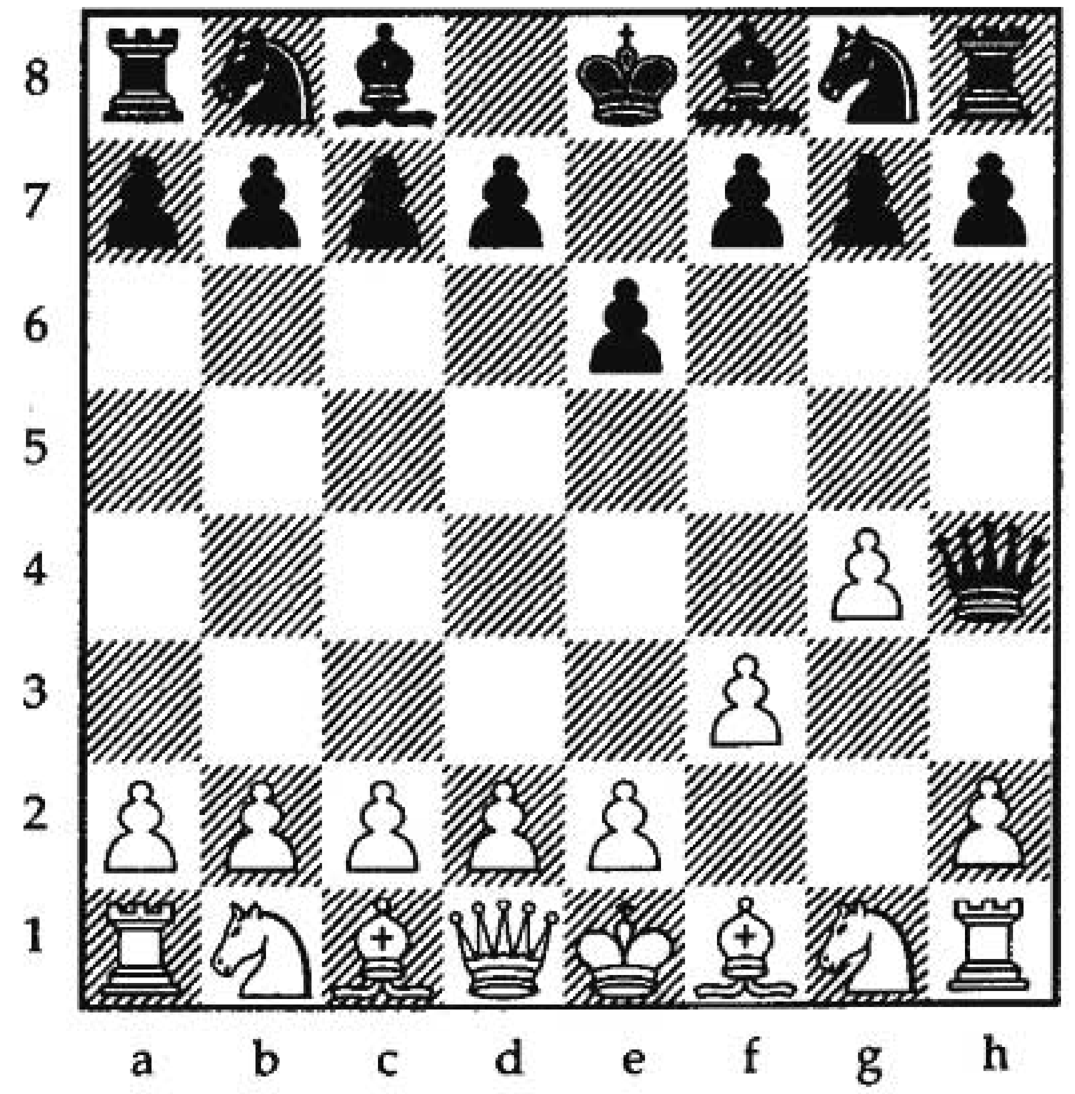


Figura 4.

La solución se puede considerar única, en el sentido de que las demás posibilidades son variantes triviales de ésta. Así, las blancas pueden jugar f4 en lugar de f3 y las negras e5 en vez de e6, y el orden de las dos jugadas blancas se puede invertir, con lo que hay 8 series de movimientos distintas que dan lugar al llamado "mate del tonto". La solución dada más arriba (junto con su equivalente 1 g4, e6; 2 f3, Dh4++) es támbién mínima en el sentido de que supone el menor desplazamiento posible con respecto a la posición de partida.

En *Ajedrez y matemáticas*, de Bonsdorff, Fabel y Riihimaa, se analizan a fondo temas como el de las partidas más cortas y más largas y el número total de posiciones y partidas posibles.

2

Solos en el tablero

Imaginemos que acabamos de terminar la más larga de las partidas posibles (lo que sólo nos habrá llevado unas tres horas, al ritmo de un movimiento por segundo) y nos hemos quedado con los dos reyes solos en el tablero. ¿De cuántas formas distintas pueden estar colocados? O, dicho de otra manera, ¿de cuántas formas puede terminar la partida más larga? (Invito al lector a hallar la respuesta por sí mismo.)

En la figura 5 vemos uno de estos posibles finales, después de que el rey blanco, en su jugada 5.899, comiera la última pieza negra. Claro que a esa posición se puede llegar en bastante menos de 5.899 jugadas. Sam Loyd, el gran inventor de pasatiempos

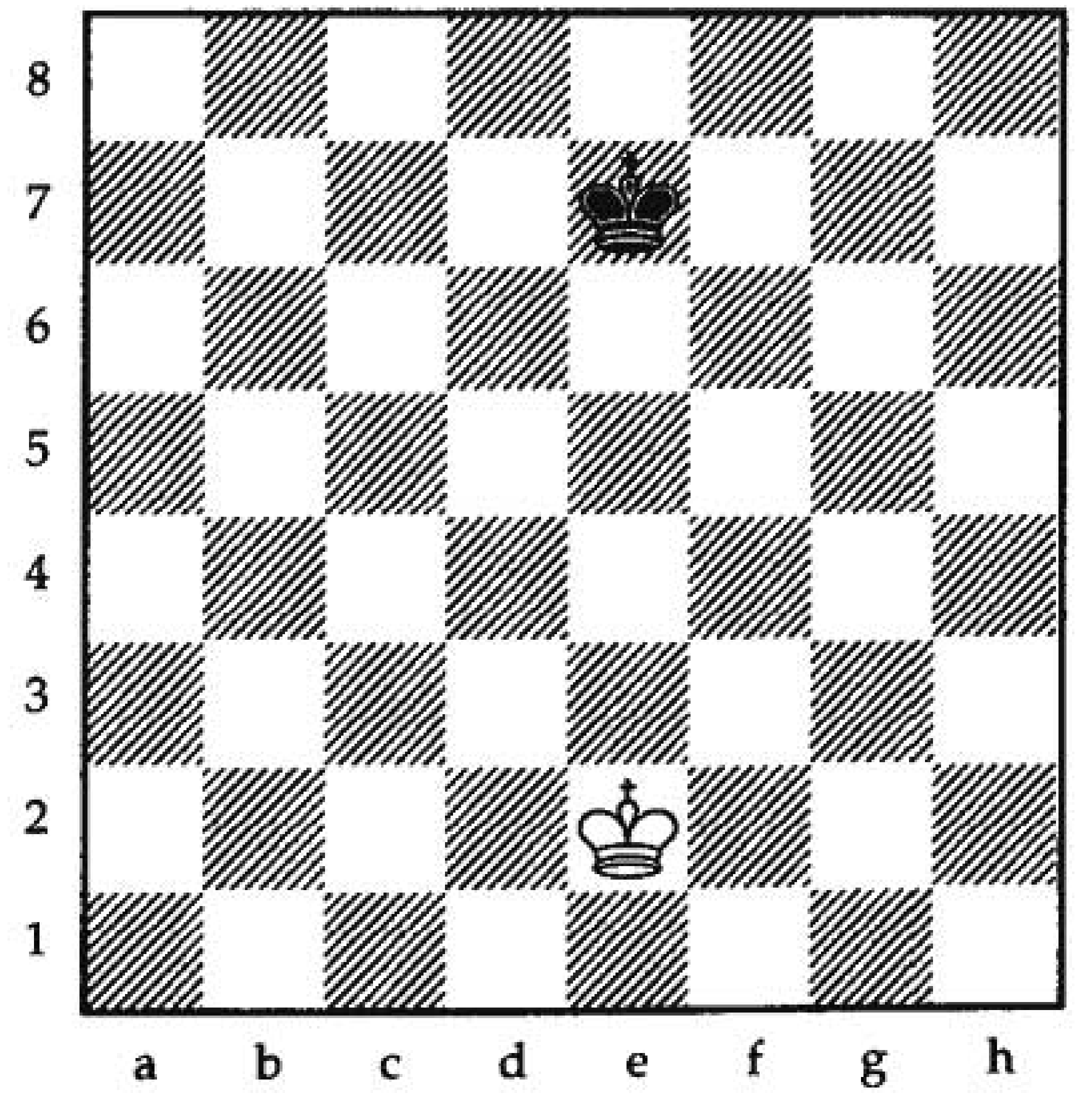


Figura 5.

lógicos del siglo pasado, halló en 1866 una solución en 17 jugadas. Es decir, tras la 17ª jugada de las negras todas las piezas han sido comidas y los dos reyes quedan solos en el tablero. ¿Se atreve el lector a intentar repetir la hazaña de Loyd? Una pista: la posición final es precisamente la de la figura (con el rey blanco en e2 y el negro en e7), y el rey negro acaba de comer una torre.

Después de habernos enfrentado a monstruosidades numéricas como las del capítulo anterior, resulta reconfortante ver el tablero tan despejado y manejar números asequibles. Pero aún podemos despejarlo un poco más, si eliminamos uno de los reyes para analizar las solitarias andanzas del rey restante.

Un rey solo sobre el tablero puede servir como metáfora de la soledad de los monarcas, pero no parece que dé mucho juego. Sin embargo, es una situación que se presta a plantear algunas cuestiones menos triviales de lo que pueden parecer a primera vista.

El camino real

Consideremos, por ejemplo, uno de los recorridos más sencillos que puede efectuar el solitario rey blanco: ir de su casilla a la del rey negro (o sea, de e1 a e8). Es evidente que para ello necesitará por lo menos 7 movimientos y que el camino más corto, desde el punto de vista geométrico, consiste, sencillamente, en ir en línea recta, recorriendo casilla tras casilla la columna e. Pero es igualmente obvio que si lo único que pretendemos es ir de e1 a e8 en el menor número de movimientos, prescindiendo de la longitud geométrica del recorrido, hay otros muchos caminos posibles, como los indicados en la figura 6. ¿Podría el lector calcular por cuántos caminos diferentes puede ir el rey de e1 a e8 en 7 movimientos?

Propongámosle ahora a nuestro rey un paseo un poco más largo. O, mejor aún, el paseo más largo que permite su cuadriculado reino: recorrer todo el tablero sin pasar dos veces por la misma casilla.

Los solitarios recorridos de una pieza por todo el tablero sin pasar dos veces por la misma casilla, llamados "poligrafías",[1] constituyen una de las familias de problemas ajedrecísticos más conocidas, y a ellos nos dedicaremos en las páginas siguientes.

1. En realidad, la poligrafía es el diagrama o representación gráfica del recorrido, pero, por comodidad, también se usa el término para referirse al recorrido mismo.

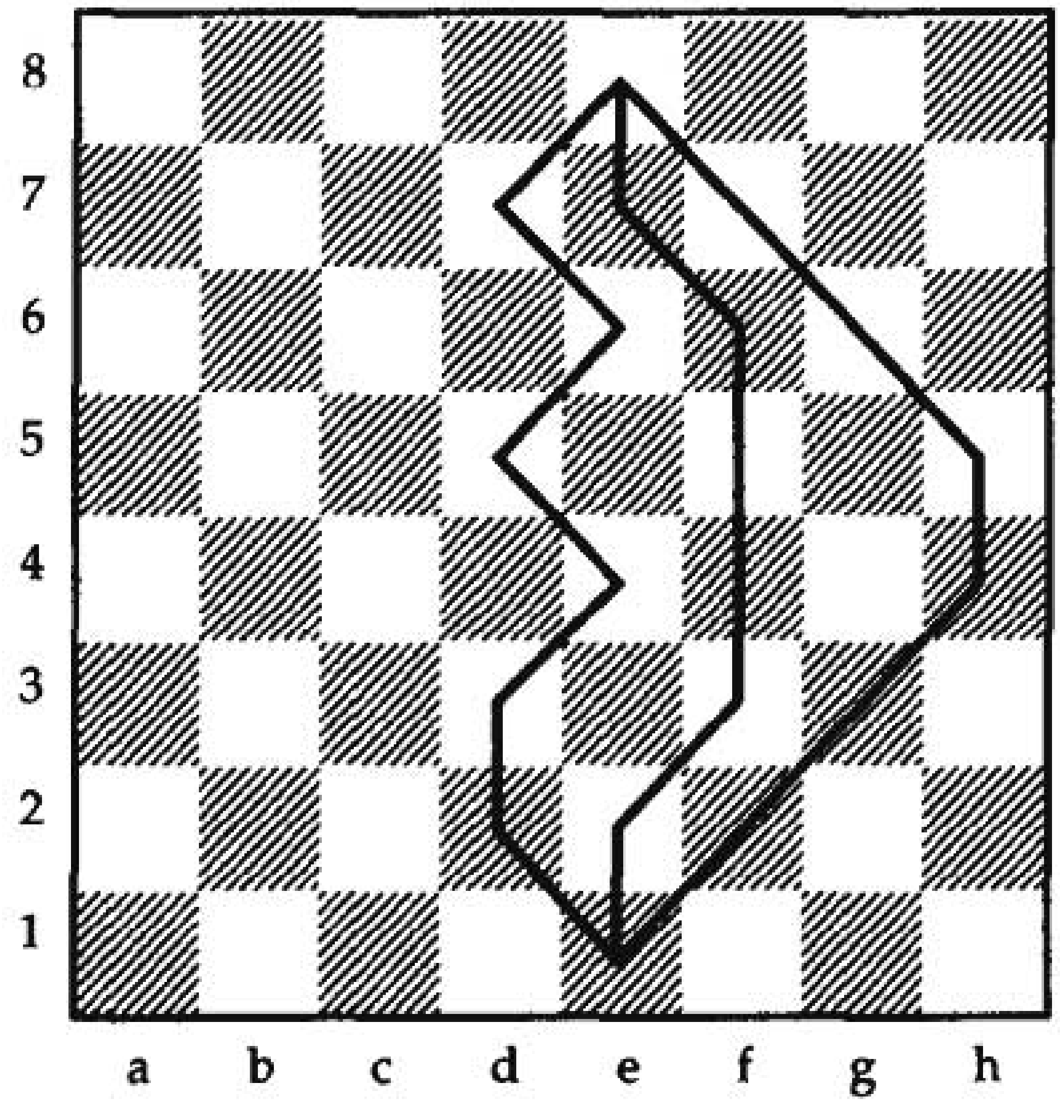


Figura 6.

En el caso concreto del rey, el problema tiene escaso interés (el lector puede comprobar lo sencillo que es hallar "poligrafías reales"), a no ser que se lo complique con alguna condición adicional.

Por ejemplo, supongamos que el rey blanco parte de su posición inicial y vamos numerando las casillas en el orden en que las visita (empezando a contar por la casilla de partida, e1, a la que corresponderá, por tanto, el número 1). Existe un recorrido, descubierto por I. Ghersi, que convierte el tablero numerado de esta forma en un cuadrado mágico de orden 8, en el que los números de cada fila o columna, así como los de cada una de las dos diagonales mayores, suman lo mismo. (Si el lector no se anima a buscar el recorrido de Ghersi, calcule por lo menos cuánto sumarán los ocho número de cada fila o columna.)

También se consigue un pequeño aumento de la dificultad (y de la belleza) de la poligrafía real si se añade la condición de que el recorrido sea cerrado (es decir, que la casilla final sea contigua a la inicial, de forma que con un movimiento más el rey pueda cerrar el circuito y volver al punto de partida) y simétrico respecto del eje vertical que divide el tablero en dos mitades. (El lector dispone de diez minutos para hallar una poligrafía real cerrada y simétrica.)

Poligrafías de dama, torre y alfil

La gran movilidad de la dama hace que sus poligrafías sean aún más variadas y fáciles de hallar que las del rey.

Evidentemente, todas las poligrafías del rey lo son también de la dama, ya que ésta puede, si lo desea, limitar su movilidad y desplazarse casilla a casilla como su consorte. Y, análogamente, también puede hacer suyas todas las poligrafías de la torre y del alfil, que veremos a continuación, ya que reúne la capacidad de movimiento de ambas piezas.

Una puntualización: hemos visto que, en una poligrafía, la pieza no puede visitar dos veces la misma casilla. Por visitar una casilla se entiende, normalmente, detenerse en ella; pero se podría considerar que también se visita una casilla cuando, simplemente, se pasa por ella para ir de una a otra. (Esta disyuntiva no se da en el caso del rey, puesto que para él pasar por una casilla y detenerse en ella son una misma cosa.)

En el segundo caso, obviamente, las posibilidades se reducen, pues equivale a añadir la condición de que en la trayectoria no se produzca ningún cruce dentro de una casilla.

El lector puede entretenerse buscando poligrafías de dama de uno u otro tipo (con cruces o sin ellos) y sujetas a distintas condiciones. Por ejemplo, una que sea simétrica con respecto al centro del tablero.

Las poligrafías de torre son triviales, como puede verse en el ejemplo de la figura 7. (El lector hallará sin dificultad una poligrafía de torre cerrada y simétrica respecto de los dos ejes del tablero.)

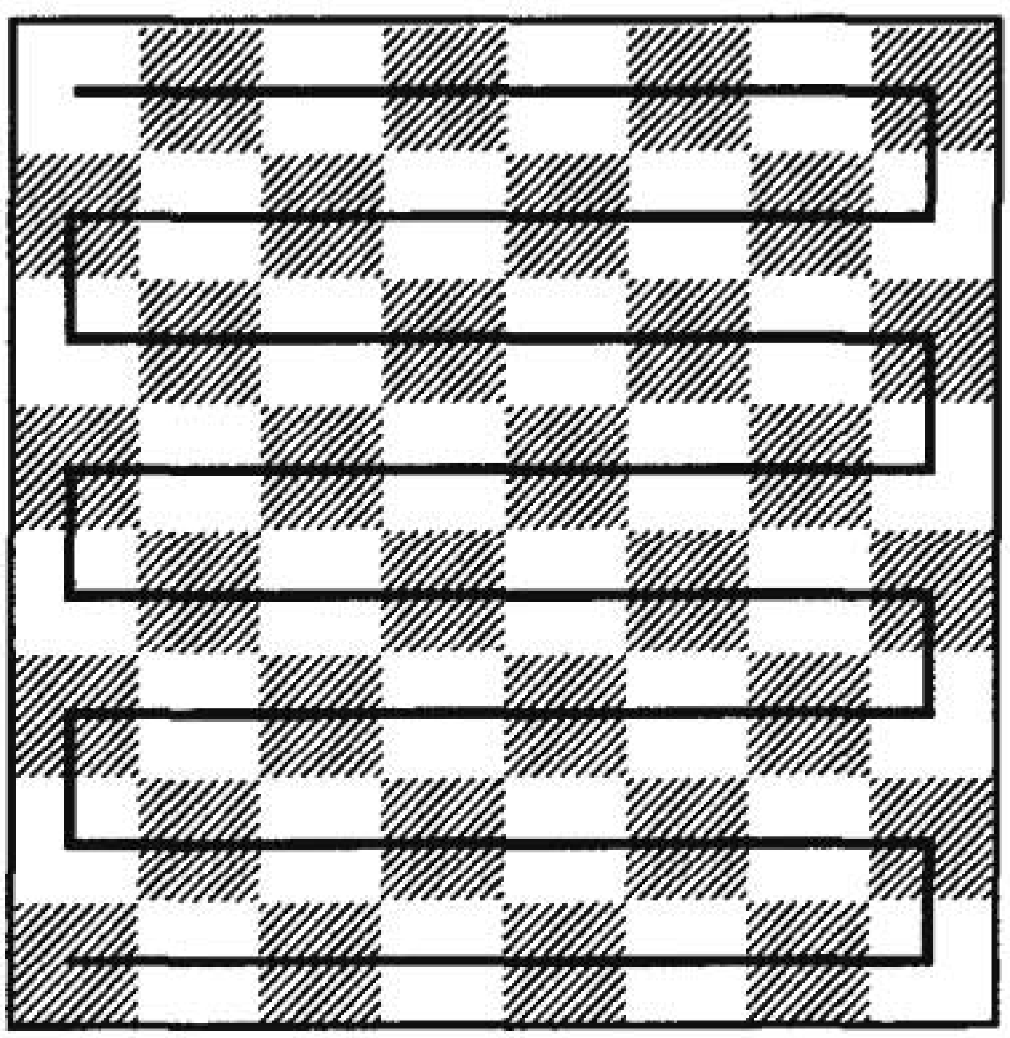


Figura 7.

El cuanto al alfil, ¿es posible su poligrafía si por visitar una casilla entendemos también el mero hecho de pasar por ella? Tras contestar esta pregunta, el lector puede buscar una poligrafía de alfil cerrada y simétrica respecto del centro del tablero. (Huelga señalar que el alfil sólo puede visitar las 32 casillas de un color.)

Otros recorridos

Hasta ahora nos hemos limitado a las poligrafías ortodoxas, es decir, los recorridos en los que la pieza sale de su propia casilla (la que ocupa al comienzo de una partida).

Variando la casilla inicial, cabe plantear otros problemas; e, incluso, determinar la casilla de partida idónea puede ser parte del problema. Por ejemplo: Situar la dama en el tablero y, en sólo 14 movimientos, recorrer todas las casillas regresando al punto de partida.

O bien se puede dar la casilla inicial y pedir que se determine el mínimo número de movimientos necesarios. Por ejemplo: Situar la torre en una de las casillas centrales (figura 8) y recorrer todo el tablero en el menor número de movimientos posible, regresando al punto de partida.

O, más difícil todavía, hay que hallar tanto la casilla de partida como el mínimo número de movimientos. Por ejemplo: Colocar un alfil en el tablero y recorrer las 32 casillas de un color en el menor número de movimientos posible. (Sugiero al lector que intente resolver estos tres ejemplos antes de seguir.)

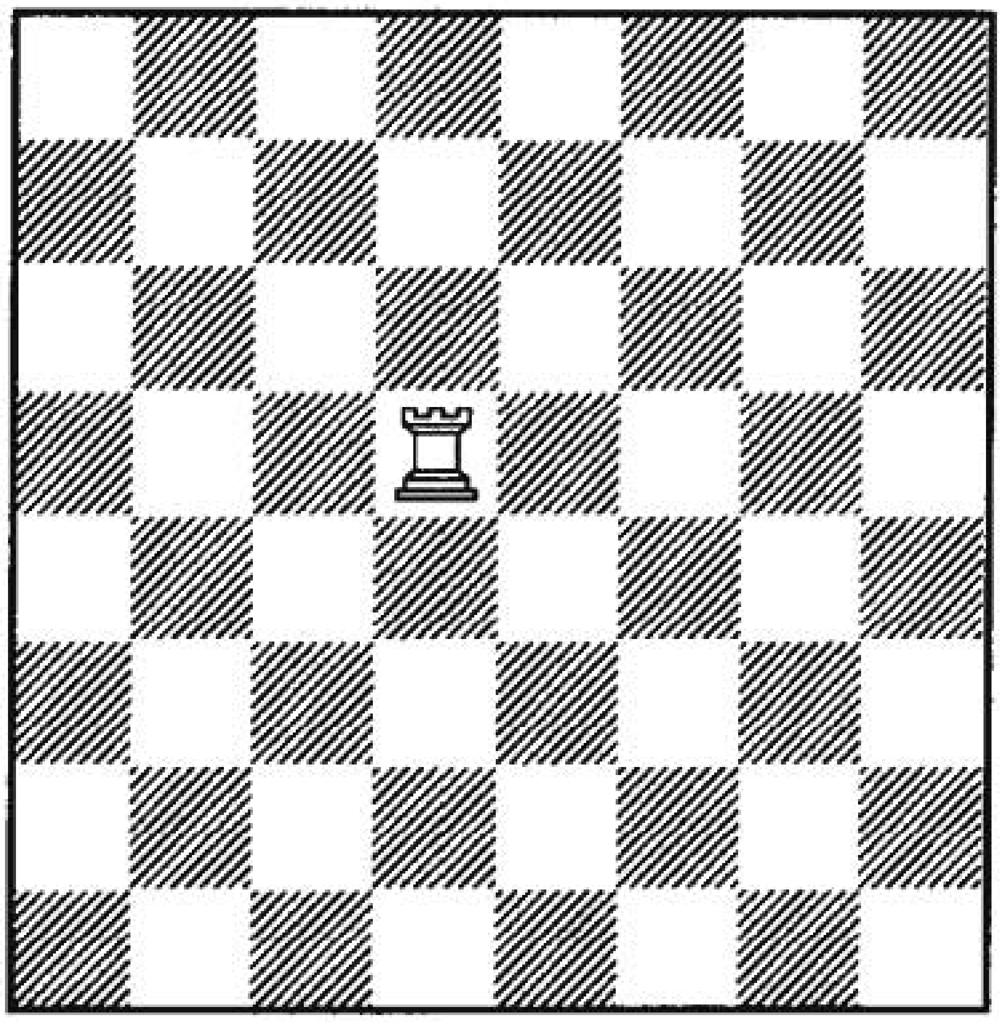


Figura 8.

A veces los problemas de recorridos adoptan formas extra-ajedrecísticas, como en este ejemplo tomado de *Amusements in Mathematics*, de Henry Dudeney: Un coche parte del cruce A, en el borde de una zona urbana cuadrada de siete manzanas (también cuadradas) de lado (figura 9), y debe recorrer el itinerario más largo posible sin pasar dos veces por el mismo tramo y sin efectuar más de 15 giros; además, debe pasar por el máximo número de cruces posible. Como puede verse, el problema es homólogo al de una torre que, partiendo de la casilla del rey blanco, tuviera que efectuar el recorrido más largo y pasar por el máximo número de casillas en 16 movimientos.

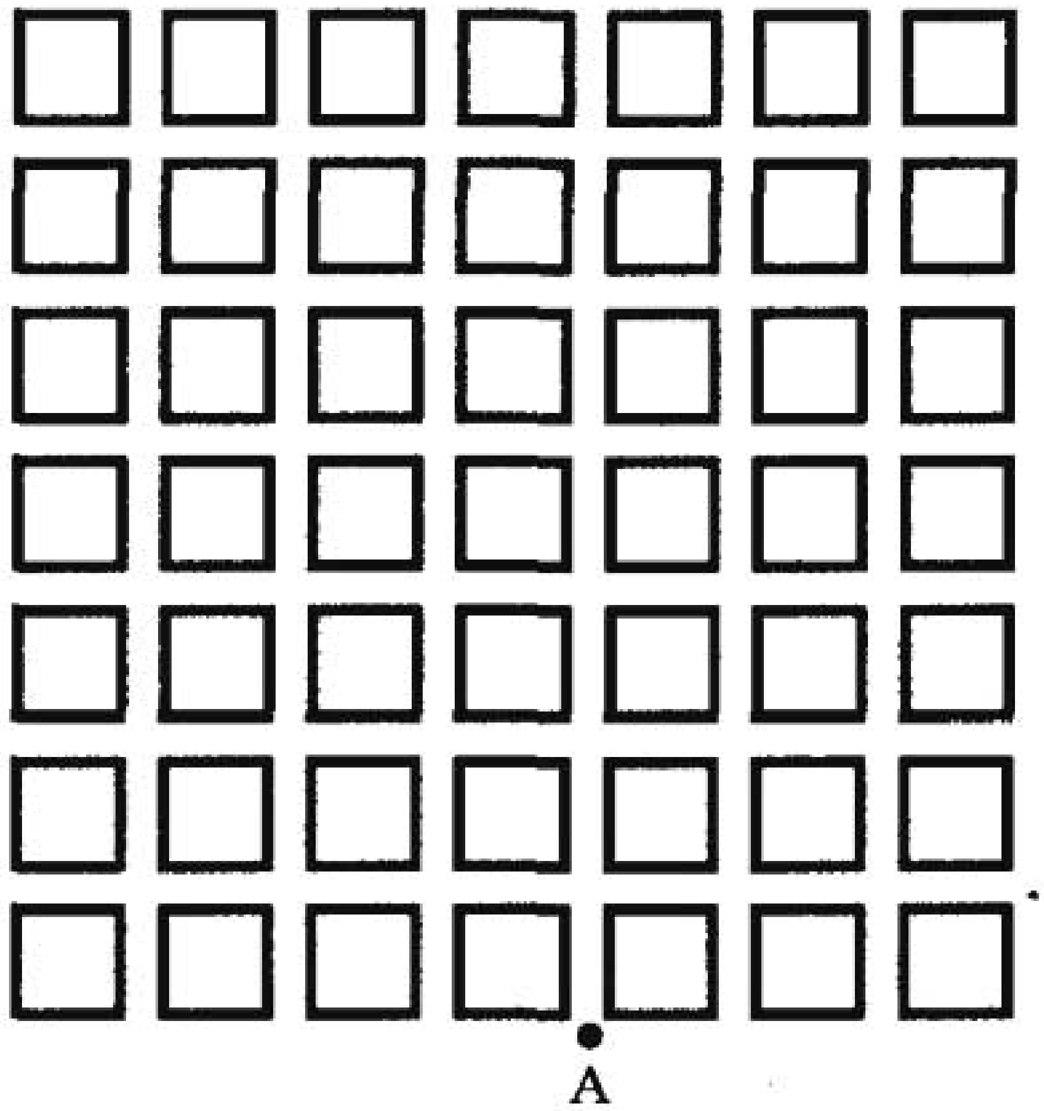


Figura 9.

En la figura 10 vemos, esquematizada (cada punto representa un cruce), la solución dada por Dudeney en su libro: un recorrido de 70 unidades (tomando como unidad la distancia entre dos cruces contiguos) que pasa por 45 cruces. Pero esta solución no es la mejor posible, ni en cuanto a la longitud del recorrido ni en cuanto al número de cruces visitados. ¿Podría el lector mejorar la solución de Dudeney? (No se devane los sesos buscando una solución que sea a la vez una poligrafía completa; la mejor que se conoce deja sin visitar —y con ello le doy una pista— uno de los cruces.)

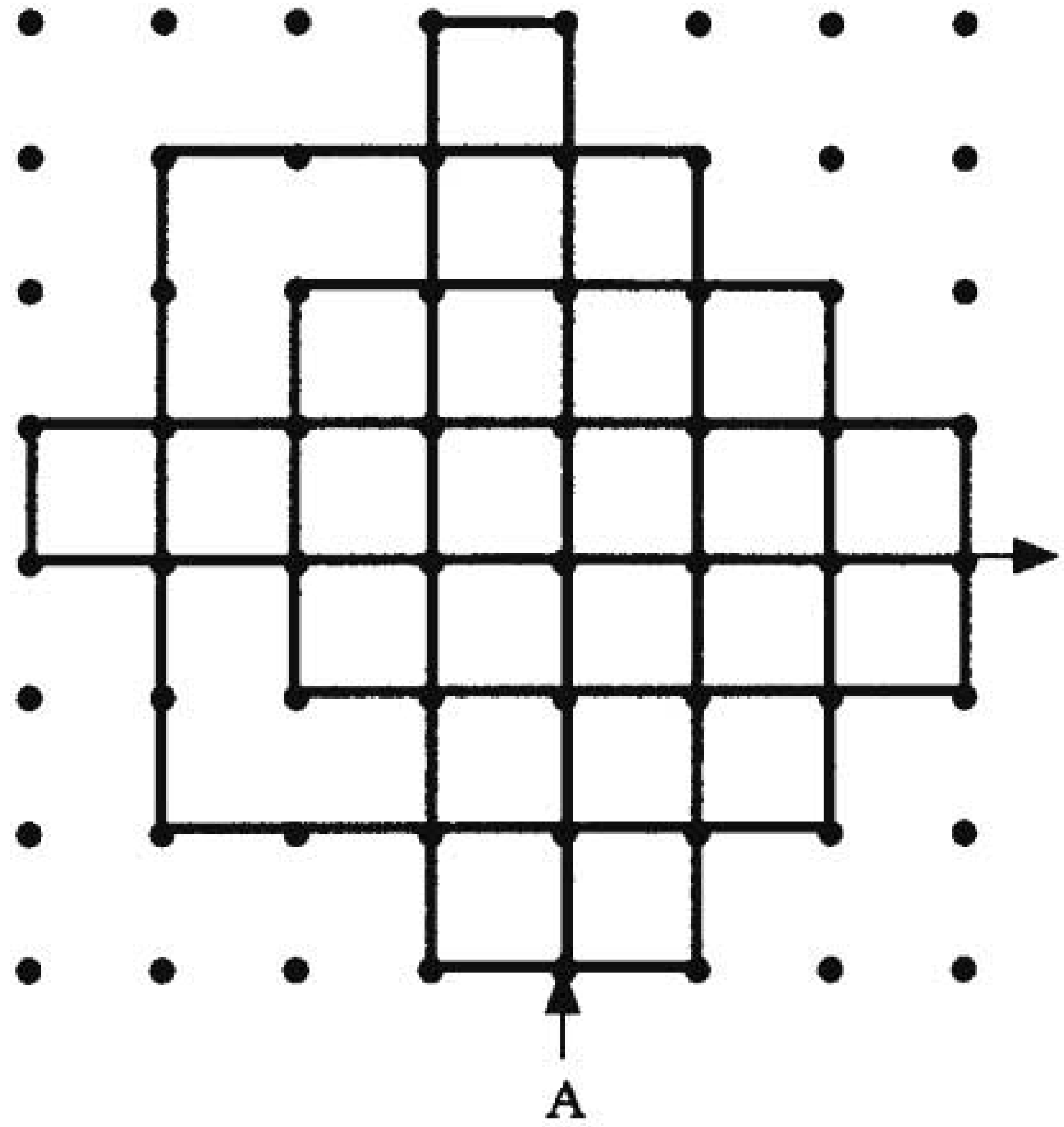


Figura 10.

Soluciones

Reyes solos

Si los reyes pudieran estar en casillas contiguas, la solución sería 64 × 63 = 4.032, ya que un rey podría estar en cualquiera de las 64 casillas y, para cada una de estas posibilidades, el otro podría estar en cualquiera de las 63 restantes. Pero las posibilidades compatibles con las reglas del juego son menos, ya que, como los reyes no pueden estar contiguos, cuando uno está en una de las 4 esquinas invalida para el otro 4 casillas (la que él mismo ocupa y las tres contiguas), cuando está en una de las otras 24 casillas periféricas invalida 6, y cuando está en una de las 36 casillas interiores invalida 9 (fig. 11). Por tanto, el número total de posiciones posibles será 4 (64 – 4) + 24 (64 – 6) + 36 (64 – 9) = 3.612.

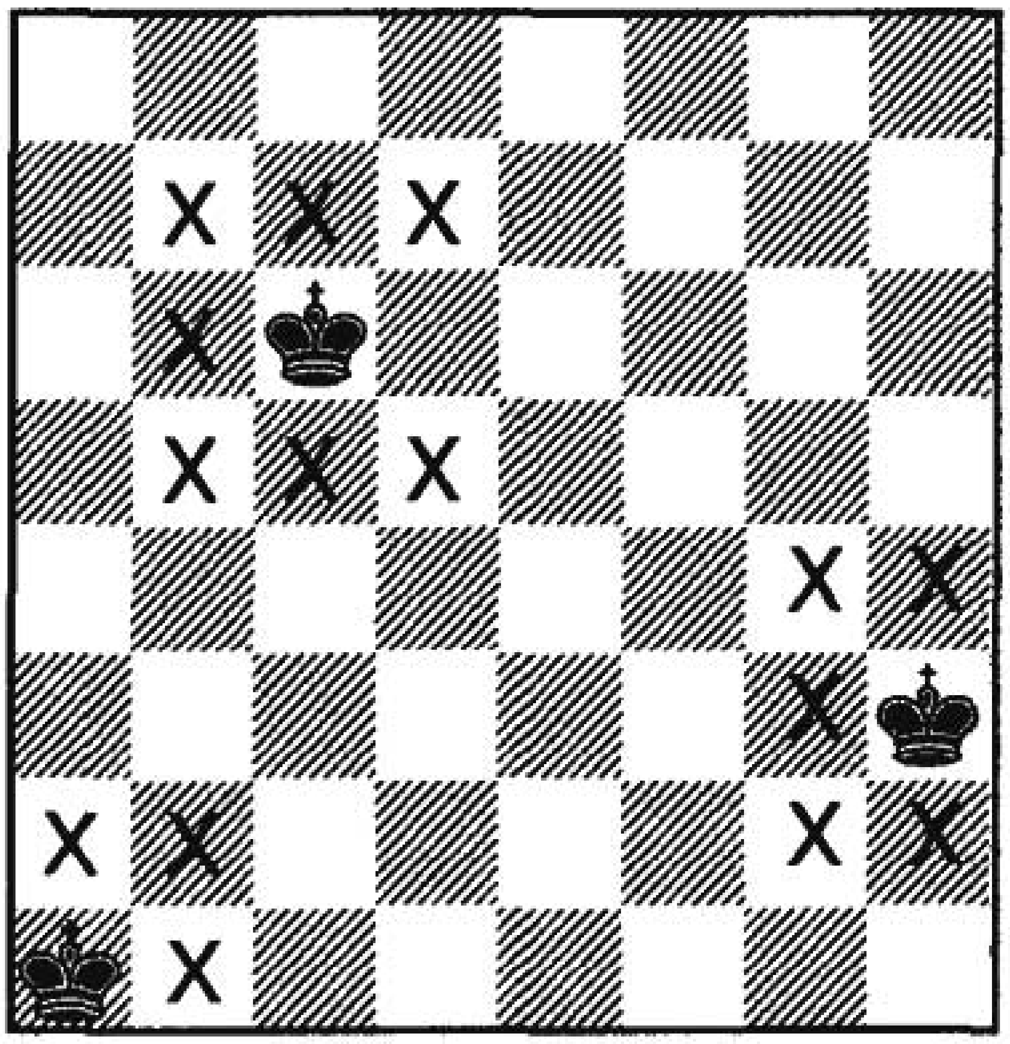


Figura 11.

La partida más corta que deja los dos reyes solos en el tablero es la siguiente: 1 c4, d5; 2 cxd5, Dxd5; 3 Dc2, Dxg2; 4 Dxc7, Dxg1; 5 Dxb7, Dxh2; 6 Dxb8, De5; 7 Dxc8, Txc8; 8 Txh7, Dxb2; 9 Txh8, Dxa2; 10 Txg8, Dxd2+; 11 Rxd2, Txc1; 12 Txg7, Txb1; 13 Txf7, Txf1; 14 Txf8+, Rxf8; 15 Txa7, Txf2; 16 Txe7, Txe2+; 17 Rxe2, Rxe7. (Ignoro si existe alguna otra solución sustancialmente distinta de la de Loyd.)

Para ir de e1 a e8 en 7 movimientos, el rey tiene que pasar a una fila superior en cada movimiento, sin salirse del recinto numerado (figura 12).

	a	b	c	d	e	f	g	h
8					393			
7				126	141	126		
6			30	45	51	45	30	
5		4	10	16	19	16	10	4
4		1	3	6	7	6	3	1
3			1	2	3	2	1	
2				1	1	1		
1					0			

Figura 12.

Para pasar de e1 a la fila 2, puede elegir entre las casillas d2, e2 y f2, y a todas ellas puede ir, obviamente, por un solo camino, y por eso las numeramos con sendos unos (como a la casilla e1 el rey no va por ningún camino, pues ya está en ella, le podemos poner un cero). A la casilla c3 también puede ir por un solo camino (e1-d2-c3), y lo mismo ocurre con la g3, por lo que también llevan un 1 cada una. Pero a la casilla d3 el rey puede llegar por dos caminos diferentes (e1-e2-d3 o e1-d2-d3), y por eso le ponemos un 2; y lo mismo ocurre con la casilla f3. A la casilla e3 se puede llegar por tres caminos distintos (e1-e2-e3, e1-d2-d3, e1-f2-d3), y por tanto lleva un 3.

El número de cada casilla será, pues, la suma de los números de las casillas de la fila inferior que dan acceso a ella. Es decir, como a e4 puede ir el rey desde d3, e3 y f3, podrá elegir, al iniciar su recorrido, entre los 2 caminos que llevan a d3, los 3 que llevan a e3 y los 2 que llevan a f3, en total 2 + 3 + 2 = 7. Siguiendo con el proceso, vemos que el rey puede llegar a e8, en 7 movimientos, por 393 caminos diferentes.

En cuanto al cuadrado mágico de orden 8, el cálculo de lo que suma cada fila o columna es trivial. Puesto que en el tablero están los números del 1 al 64, la suma total será 2.080; y si las 8 filas han de sumar lo mismo, cada una sumará 2.080 : 8 = 260.

36	35	34	33	32	31	30	29
37	22	39	40	25	26	43	29
21	38	23	24	41	42	27	44
20	19	18	17	48	47	46	45
13	14	15	16	49	50	51	52
12	59	10	9	56	55	6	53
60	11	58	57	8	7	54	5
61	62	63	64	1	2	3	4

Figura 13.

Menos fácil es hallar el cuadrado mágico generado por la poligrafía del rey de la figura 13.

En la figura 14 vemos una poligrafía real cerrada y simétrica respecto del eje vertical.

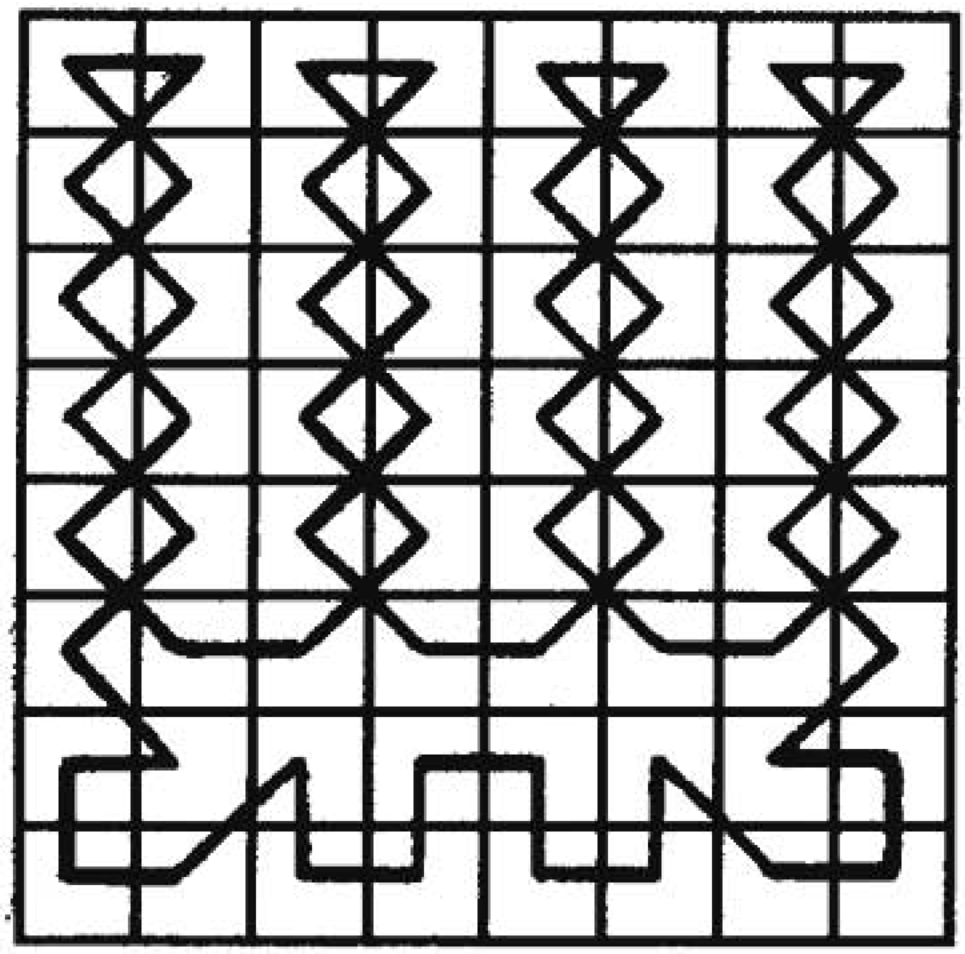
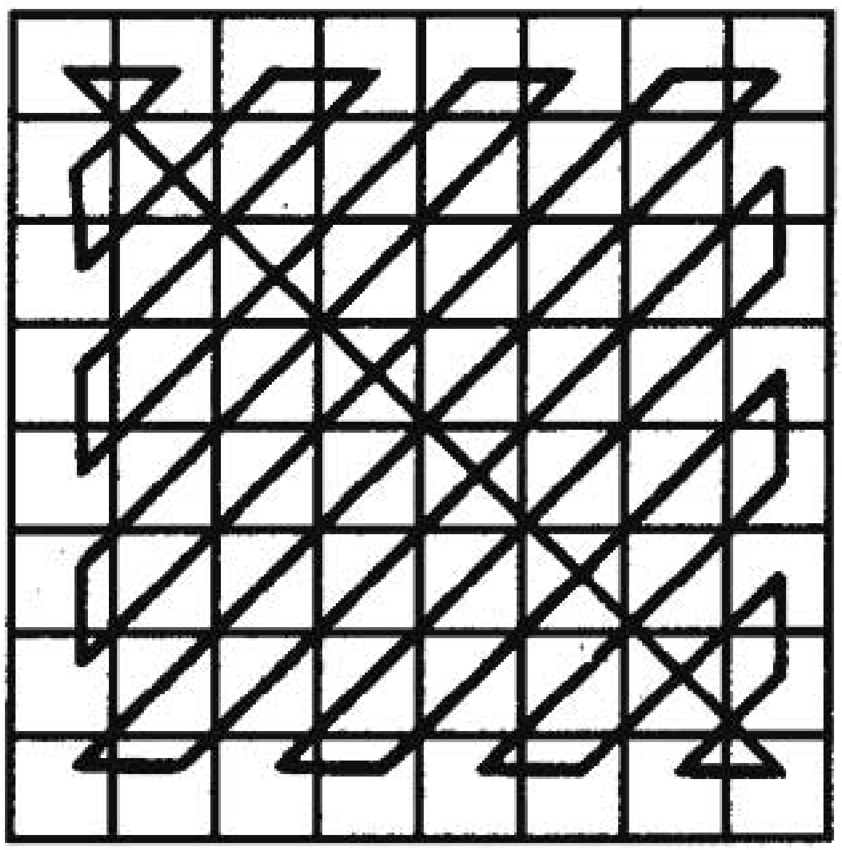


Figura 14.

Poligrafías de dama, torre y alfil

En la figura 15 vemos una poligrafía de dama cerrada y simétrica respecto del centro del tablero, y una poligrafía de torre cerrada y simétrica respecto de los dos ejes.



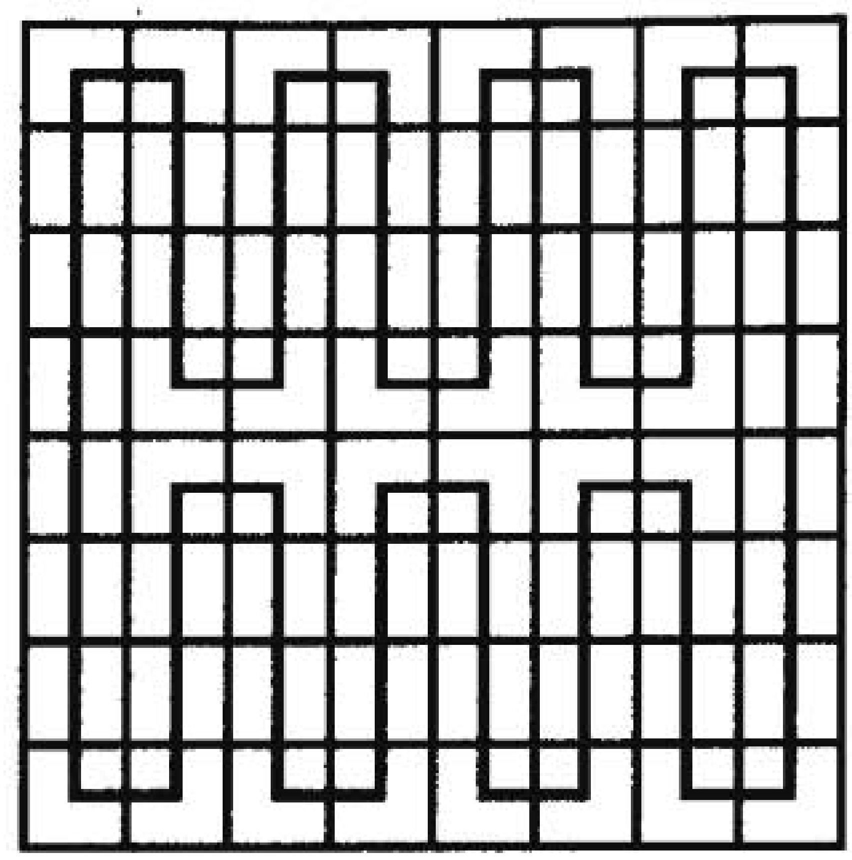


Figura 15.

Si el alfil sale de su casilla, es evidente que no puede recorrer las 32 casillas de ese color sin pasar dos veces por ninguna de ellas, ya que a las dos esquinas del tablero correspondientes sólo tiene acceso desde las dos casillas diagonalmente contiguas (desde las cuales, por tanto, tiene que entrar en y salir de las esquinas). La única posibilidad sería, pues, empezar el recorrido en una esquina y terminarlo en la opuesta. Pero esto tampoco es posible sin efectuar ningún cruce, como puede verse fácilmente. Supongamos que el alfil parte de a1: evidentemente, en su primer movimiento tiene que pasar por b2, desde donde puede seguir por la diagonal principal o pasar a a3 o a c1. Si va a a3, c1 se convierte en una nueva "esquina" de acceso único (pues ahora sólo podemos entrar en ella por d2, con lo que ya no podremos salir sin pasar por una casilla por la que ya hemos pasado) y, viceversa, si va a c1 se "esquiniza" a3. Y si sigue por la diagonal principal se "esquinizan" tanto a3 como c1, por lo que también en este caso la poligrafía sin cruces es imposible.

En la figura 16 vemos una poligrafía del alfil cerrada y simétrica respecto del centro, y con sólo 6 cruces. (Ignoro si se puede conseguir con menos cruces.)

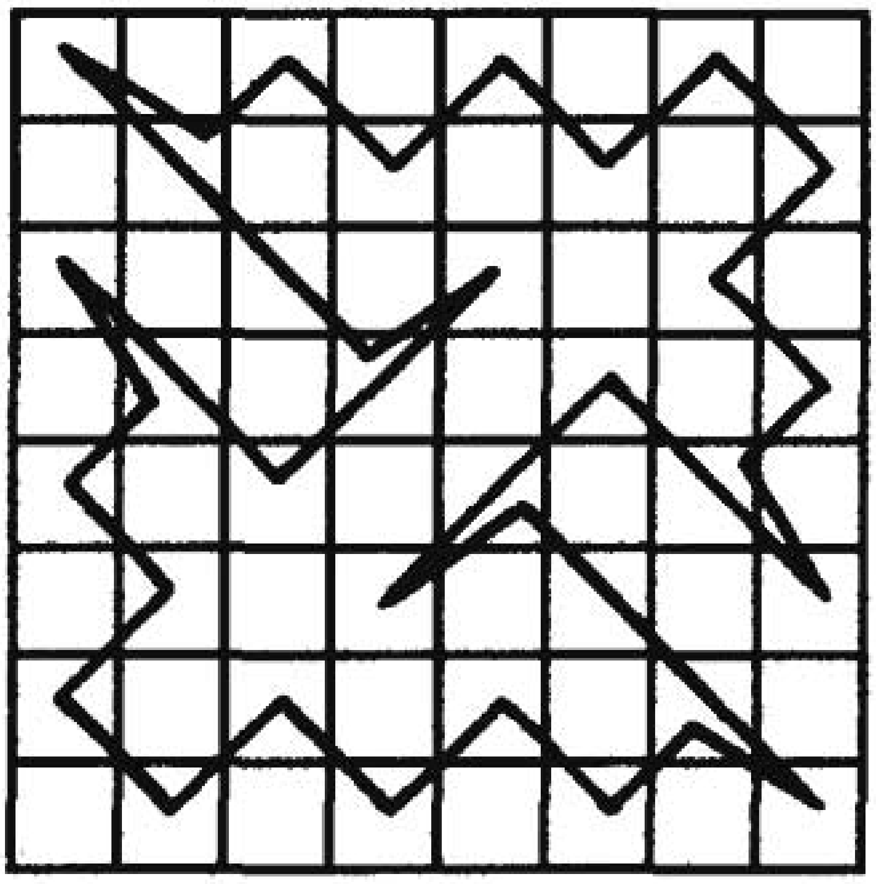


Figura 16.

Otros recorridos

Partiendo de una de las esquinas del tablero (o de cualquiera de las casillas en que se produce un cambio de dirección), la dama puede recorrer todas las casillas y regresar al punto de partida en 14 movimientos, tal como se ve en la figura 17.

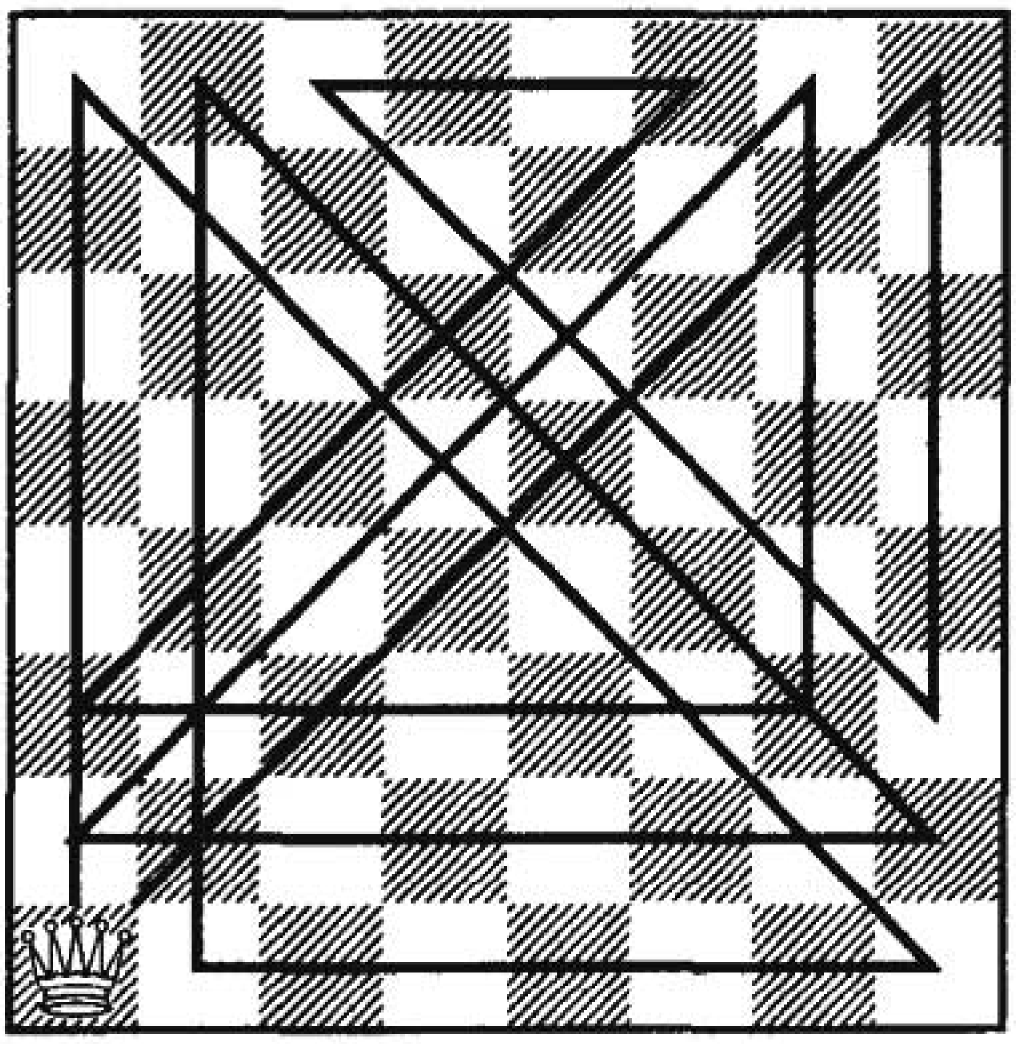


Figura 17.

Partiendo de una de las casillas centrales, la torre necesita 16 movimientos para recorrer todo el tablero y regresar al punto de partida. En la figura 18 vemos las dos únicas soluciones.

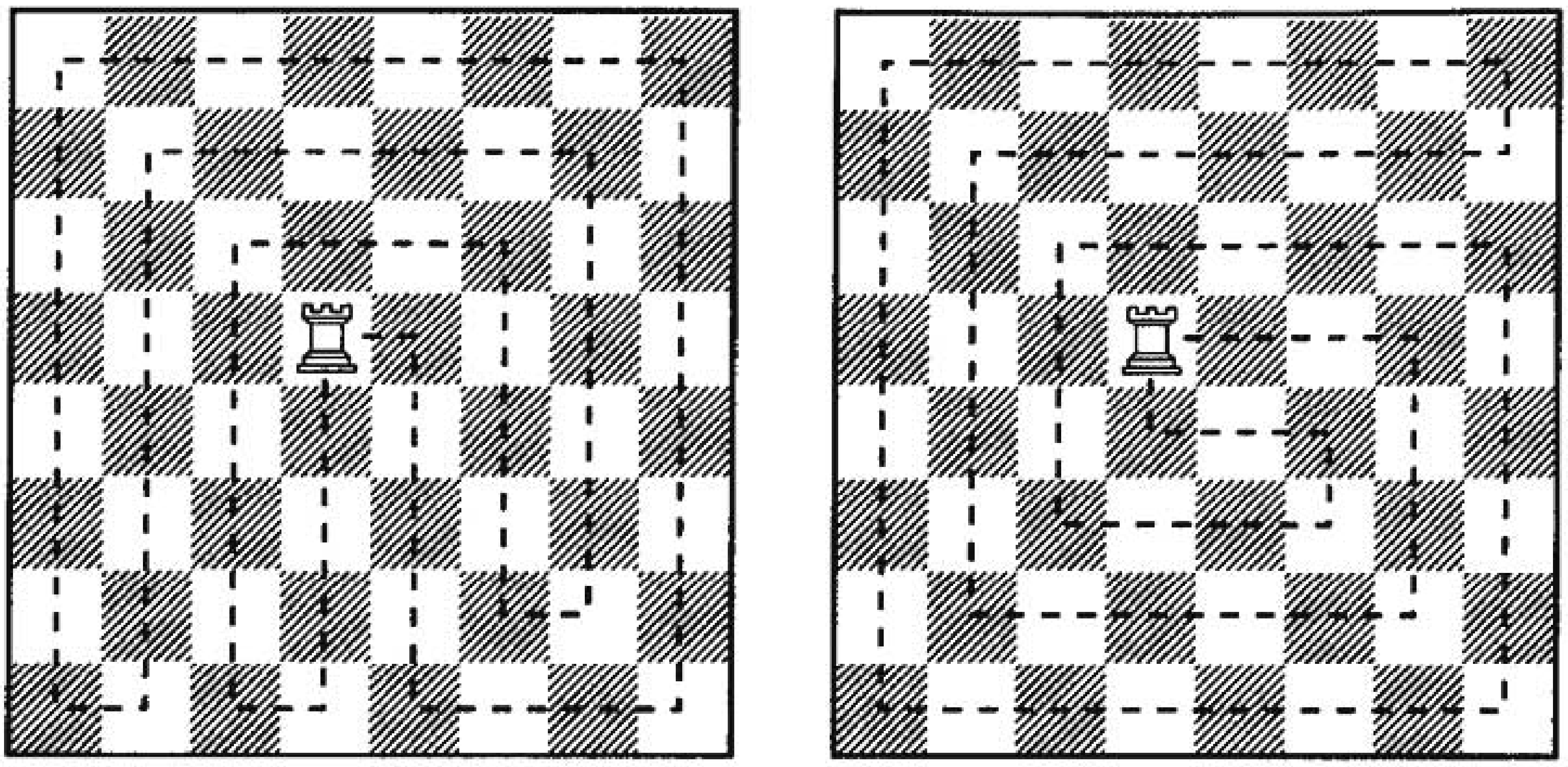


Figura 18.

Partiendo de una esquina del tablero y terminando en la otra, un alfil puede recorrer todo el tablero en un mínimo de 17 movimientos (figura 19).

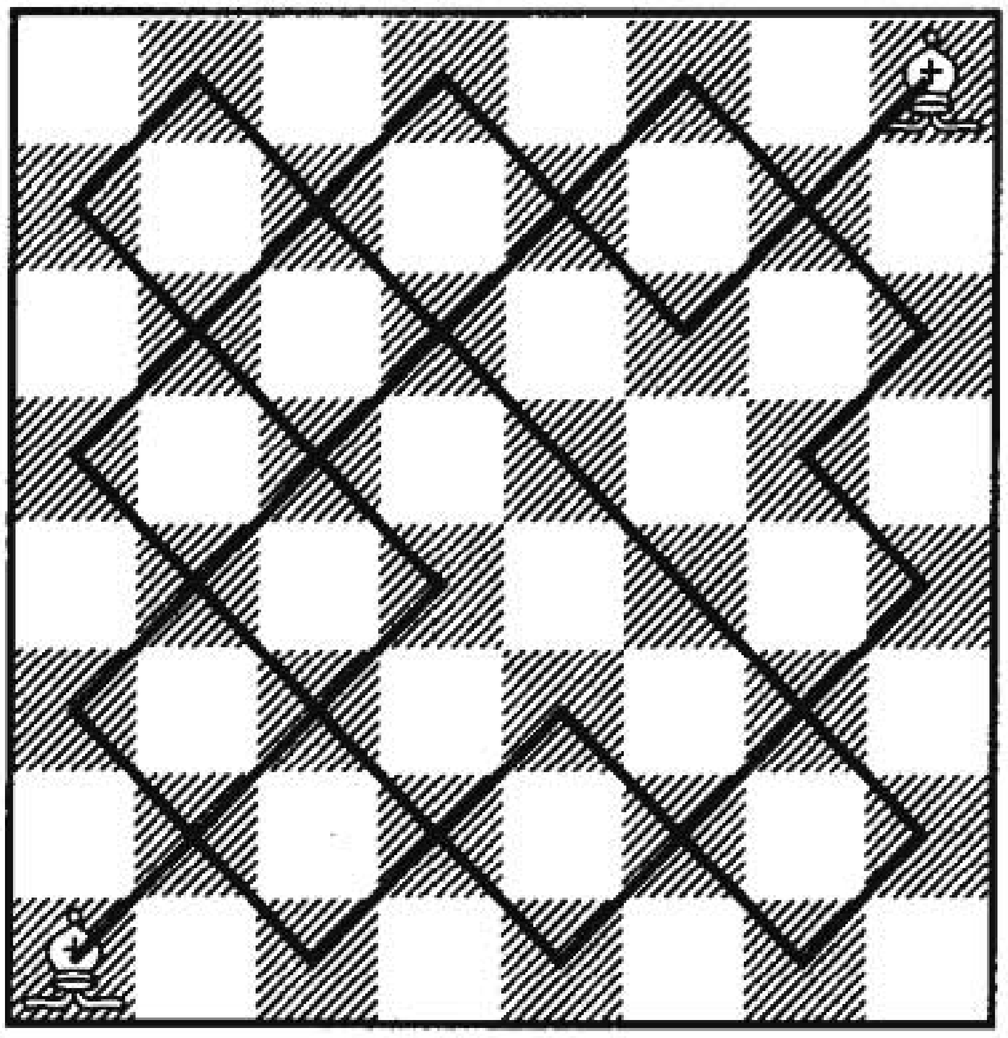


Figura 19.

El propio Dudeney mejoró su solución inicial y halló otro recorrido de 76 unidades de longitud y que pasa por 61 cruces. Pero, en *Carnaval matemático*, Martin Gardner consigna una solución mejor, enviada por uno de sus lectores, que pasa por 63 cruces y también cubre 76 unidades de longitud (figura 20).

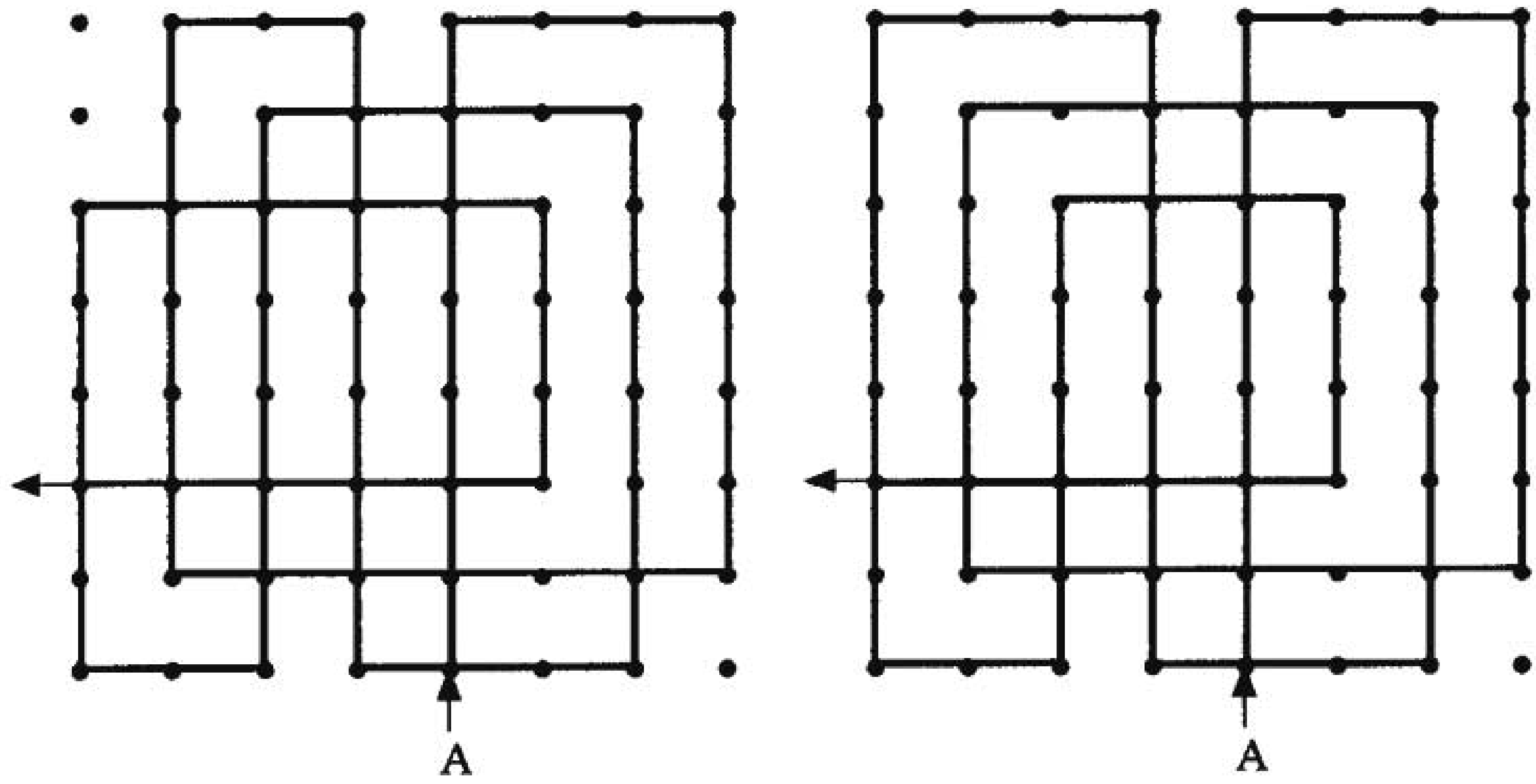


Figura 20.

3

El salto del caballo

El caballo es, en cierto modo, una pieza aparte, extraña, por no decir "monstruosa". Todas las demás se deslizan suavemente por el tablero, van de unas casillas a otras siguiendo ordenadas trayectorias rectilíneas que se adaptan estrictamente a las filas, columnas y diagonales; y si encuentran otra pieza en su camino, respetan la ley de la impenetrabilidad de los cuerpos y se detienen (o, a lo sumo, si es contraria, la eliminan para ocupar su puesto).

El caballo no sigue estas razonables reglas: su casilla de partida y la de llegada no están alineadas ni horizontal ni vertical ni diagonalmente, y puede ir de la una a la otra por más piezas propias o ajenas que haya en su camino, pues no se desliza armoniosamente sobre el tablero, sino que "salta" de un lugar a otro (aunque igualmente podríamos decir que viaja a través del hiperespacio).

Su extravagante comportamiento ha hecho del caballo la pieza favorita de los matemáticos y los inventores de pasatiempos, lo que justifica plenamente dedicarle un capítulo aparte.

Recorridos posibles e imposibles

Siguiendo con el tema de los recorridos, iniciado en el capítulo anterior, cabe plantearse preguntas tales como por cuántos caminos distintos puede ir un caballo de una esquina del tablero a la opuesta en el mínimo número de movimientos, problema análogo al de los distintos caminos por los que el rey puede ir de su casilla a la del rey contrario (y que, naturalmente, se resuelve de forma similar: el lector tiene diez minutos para hallar la respuesta).

Pero el problema más famoso en relación con el caballo es, sin duda, el de su poligrafía o recorrido completo del tablero sin pasar dos veces por la misma casilla. Según la *Enciclopedia* de Diderot y D'Alembert, el problema y algunas de sus soluciones ya se conocían desde muy antiguo en la India. Y en el siglo XVIII se ocuparon del tema matemáticos tan ilustres como Euler y De Moivre.

En la figura 21 vemos, incompleta, una poligrafía hallada por De Moivre en 1722. ¿Puede el lector deducir la pauta seguida y completar el recorrido?

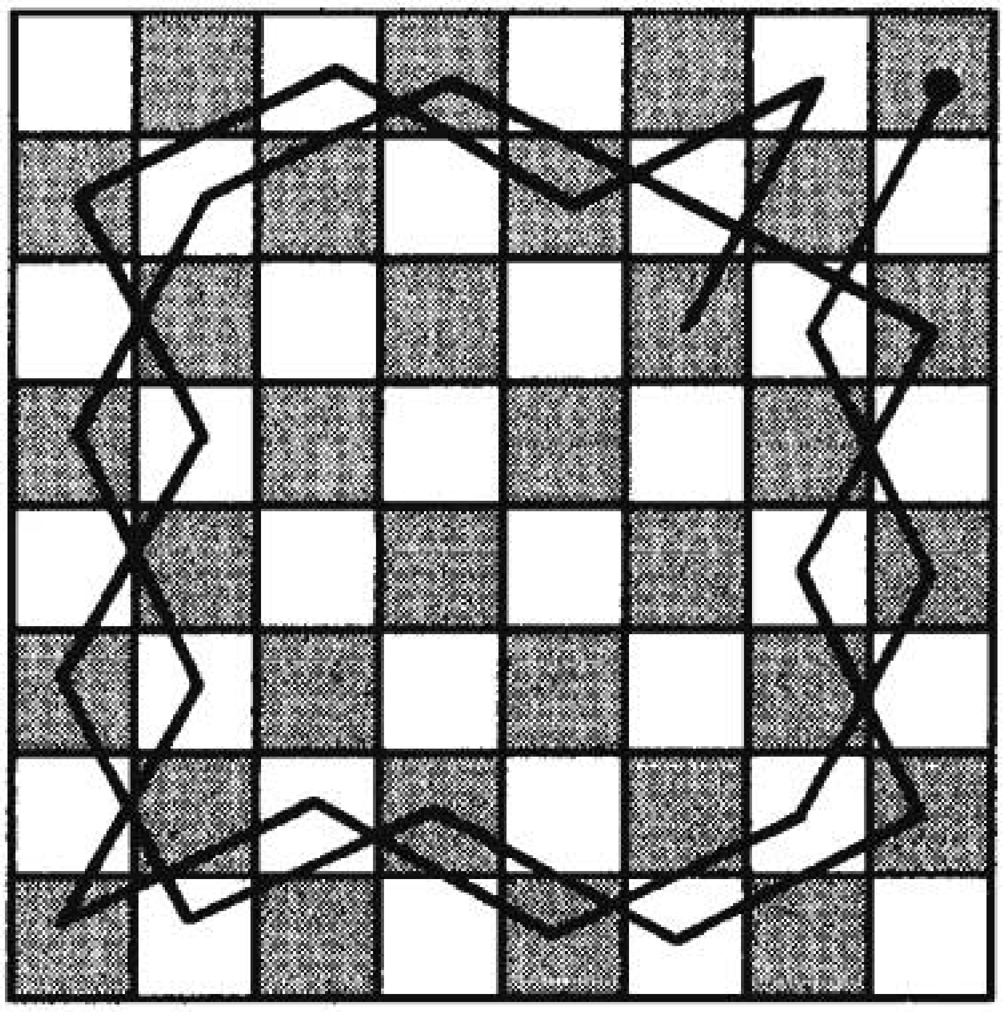


Figura 21.

La de De Moivre no es sino una de las muchísimas poligrafías del caballo posibles (se ha estimado que sólo las simétricas son más de cien millones). Naturalmente, y como ya hemos visto con las demás piezas, se puede aumentar la dificultad (y el interés) de los recorridos añadiendo otras condiciones (que la poligrafía sea cerrada, simétrica, sin cruces, etcétera).

Pero antes, y dada la complejidad de los zigzagueantes recorridos del caballo, conviene abordar la cuestión en terrenos más manejables que el tablero convencional. Consideremos, para empezar, el mínimo tablero cuadrado en el que el caballo puede moverse: el de 3×3. Es evidente que si lo colocamos en la casilla central queda bloqueado sin poder dar ni un salto, mientras que si lo ponemos en cualquiera de las otras las recorre todas (menos la del centro, claro) sin dificultad, dibujando (si cerramos el circuito, cosa que en la figura 22 no se ha hecho) una estrella de ocho puntas.

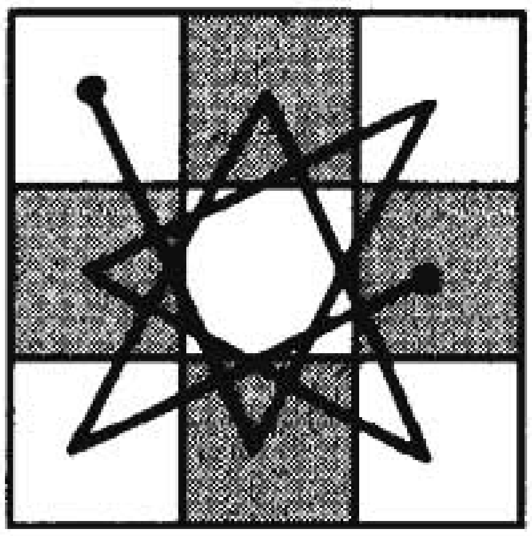


Figura 22.

En el tablero de 4×4 no es posible efectuar un recorrido completo sin pasar dos veces por ninguna casilla (¿Podría el lector encontrar un camino que recorriera 15 de las casillas?)

En los tableros de 5×5, 6×6 y 7×7 son posibles los recorridos completos. El lector puede entretenerse buscando algunos o reservar sus energías para el tablero de 8×8; pero, en cualquier caso, antes de seguir debería plantearse esta cuestión: ¿es posible, en los tableros de 5×5 y 7×7, encontrar poligrafías cerradas? (Recordemos que una poligrafía cerrada es aquella en la que la pieza, tras recorrer todas las casillas, con un movimiento más vuelve al punto de partida.)

Poligrafías cerradas y recorridos mágicos

Volviendo al tablero de 8×8, en él las poligrafías cerradas no sólo son posibles, sino numerosísimas. (¿Podría el lector encontrar alguna?)

En un extenso trabajo sobre el tema realizado en 1759, Euler halló varias soluciones muy interesantes, entre ellas una en la cual el caballo recorre primero la mitad inferior del tablero y luego la mitad superior, con una poligrafía cerrada y simétrica. (Invito al lector a buscarla. Téngase en cuenta que, en este caso, lo que parece una dificultad añadida es en realidad una pista, pues es más fácil hallar un recorrido que cubra medio tablero y sabemos que es posible.)

Sin embargo, ni Euler ni sus continuadores consiguieron encontrar un recorrido del caballo que, al ir numerando las casillas por el orden en que las visita, genere un cuadrado mágico. Tampoco se ha demostrado que ello sea imposible, por lo que la cuestión sigue abierta.

A lo más que se ha llegado, en este sentido, es a construir cuadrados "semimágicos", como el de la figura 23, hallado por William Beverly en 1848. En él todas las filas y todas las columnas suman 260, pero no las diagonales principales.

1	30	47	52	5	28	43	54
48	51	2	29	44	53	6	27
31	46	49	4	25	8	55	42
50	3	32	45	56	41	26	7
33	62	15	20	9	24	39	58
16	19	34	61	40	57	10	23
63	14	17	36	21	12	59	38
18	35	64	13	60	37	22	11

Figura 23.

Se ha demostrado que para que sea posible un "recorrido mágico" del caballo el lado del tablero ha de ser múltiplo de 4, pero sólo se han encontrado recorridos de este tipo para tableros de 16 o más casillas de lado.

Recorridos sin cruces

Las poligrafías de caballo sin cruces son imposibles, pero cabe preguntarse cuáles serán los recorridos sin cruces de longitud máxima en tableros de distintos tamaños.

En un trabajo publicado en el *Journal of Recreational Mathematics*, L. D. Yarbrough plantea la cuestión y da una serie de soluciones para tableros de 3 a 8 casillas de lado, como las que vemos en la figura 24.

Sin embargo, como señala Martin Gardner en *Circo matemático*, Yarbrough se quedó corto en una de las soluciones, pues en el tablero de 6 × 6 es posible un recorrido de longitud 17. ¿Podría hallarlo el lector?

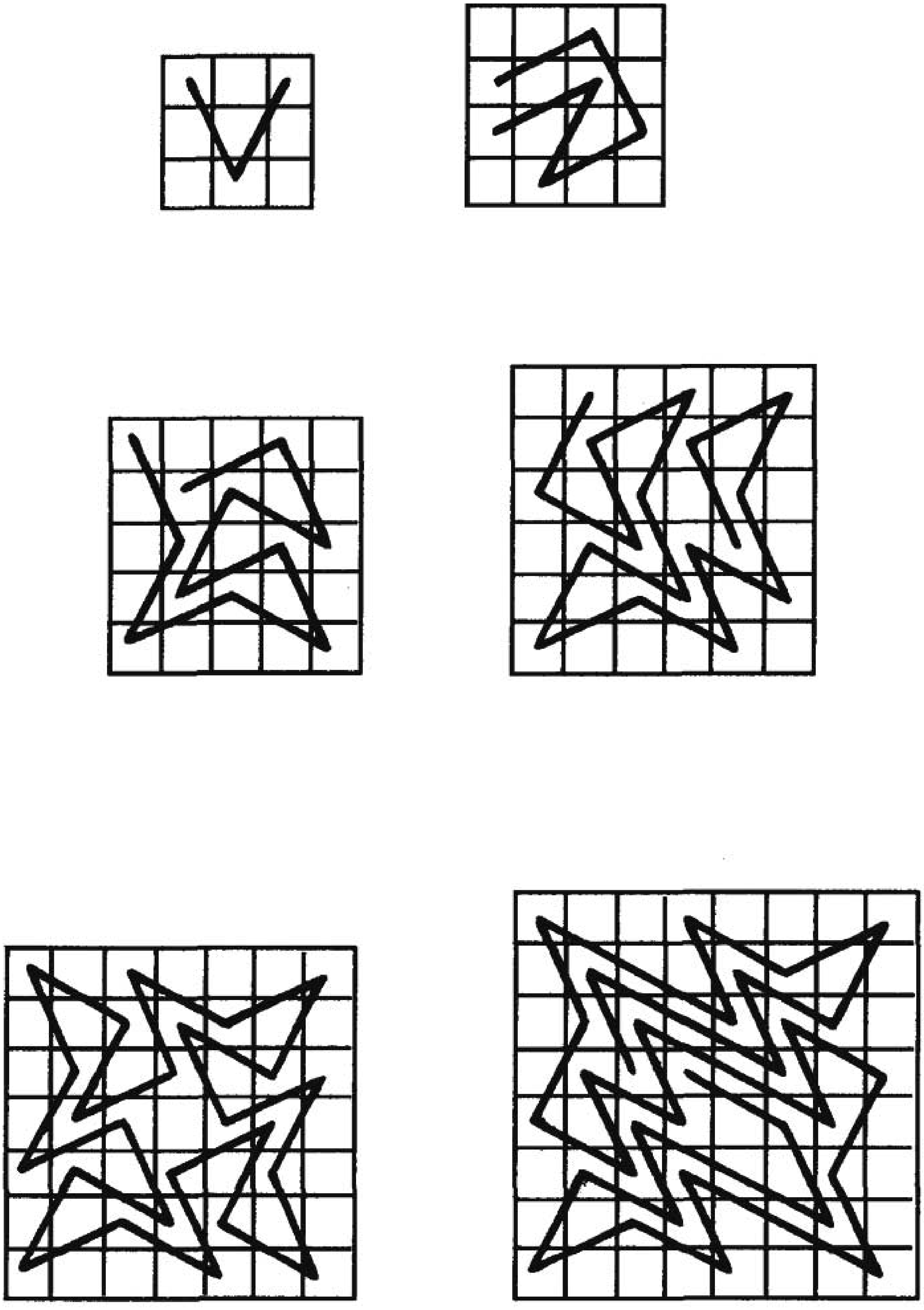


Figura 24.

Soluciones

Recorridos posibles e imposibles

Numerando cada posible hito del recorrido según el número de caminos distintos por los que se puede llegar a él, obtenemos el esquema de la figura 25. El caballo puede ir, pues, de una esquina del tablero a la opuesta por 108 caminos distintos.

			9		4		108
	2		1	9	54		
		4	14	3		54	4
1	3	1	2	18	3	9	
	1	4	2	2	14	1	9
1	1		4	1	4		
		1	1	3		2	
0		1		1			

Figura 25.

La estrategia de De Moivre consiste en moverse alrededor del tablero siempre en el mismo sentido y manteniéndose lo más cerca posible del borde. De este modo queda un núcleo central de 4×4 que es fácil resolver por tanteo. En la figura 26 vemos el recorrido completo.

34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

Figura 26.

En la figura 27 vemos un recorrido de 15 casillas en el tablero de 4×4.

6	9	2	15
1	12	5	8
10	7	14	3
13	4	11	

Figura 27.

En los tableros de 5×5, 7×7 y, en general, en todos los que tengan un número impar de casillas por lado, es imposible que el caballo efectúe un recorrido cíclico, ya que en cada salto llega a una casilla de distinto color, por lo que, para poder cerrar el recorrido, tiene que terminarlo en una casilla de distinto color que la de partida (para poder volver a ella con un salto más). Por lo tanto, el tablero ha de tener el mismo número de casillas de cada color. Pero los tableros de orden impar tienen un número impar de casillas, por lo que siempre hay una más de un color que del otro, lo que hace imposible el recorrido cerrado.

En la figura 28 vemos sendos recorridos completos en tableros de 5×5, 6×6 y 7×7 (obsérvese que el de 6×6 es cerrado, pues se puede pasar de la casilla 36 a la 1 con un salto de caballo).

1	14	9	20	3
24	19	2	15	10
13	8	25	4	21
18	23	6	11	16
7	12	17	22	5

Figura 28.

1	32	9	22	7	30
10	23	36	31	16	21
33	2	17	8	29	6
24	11	26	35	20	15
3	34	13	18	5	28
12	25	4	27	14	19

11	22	33	44	13	24	3
32	43	12	23	2	45	14
21	10	39	34	37	4	25
42	31	36	1	40	15	46
9	20	41	38	35	26	5
30	49	18	7	28	47	16
19	8	29	48	17	6	27

Poligrafías cerradas y recorridos mágicos

En la figura 29 vemos dos ejemplos de poligrafías del caballo cerradas y simétricas.

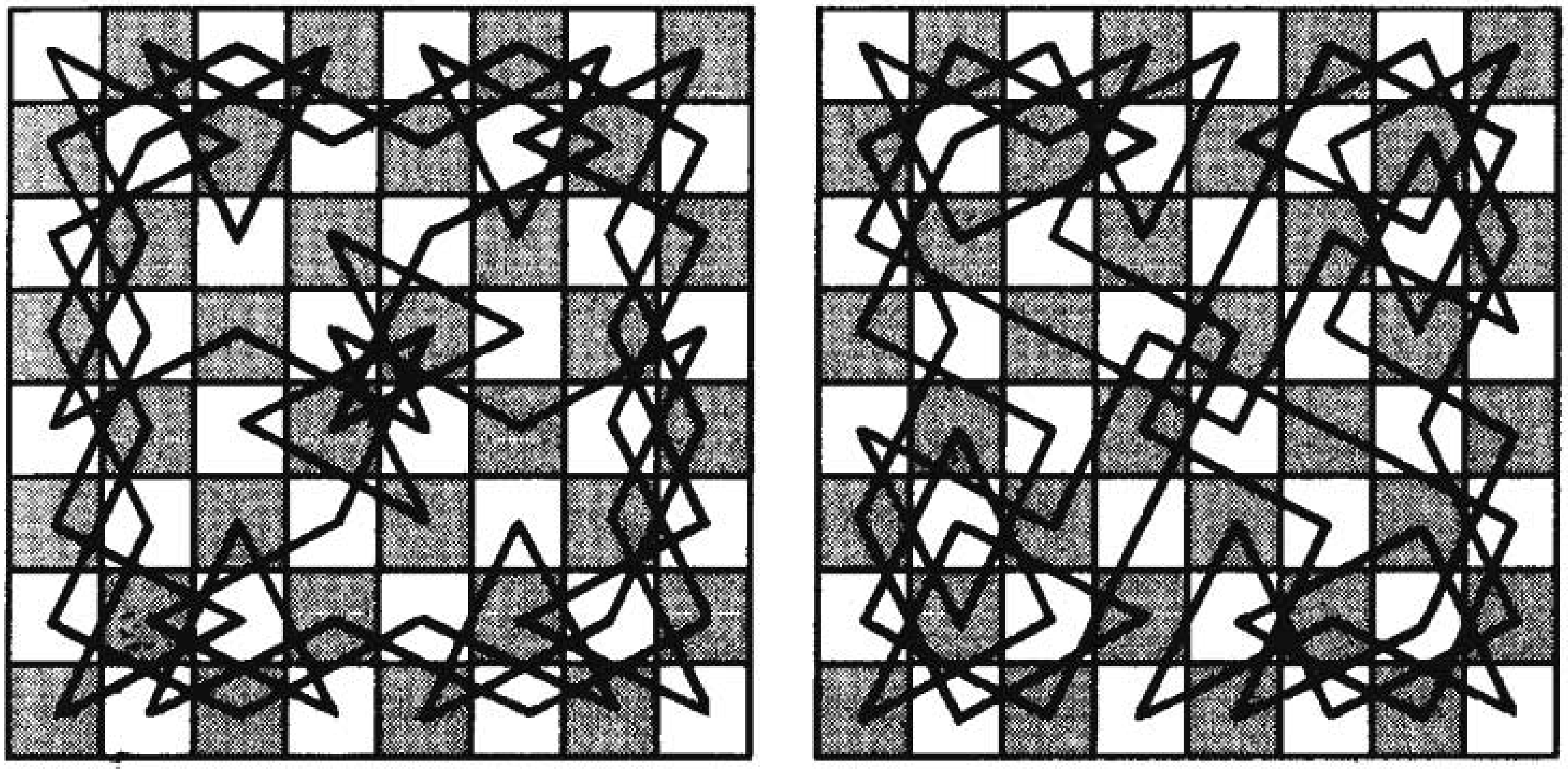


Figura 29.

En la figura 30 vemos el recorrido de Euler. Al ser la casilla 33 simétrica de la 1 respecto del centro, el semitablero superior se puede recorrer con una trayectoria simétrica a la del semitablero inferior.

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	29	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

Figura 30.

Recorridos sin cruces

En la figura 31 vemos el máximo recorrido sin cruces en el tablero de 6 × 6. (Prescindiendo de giros y simetrías, la solución es única.)

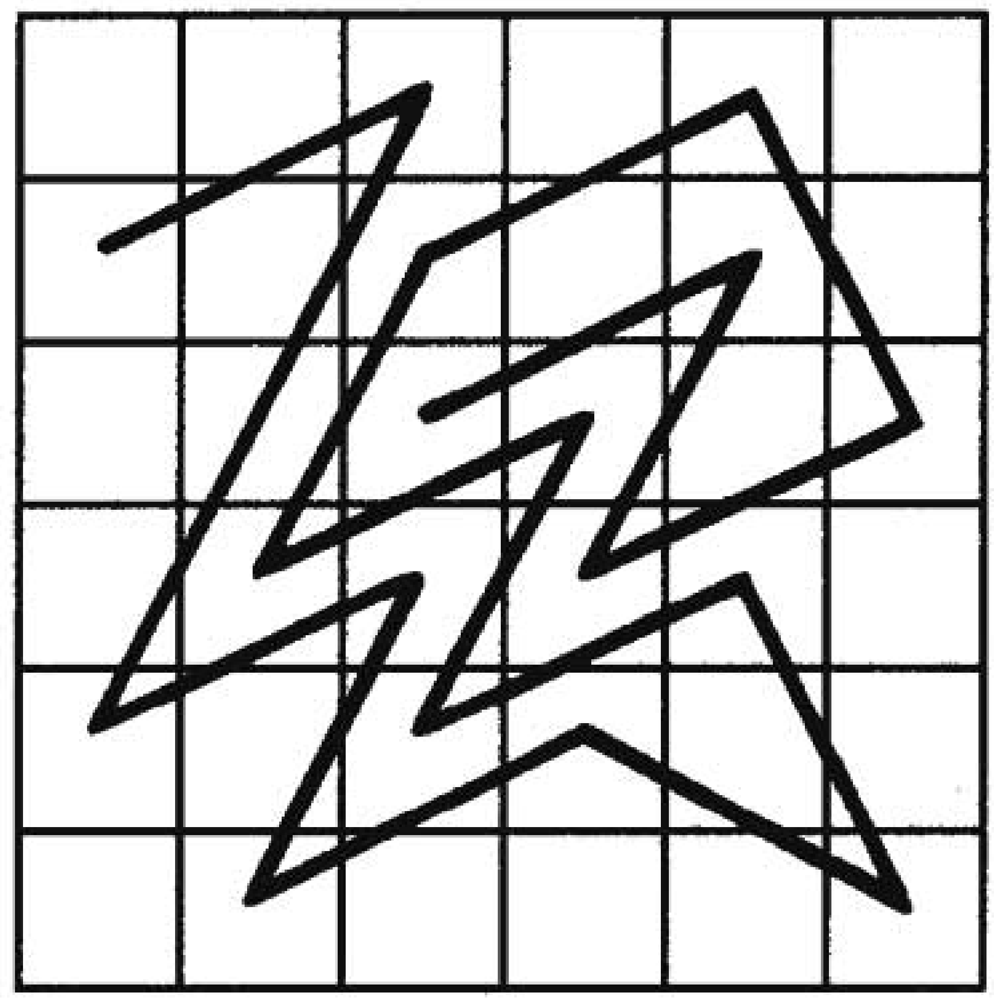


Figura 31.

4

El problema de las ocho damas

Si hay un problema ajedrecístico tan famoso y profusamente analizado como el de los recorridos del caballo, es sin duda el de las ocho damas.

El primero en plantearlo fue el experto alemán Max Bezzel, que, con el seudónimo Schachfreund, lo publicó en 1848 en la revista especializada *Berliner Schachzeitung*, y consiste en colocar ocho damas sobre el tablero de forma que ninguna de ellas amenace a ninguna otra. Puesto que la dama se desplaza horizontal, vertical o diagonalmente, el problema equivale a situar ocho fichas en el tablero de forma que no haya dos en la misma fila, columna o diagonal.

El problema fue analizado, entre otros, por el mismísimo Gauss, el príncipe de los matemáticos, que halló 76 de las 92 soluciones posibles; pero el primero en encontrarlas todas, en 1850, fue un amigo suyo, el matemático ciego Franz Nauck.

Antes de abordar el problema, le sugiero al lector que pruebe con tableros de orden menor: intente colocar 4 (5, 6) damas en un tablero de 4×4 (5×5, 6×6) de forma que no se amenacen entre sí.

En realidad, sólo hay 12 soluciones básicas del problema de las ocho damas, y las 80 restantes se obtienen por giros y simetrías; 11 de las soluciones básicas valen por 8 (girando cualquiera de ellas 90°, 180° y 270° se obtienen tres más, y las cuatro dan lugar a otras cuatro por simetría especular), pero la duodécima (fig. 32) sólo vale por 4, pues tiene simetría central (al girarla 180° se queda igual, y los giros de 90° y 270° también dan la misma configuración). Las 12 soluciones básicas dan, pues, lugar a $11 \times 8 + 4 = 92$ soluciones distintas.

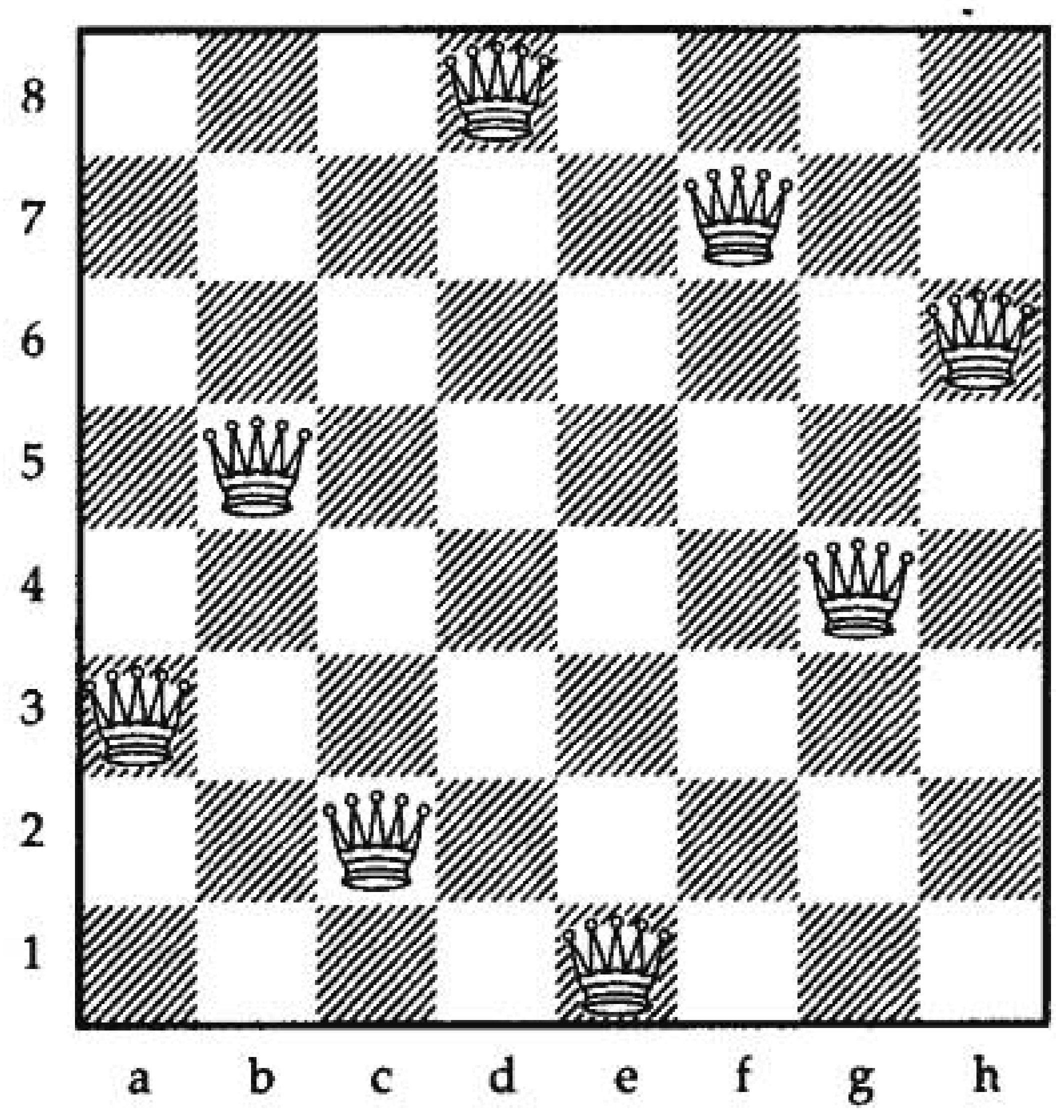


Figura 32.

Sería erróneo pensar que acabamos de hallar una fórmula para determinar el número de soluciones; no hemos hecho más que expresar aritméticamente un resultado hallado por tanteo. Aunque se ha encontrado el número de soluciones posibles para los tableros de órdenes 4 a 15, no se conoce un algoritmo que exprese dicho número en función del orden del tablero.

Tamaño tablero	*Número soluciones*
4×4	2
5×5	10
6×6	4
7×7	40
8×8	92
9×9	352
10×10	724
11×11	2.680
12×12	14.200
13×13	73.712
14×14	365.596
15×15	2.279.184

Tras estos preliminares, tal vez el lector se atreva a buscar alguna de las 11 soluciones básicas restantes. Una pista: en la solución de la figura 32 vemos que una de las damas ocupa precisamente la casilla de dama (d8); pues bien, en *todas* las soluciones hay una dama en esa posición (o bien, huelga decirlo, en una de las siete casillas equivalentes).

Puesto que, evidentemente, sólo puede haber una dama por columna, podemos expresar numéricamente las soluciones anotando, de izquierda a derecha, los números de las filas que ocupan. Así, la solución de la figura 32 sería 35281746. El problema de las ocho damas se puede convertir, de este modo, en un problema aritmético, que consiste en tomar, de entre todas las permutaciones de los dígitos del 1 al 8, las que cumplen cierta condición. (¿Podría el lector deducir qué condición es ésa?)

Sin embargo, esta conversión numérica no es de gran ayuda (excepto para realizar un programa de búsqueda por ordenador), pues las permutaciones de los ocho dígitos son $8! = 40.320$ ($8!$, o "factorial de 8", significa $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$), entre las cuales hay que buscar las 92 que cumplen la condición requerida.

En la solución de la figura 32 vemos que tanto las tres damas de la parte superior del tablero como las de la parte inferior están en línea recta. Estas alineaciones se dan en todas las soluciones básicas menos en una. ¿Podría el lector, para terminar este apartado con un "más difícil todavía", hallar la solución en la que no hay ningún grupo de tres damas alineadas?

Coordinaciones de otras piezas

Evidentemente, el problema de las ocho damas se puede ampliar a cualquiera de las demás piezas.

¿Cuántas torres podemos colocar en el tablero de forma que no se amenacen entre sí? Puesto que no puede haber dos torres en una misma fila, está claro que, al igual que en el caso de las damas, el máximo número de torres que podemos disponer de forma que ninguna amenace a ninguna otra es 8. Una solución obvia consiste en alinear las torres a lo largo de una de las diagonales principales (fig. 33). Y, por supuesto, las 92 soluciones del problema de las ocho damas lo son también del de las ocho torres. Pero hay muchas —muchísimas— soluciones más. ¿Podría el lector calcular cuántas?

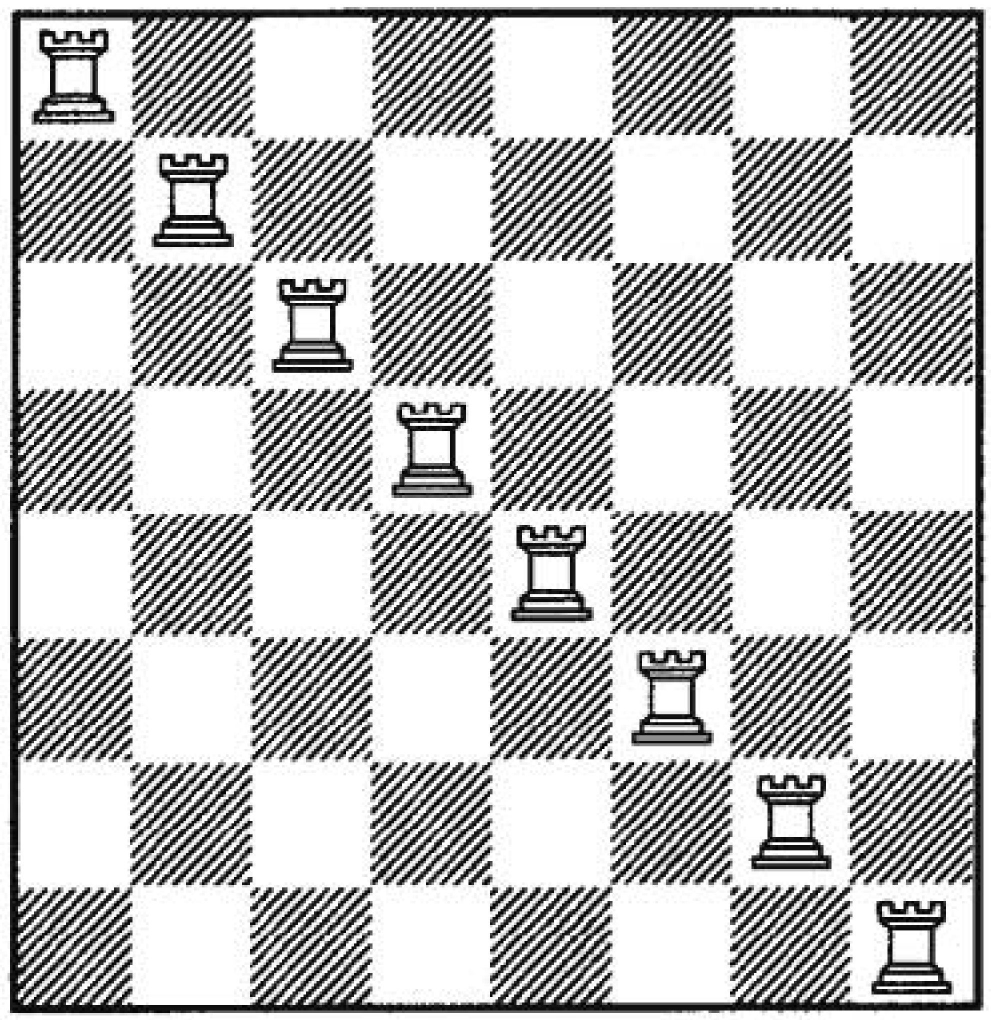


Figura 33.

En el caso de los alfiles, la solución no es tan obvia, pero tampoco es difícil determinar cuántos podemos colocar, como máximo, en el tablero sin que ninguno amenace a ningún otro. ¿Cuántos son?

Con los reyes, la solución es trivial, pues en su caso no atacarse mutuamente significa no estar en casillas contiguas (figura 34). Obsérvese que si el tablero fuera de 7×7 la solución sería la misma, pues tanto la primera fila como la última columna están libres. En ese caso, además, la solución sería única; pero en el tablero de 8×8 los 16 reyes pueden situarse de muchas otras maneras sin que haya dos contiguos. Mediante un ingenioso procedimiento (publicado en 1964 en la revista *Schwalbe*), Karl Fabel determinó que existen 281.571 soluciones distintas (la demostración se incluye en el ya mencionado libro *Ajedrez y matemáticas*, del que Fabel es coautor, que también contiene detallados análisis de otros problemas de coordinación de piezas).

Una vez más, los caballos constituyen un caso aparte; aunque, en esta ocasión, su atípico comportamiento simplifica el problema en lugar de complicarlo (sirva este comentario como pista). ¿Cuántos caballos podemos colocar, como máximo, en el tablero sin que ninguno amenace a ningún otro? ¿Cuántas soluciones diferentes existen?

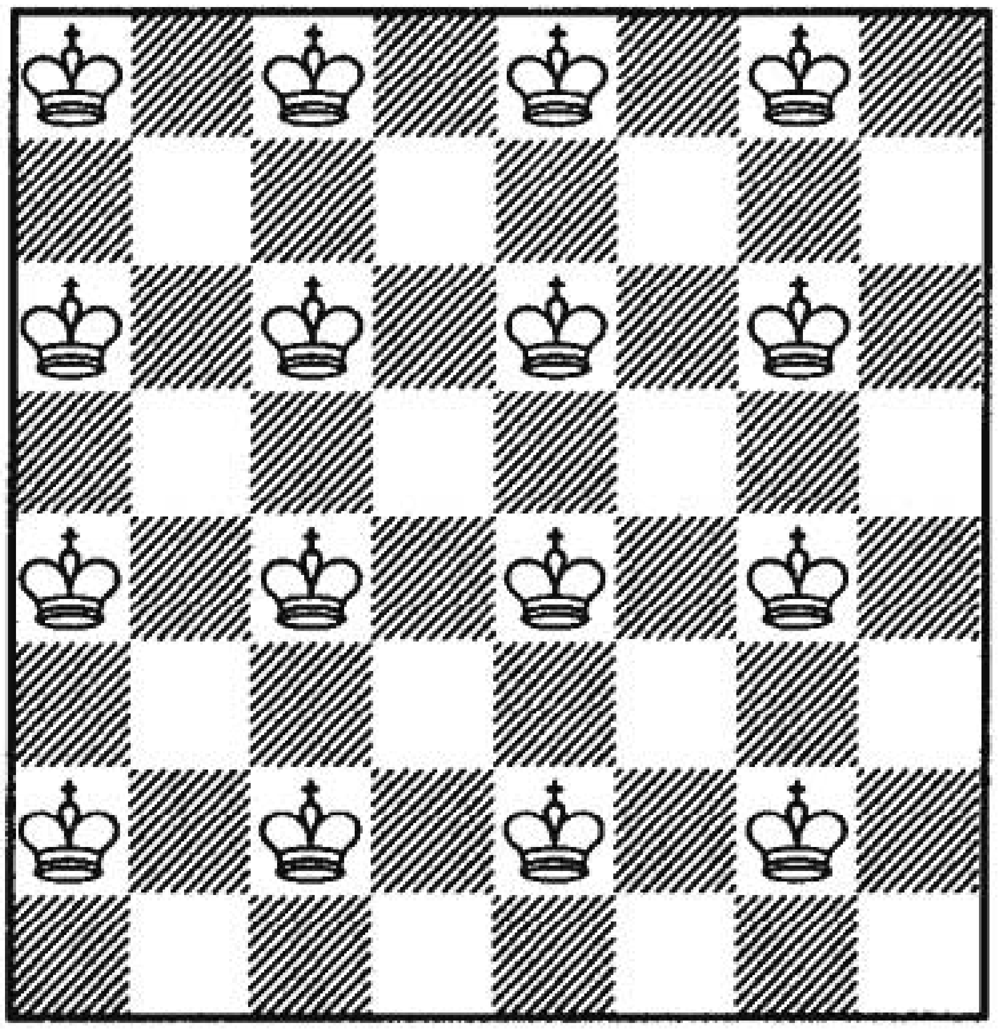


Figura 34.

Las 16 damas y otros problemas afines

Una conocida variante del problema de las ocho damas consiste en disponer 16 damas de forma que ninguna cubra a otra de la amenaza de una tercera (o, dicho de otro modo, que ninguna se interponga entre otras dos). Evidentemente, el problema equivale a colocar 16 fichas en el tablero de forma que no haya más de dos en ninguna fila, columna o diagonal. El problema de las 16 damas está relacionado, además, con el de las ocho damas porque algunas de las soluciones de aquél se obtienen superponiendo dos soluciones de éste. ¿Podría el lector hallar alguna de estas coordinaciones?

Otro problema afín al de las ocho damas es el siguiente: ¿Cuántas damas serán necesarias, como mínimo, para cubrir todo el tablero? (Por cubrir o abarcar el tablero se entiende que todas las casillas estén a tiro de alguna de las damas.)

Es interesante señalar que el mínimo número de damas que cubre el tablero de 8 × 8 puede abarcar también los de 9 × 9, 10 × 10 y 11 × 11, tan sobradas están de capacidad ofensiva. ¿Se atreve el lector, después de resolver el problema en el tablero normal, a buscar una solución en el de 11 × 11? (Una puntualización: en este caso, las casillas ocupadas por las damas se consideran cubiertas por el mero hecho de estar ocupadas; es decir, no es necesario que una casilla ocupada esté a tiro de otra dama.)

De nuevo, el problema puede ampliarse a las demás piezas, y de nuevo es trivial en el caso del rey (figura 35). Obsérvese que la misma disposición podría cubrir un tablero de 9×9.

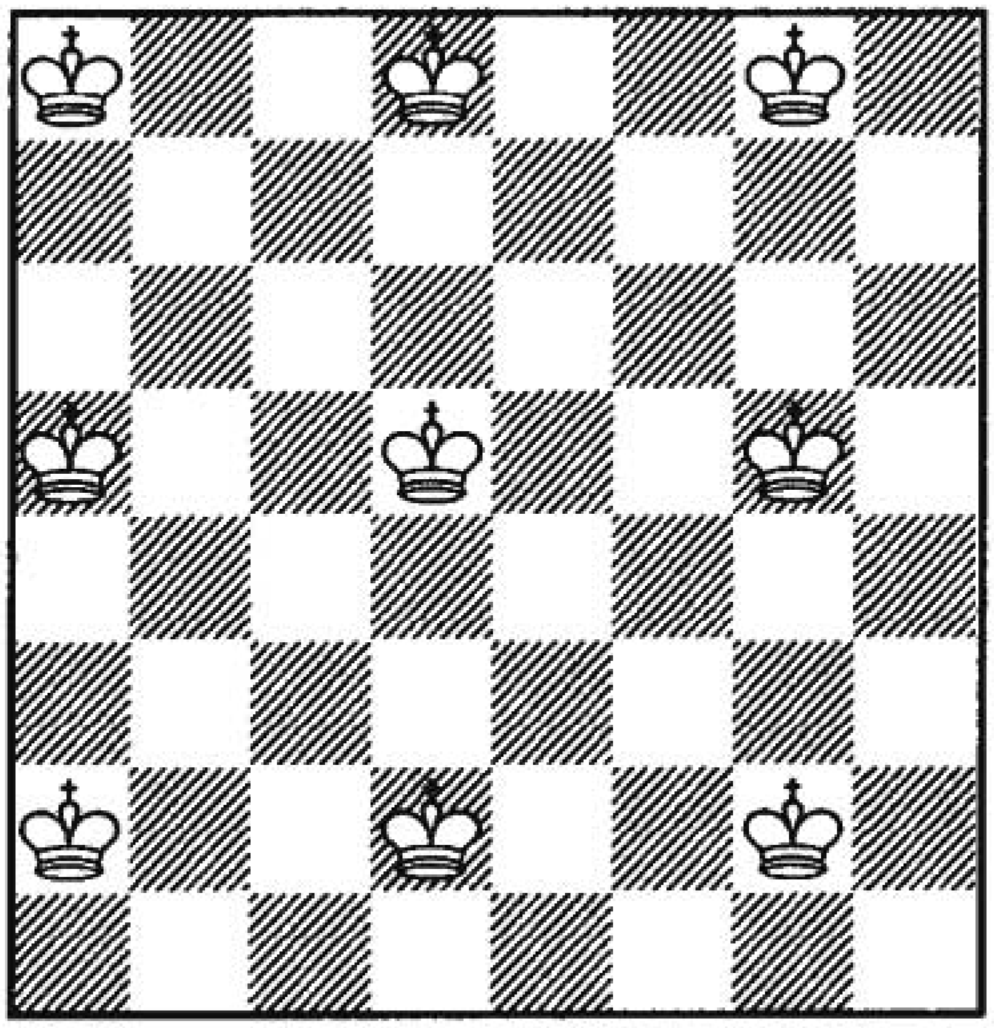


Figura 35.

Si queremos que también cada casilla ocupada por un rey esté a tiro de otro, entonces harán falta 12 reyes, en una disposición como la de la figura 36.

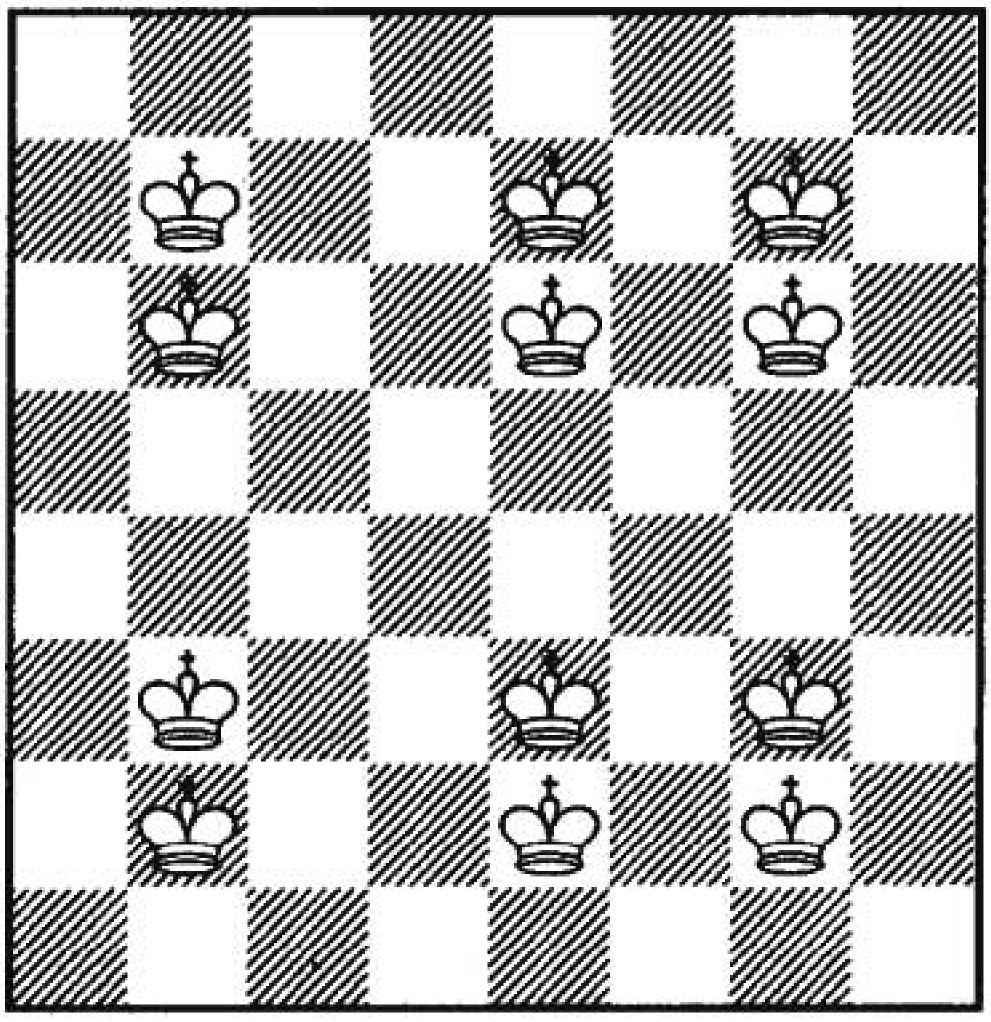


Figura 36.

El caso de la torre también es trivial. Basta poner 8 torres en una misma fila o columna para que todas las casillas (incluidas las ocupadas) estén a tiro, y también son posibles numerosas disposiciones alternadas como la de la figura 37. Y, evidentemente, las torres no pueden ser menos de 8, pues cada una sólo cubre una fila y una columna.

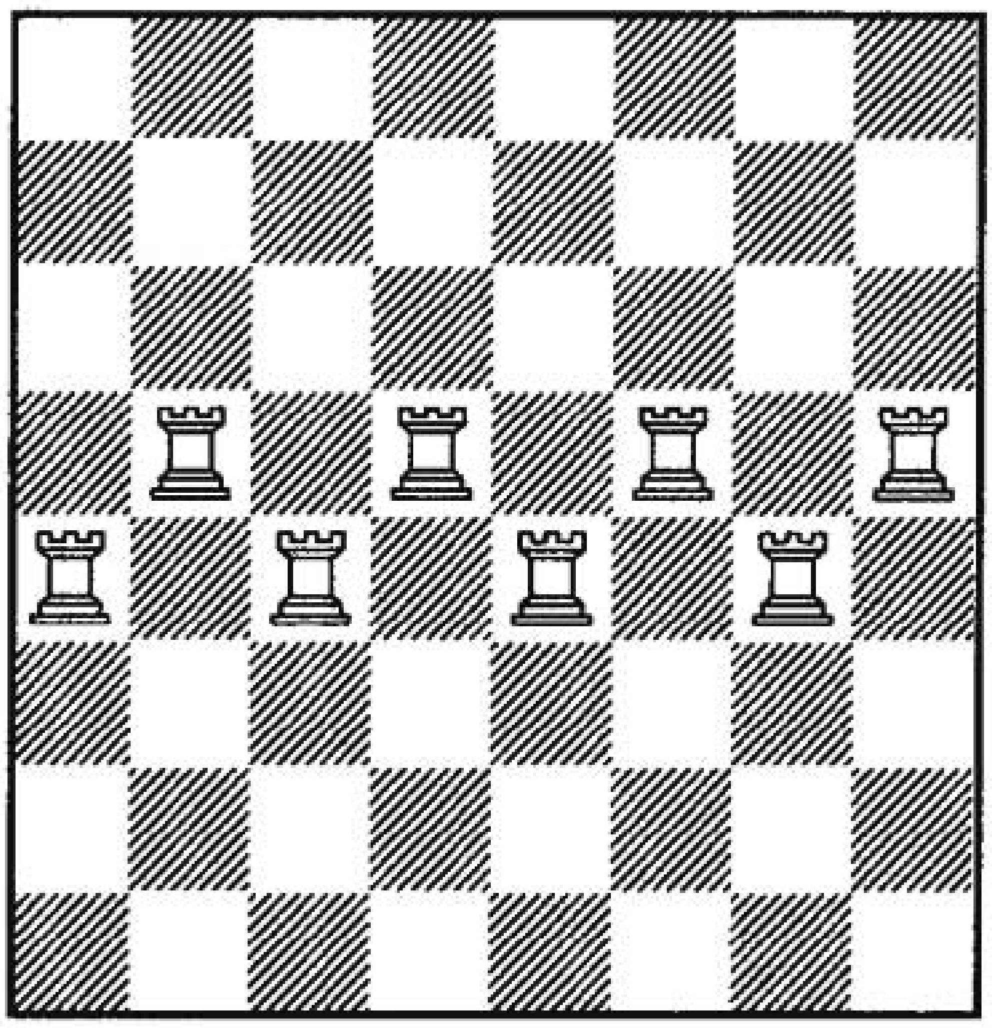


Figura 37.

Para cubrir todo el tablero son necesarios como mínimo 10 alfiles. ¿Puede el lector disponerlos de la forma adecuada?

En la figura 38 vemos una disposición de 14 caballos que cubren todo el tablero, incluso las casillas ocupadas. Si no se exige que las casillas ocupadas también estén a tiro de algún caballo, sólo son necesarios 12. La solución es única y elegantemente simétrica, como comprobará el lector en cuanto la descubra.

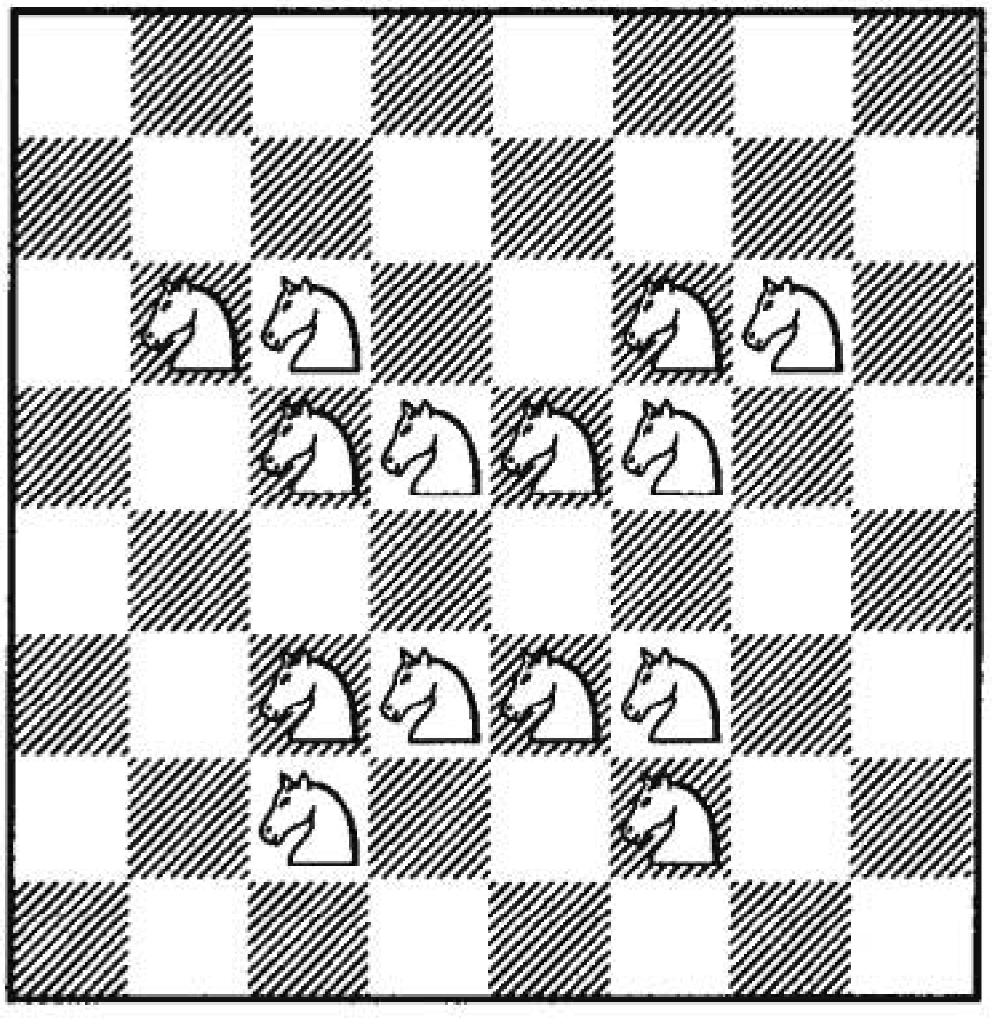


Figura 38.

Del problema de cobertura total del tablero con el mínimo número de piezas podemos pasar al inverso: ¿Cuántas damas se puede colocar como máximo en el tablero de forma que *no* cubran todas las casillas?

O, volviendo a las ocho damas, ¿cómo podemos disponerlas de forma que dejen sin cubrir el máximo número de casillas? (Una pista: dicho número máximo es 11.)

Como puede verse, el tema de "máximos y mínimos" derivado del viejo problema de las ocho damas es prácticamente inagotable. Invito al lector a buscar nuevas variantes de interés, pues si hay algo aún más gratificante que resolver un buen problema, es crearlo.

Soluciones

El problema de las ocho damas

Sólo hay una solución básica para los tableros de 4 × 4 y 6 × 6, y dos para el de 5 × 5 (figura 39). Obsérvese que tres de las soluciones tienen simetría central.

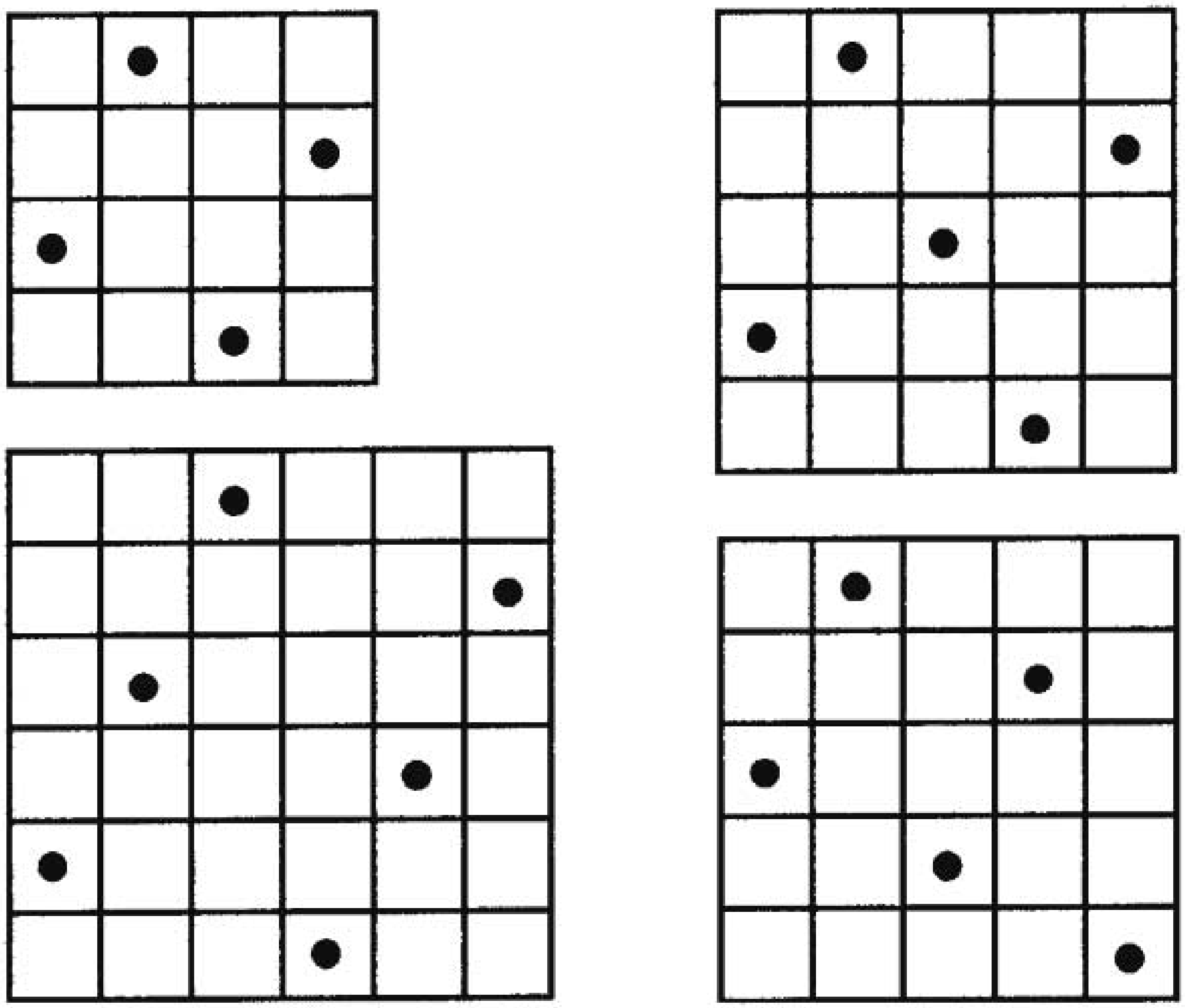


Figura 39.

En la figura 40 vemos las 12 soluciones básicas del problema de las ocho damas. La primera es la solución simétrica que ya hemos visto (figura 32) y la segunda es la única en la que no hay tres damas en línea recta.

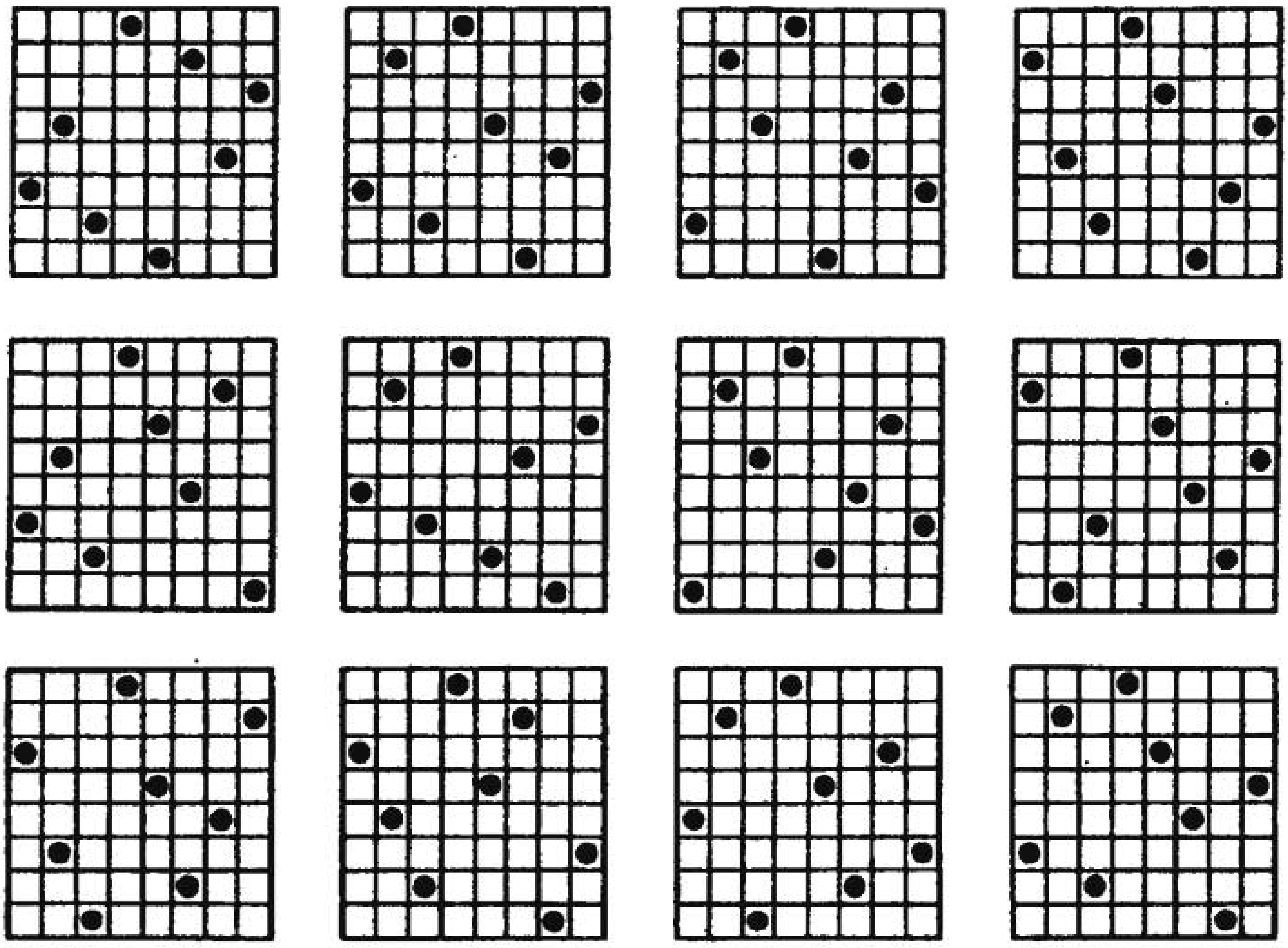


Figura 40.

La condición que ha de cumplir una permutación de ocho dígitos para ser solución del problema de las ocho damas según la notación establecida, es que la diferencia entre dos cualesquiera de los dígitos no sea igual a su "distancia", entendiendo por tal el número de lugares que están alejados uno de otro, pues de lo contrario corresponden a dos damas situadas en una misma diagonal. Por ejemplo, si en la solución 35281746 invertimos el orden de los dos primeros dígitos, en la nueva permutación (53281746) hay cuatro parejas de damas en diagonal: la 3 y la 2, pues 3 – 2 = 1 y los dígitos son contiguos (están a sólo un lugar de distancia); la 5 y la 8, pues 8 – 5 = 3 y el 8 está a tres lugares del 5, etcétera.

Coordinaciones de otras piezas

Para hallar todas las disposiciones de 8 torres que no se amenazan entre sí, empecemos colocando la primera torre en la primera columna: evidentemente, podemos ponerla en 8 casillas distintas. La segunda torre, en la segunda columna, podemos ponerla en 7 casillas distintas (en cualquier fila menos la ya ocupada por la primera torre), luego tendremos 7 posibilidades por cada una de las 8 posibles posiciones de la primera torre, o sea $8 \times 7 = 56$ disposiciones posibles. Por cada una de éstas, podemos colocar la tercera torre en 6 casillas distintas de la tercera columna (en todas las filas menos las ya ocupadas por las otras dos, luego habrá $8 \times 7 \times 6 = 336$ posibles disposiciones de las tres primeras torres. Siguiendo con el razonamiento, se ve que el número total de coordinaciones de las 8 torres es $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, o sea 8! (40.320), que, como ya hemos visto, es el número de permutaciones de los dígitos del 1 al 8.

Podemos colocar un máximo de 14 alfiles sin que se amenacen entre sí. La solución más sencilla es la que vemos en la figura 41 (la fila 8 sólo es alcanzable desde la 1 por las esquinas, por lo que podemos llenar de alfiles ambas filas menos dos esquinas, ambas de la misma fila, como en la figura, o de la misma columna). Hay un total de 256 soluciones, aunque sólo 36 son básicamente distintas.

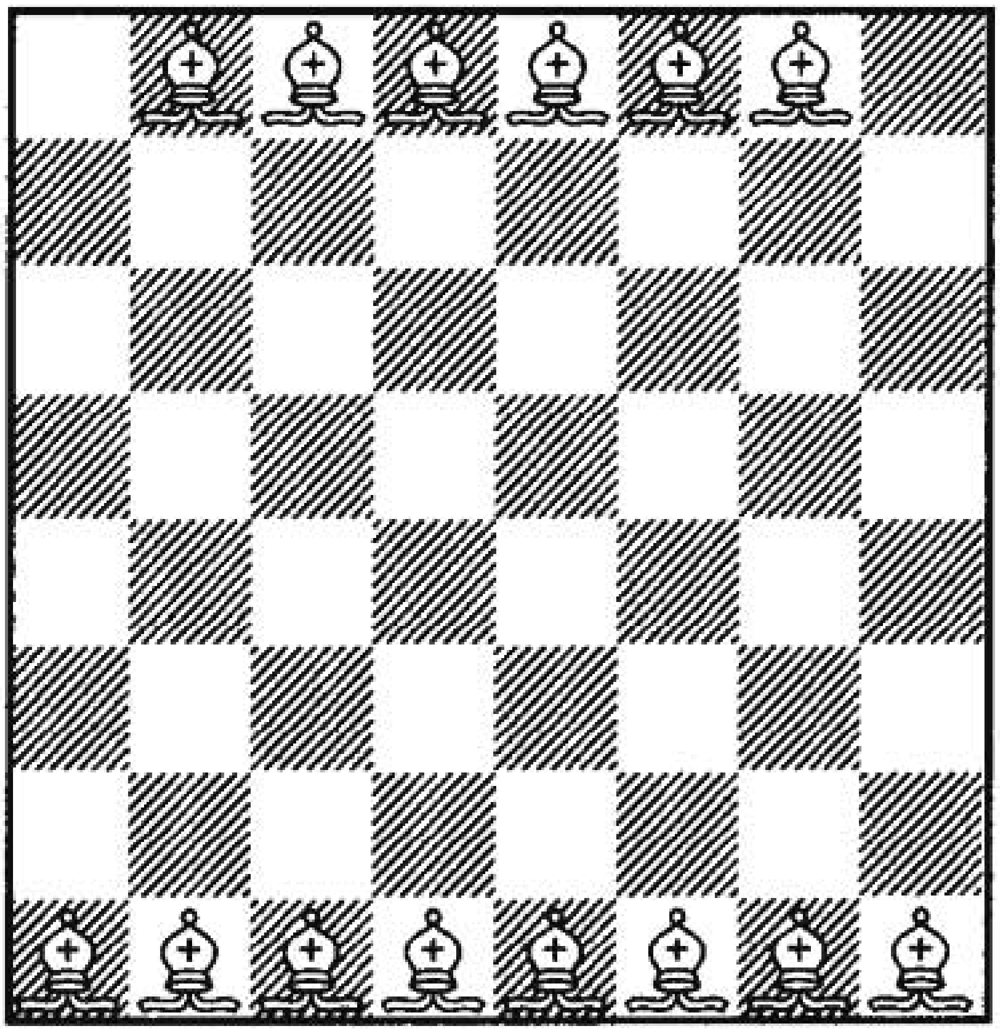


Figura 41.

Puesto que el caballo, al mover, va de una casilla blanca a una negra o viceversa, podemos llenar de caballos las 32 casillas de un color sin que se amenacen entre sí (figura 42). Evidentemente, hay dos soluciones, pues los 32 caballos pueden estar en las casillas blancas o en las negras (aunque ambas soluciones son básicamente la misma, ya que una es la imagen especular de la otra).

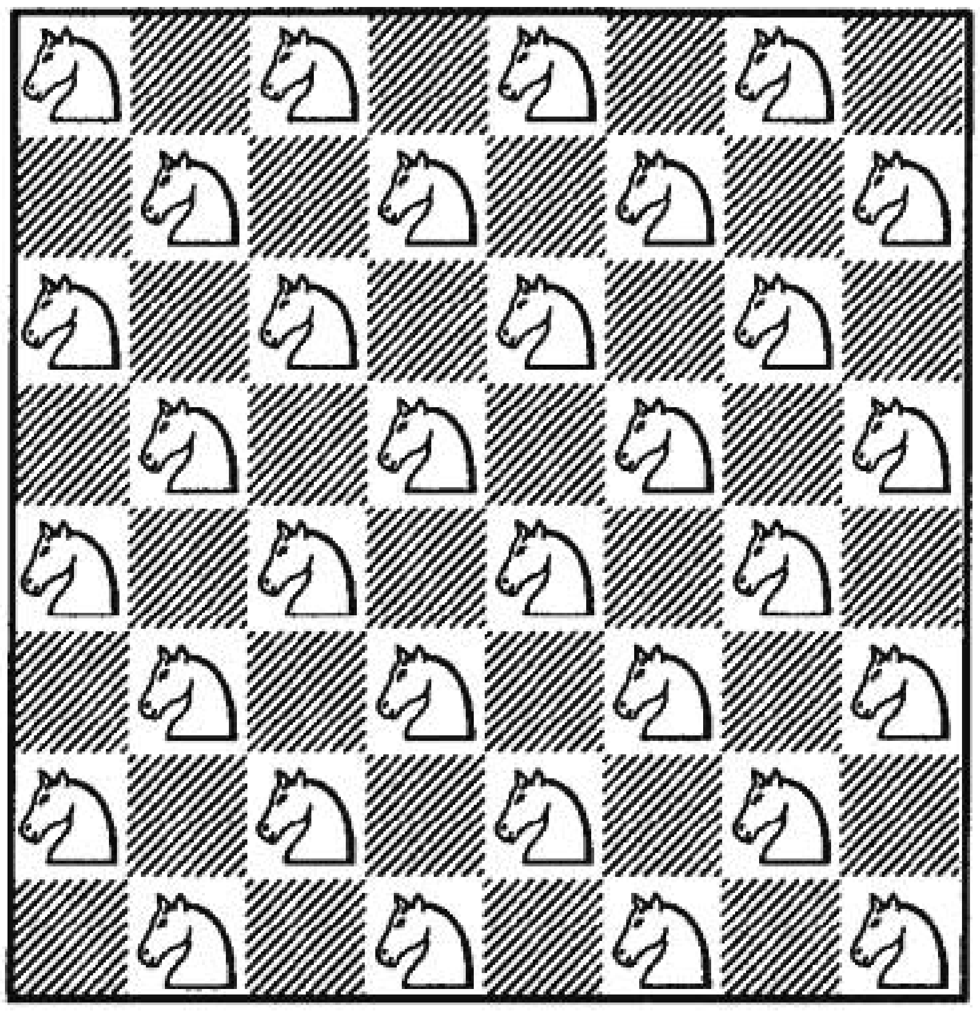


Figura 42.

Las 16 damas y otros problemas

En la figura 43 vemos una solución del problema de las 16 damas.

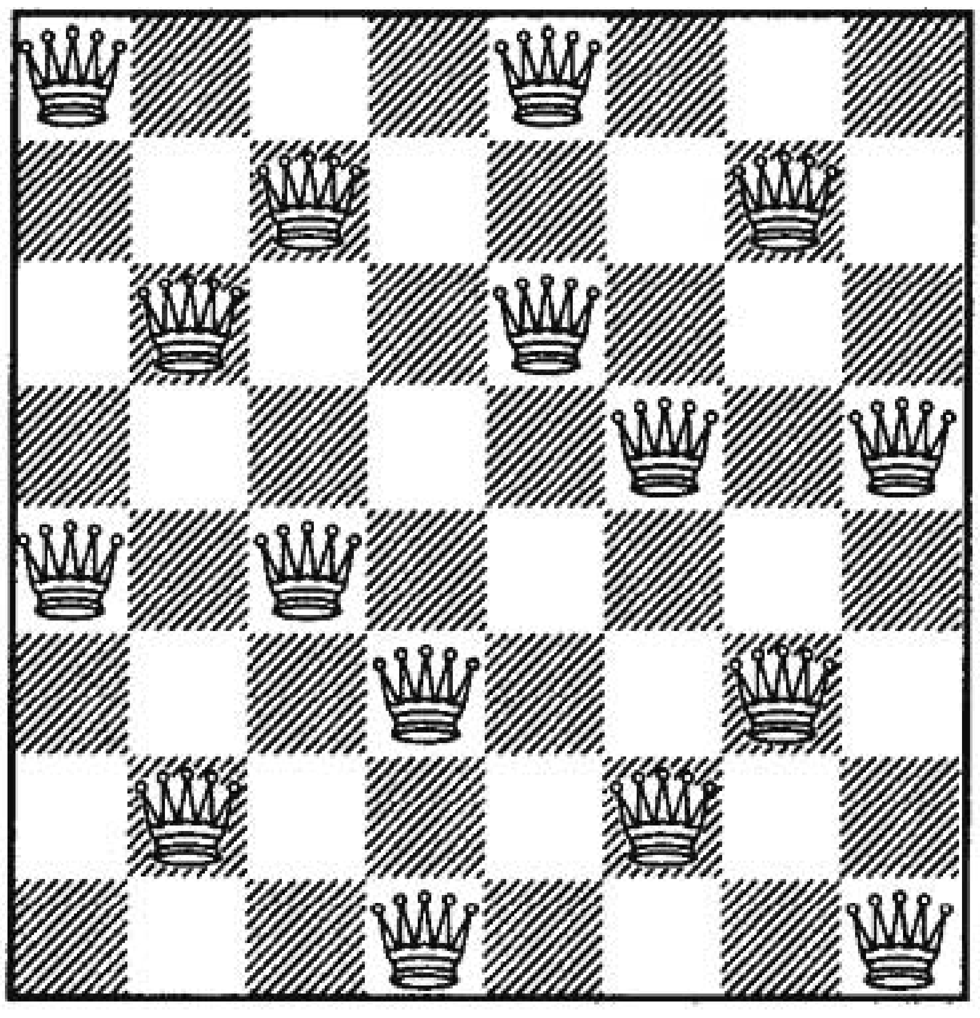


Figura 43.

Para abarcar todo el tablero son necesarias y suficientes (con holgura) 5 damas. En la figura 44 vemos una de las 4.860 soluciones posibles.

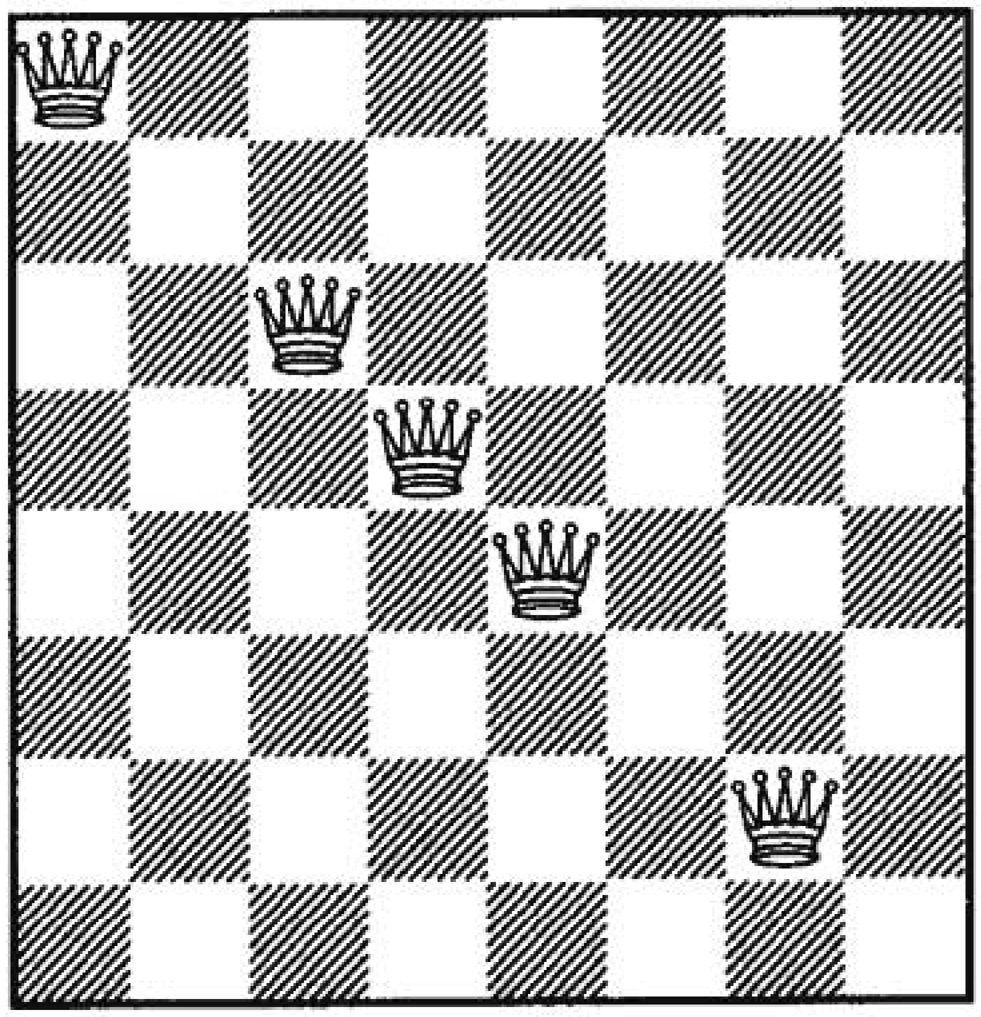


Figura 44.

Como puede verse en la figura 45, 5 damas son también suficientes para cubrir un tablero de hasta 11×11, aunque en este caso las casillas ocupadas no están a tiro de otras damas.

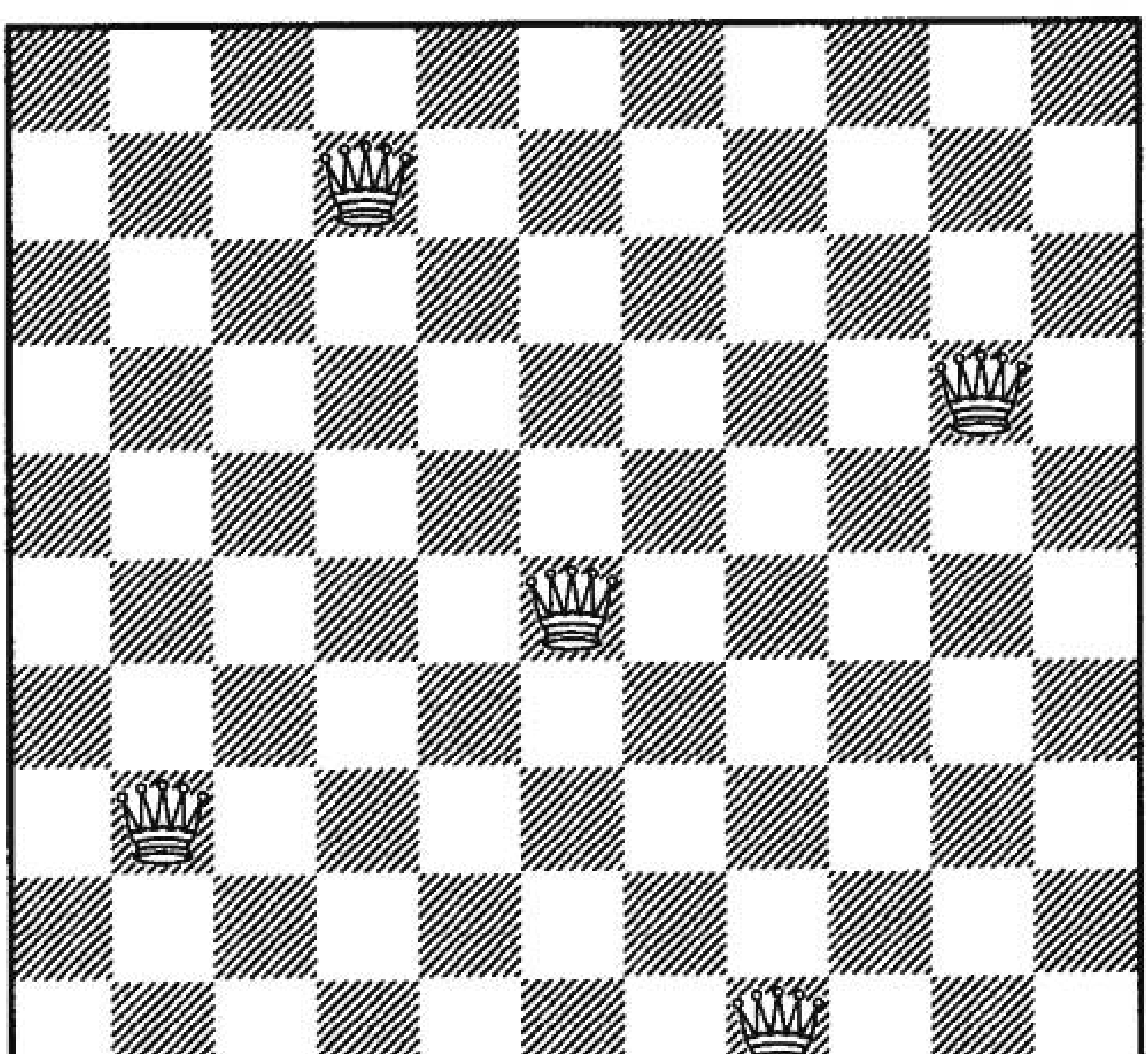


Figura 45.

En la figura 46 vemos una disposición de 10 alfiles que cubre todo el tablero, incluso las casillas ocupadas.

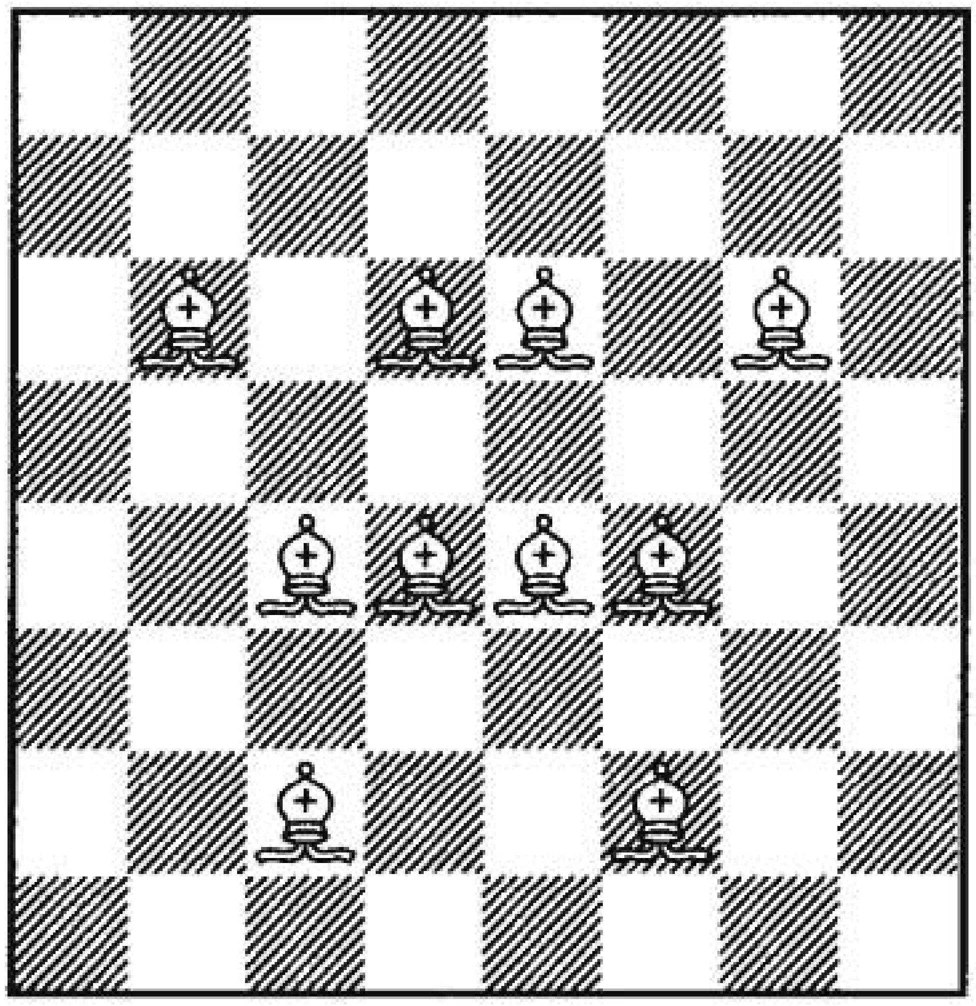


Figura 46.

En la figura 47 vemos la forma (básicamente única) en que 12 caballos pueden cubrir el tablero. Como la disposición tiene doble simetría central y no varía al sufrir giros de 90°, 180° y 270°, sólo hay dos soluciones, la de la figura y su imagen especular.

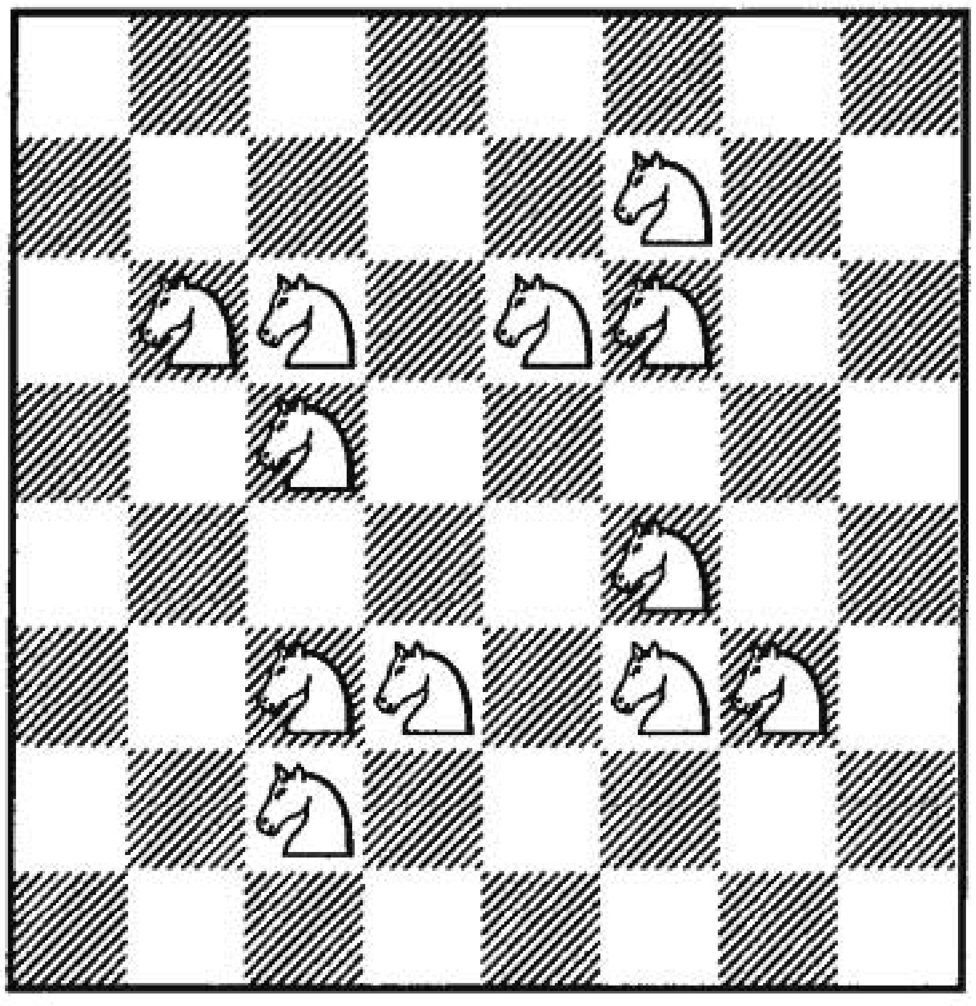


Figura 47.

Si no consideramos cubierta una casilla por el mero hecho de estar ocupada, sino que además tiene que estar amenazada, podemos colocar 43 damas en el tablero sin que lo cubran por completo, tal como se ve en la figura 48 (queda sin amenazar la esquina inferior izquierda). Si consideramos que una casilla está cubierta por el mero hecho de estar ocupada, hay que quitar la dama de la esquina y la solución queda reducida a 42.

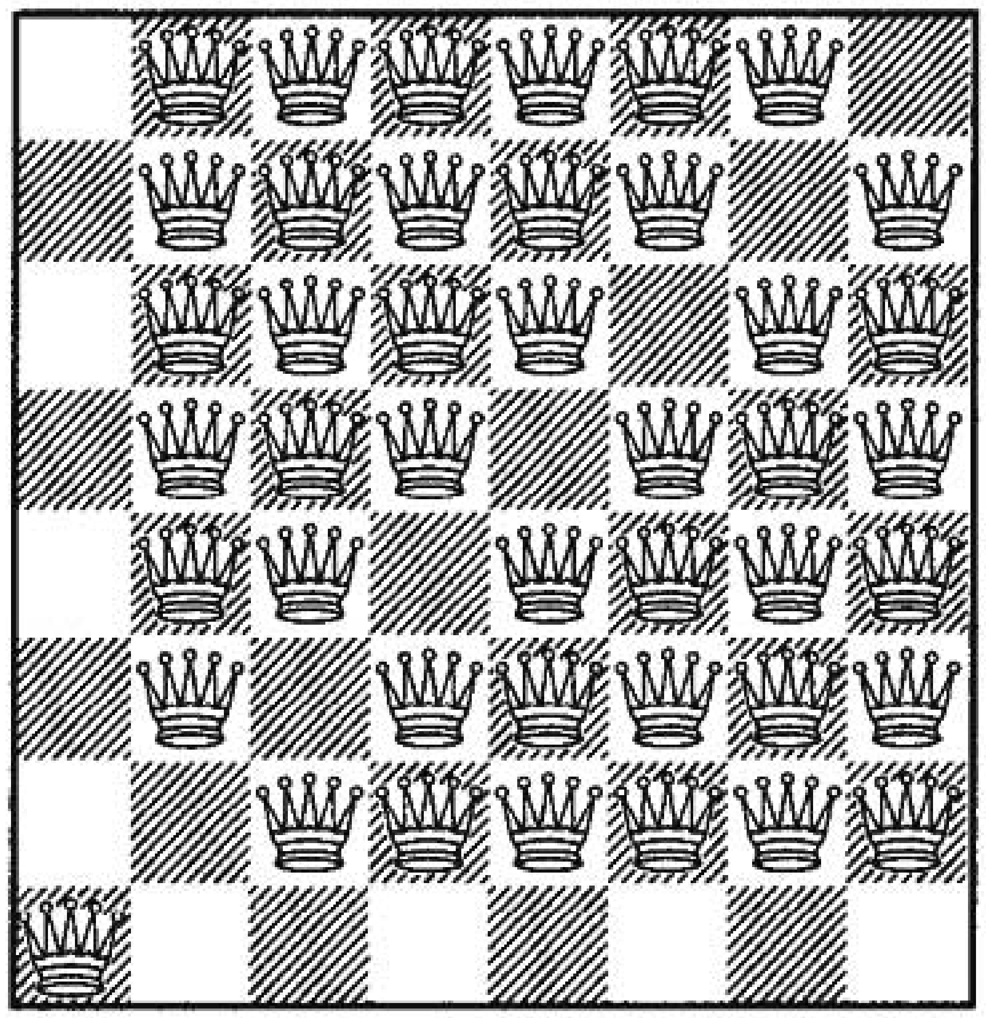


Figura 48.

En la figura 49 vemos una disposición de 8 damas que deja sin cubrir 11 casillas (todas ellas vacías).

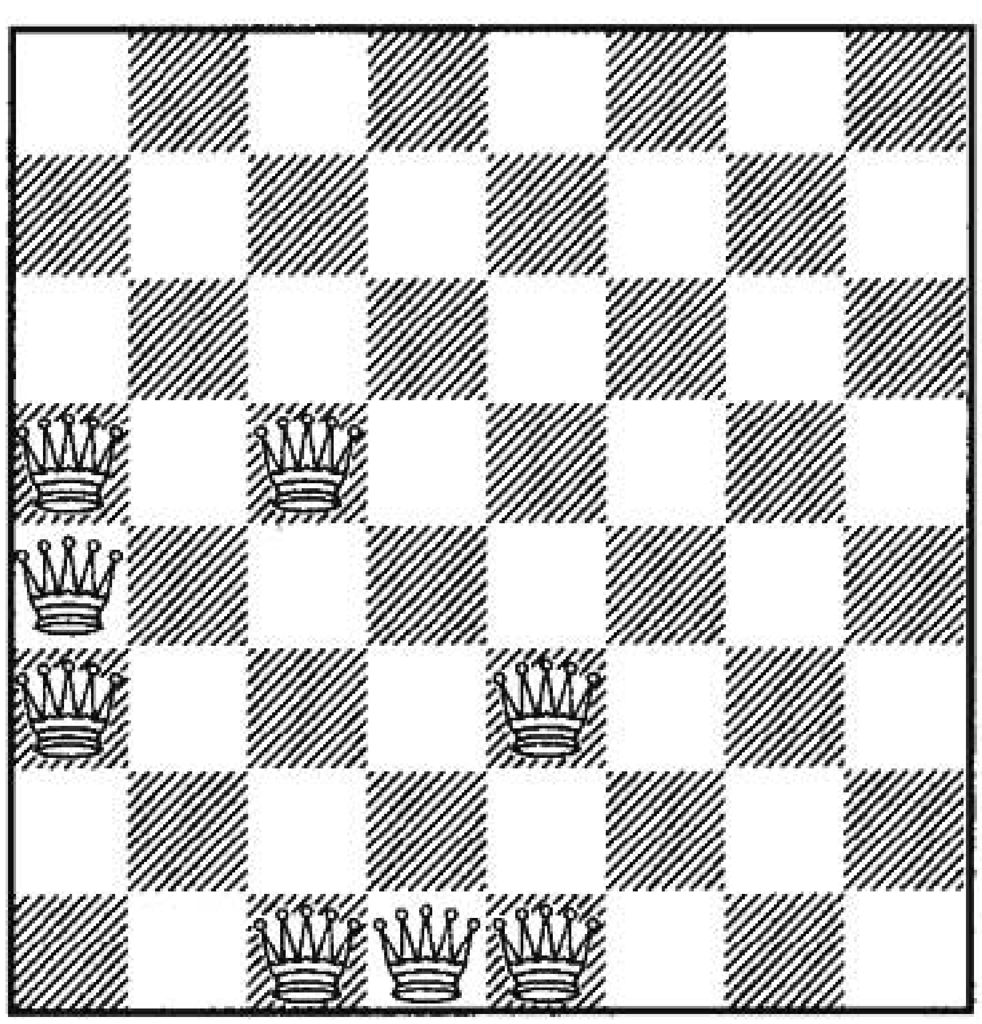


Figura 49.

5

El humilde peón

La idea de tener 8 damas del mismo color sobre el tablero probablemente parezca hiperbólica y disparatada, el delirio de un ajedrecista megalómano. Y, sin embargo, no es una situación imposible. En teoría, podría llegar a haber no sólo 8 sino incluso 9 damas del mismo color en el curso de una partida acorde con las reglas, pues cada peón puede convertirse en una dama al llegar a la octava fila (o a la primera, si es negro). ¿Podría, pues, llegar a haber 18 damas (9 de cada color) en el tablero? ¿Cabe, al menos en teoría, plantearse una superbatalla con 16 piezas por bando, en vez de 8 piezas y 8 peones?

Y así, partiendo de la dama, la más arrogante de las piezas, hemos vuelto nuestra atención hacia el humilde peón, del que hasta ahora —tan insignificante parece— nos habíamos olvidado.

Si limitada es su movilidad, más limitada todavía es su vida activa, pues el tiempo en ajedrez se mide por jugadas, y un peón sólo puede mover, a lo sumo, seis veces. Pero eso no significa que el resto del tiempo sea inoperante, pues aunque no se mueva puede servir de elemento de contención e impedir el acceso de piezas enemigas a las casillas que custodia, o bien proteger la posición de una pieza del propio bando. Además, si logra completar su corto viaje de 6 movimientos (o 5, si comenzó avanzando dos casillas), puede convertirse en una poderosa dama o en cualquier otra pieza, lo que hace de él un elemento decisivo en muchos finales de partida.

El peón es la oruga del ajedrez: parece un gusano que sólo puede arrastrarse lentamente hacia adelante, pero al final de su corta vida tal vez se convierta en una mariposa capaz de volar libremente por todo el tablero. No en vano decía el gran Philidor, uno de los mayores ajedrecistas de todos los tiempos, que los peones son el alma del juego.

Pues ni siquiera en la fase de "oruga" es tan insignificante el peón como parece. Sólo puede efectuar un máximo de 6 movimientos y sin retroceder nunca, pero ante él se abre un amplio abanico de caminos posibles. (¿Podría el lector calcular cuántos caminos diferentes puede, como máximo, recorrer un peón?)

Y puesto que el humilde peón merece todo nuestro respeto, sería un agravio comparativo no plantearnos con él los problemas de "máximos y mínimos" que nos hemos planteado con las demás piezas:

¿Cuántos peones podemos colocar, como máximo, en el tablero sin que ninguno amenace a ningún otro? (Aunque en una partida real no podría haber peones ni en la primera fila ni en la última, en este problema y en el siguiente prescindiremos de esta limitación.)

¿Cuál es el mínimo número de peones con el que podemos cubrir todo el tablero? (En este caso no sólo se consideran cubiertas las casillas que están a tiro de los peones, sino también las ocupadas por ellos, pues de lo contrario el problema sería obviamente irresoluble.)

Peones, combinaciones y permutaciones

Evidentemente, la poligrafía de un peón solo en el tablero no podría ser más trivial: un segmento rectilíneo vertical de 6 unidades de longitud que va de una casilla de la segunda fila a la octava casilla de la misma columna; eso sí, el peón puede recorrer su elemental itinerario de dos formas distintas, una "rápida" y otra "lenta": avanzando dos casillas en el primer movimiento o sólo una.

Ahora bien, basta con colocar dos peones, en vez de uno, en sus casillas de partida (figura 50) para que llevarlos a ambos a la última fila se convierta en una tarea llena de alternativas. ¿De cuántas formas diferentes podemos llevar dos peones (solos en el tablero) de la segunda fila a la octava?

Tendemos a considerar a los peones idénticos entre sí e intercambiables pero, en cierto modo, en el problema anterior los hemos "personalizado", y a pesar de la simetría de la situación consideramos que avanzar primero el de la izquierda no es lo mismo que empezar con el de la derecha.

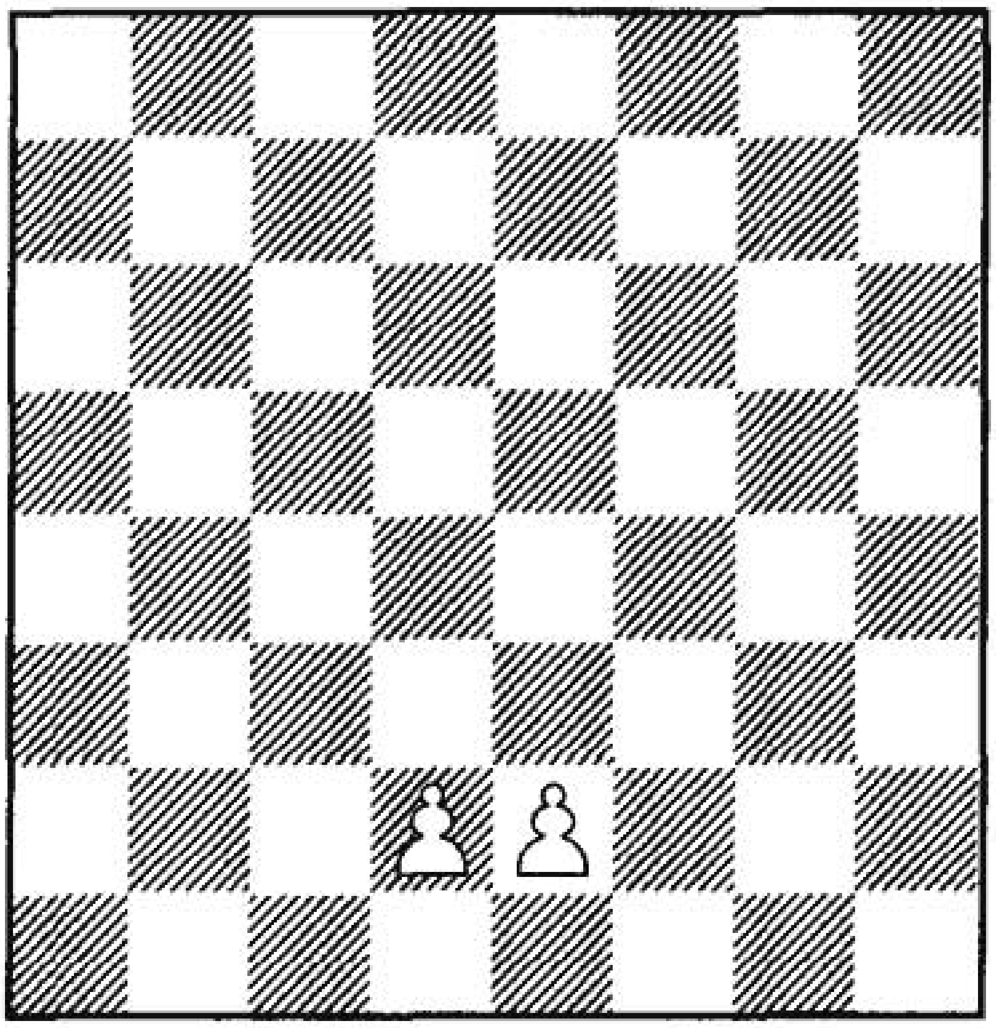


Figura 50.

Si individualizamos todos los peones de un bando (imaginemos que cada uno tiene un nombre propio y una apariencia ligeramente distinta, como los enanos de Blancanieves más uno) y, de paso, también las piezas, podemos plantearnos otro sencillo pero instructivo problema combinatorio: ¿De cuántas formas diferentes pueden colocarse los 16 trebejos de cada bando al inicio de la partida?

Supongamos, por ejemplo, que se trata de un ajedrez viviente, en el que las piezas y los peones son representados por personas. ¿De cuántas formas diferentes pueden colocarse en el tablero estas personas para dar comienzo a la partida?

Los peones inmóviles

Normalmente los peones (como la infantería en las antiguas batallas en las que está inspirado el ajedrez) son los primeros en avanzar y en sucumbir. Pero no tiene por qué ser necesariamente así, y en teoría podría darse una partida en la que cayeran todas las piezas (menos los reyes, naturalmente) sin que los peones hubieran hecho un solo movimiento ni sufrido una sola baja. ¿Podría el lector, partiendo de la situación inicial, llegar a la insólita posición de la figura 51 en el menor número de jugadas?

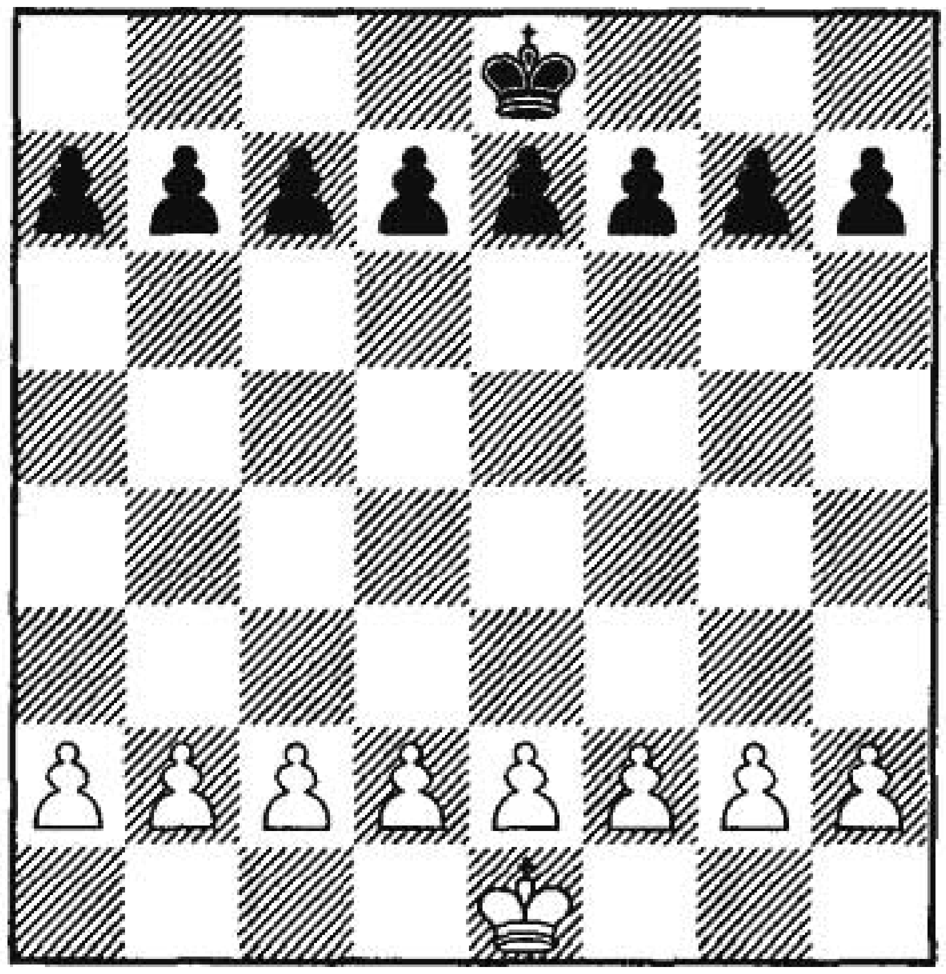


Figura 51.

En la figura 52 el tema de la inmovilidad se ha llevado aun más lejos. Aquí parece que las blancas no se han movido en absoluto y que las negras se han esfumado víctimas de una batalla fantasmal que no ha llegado a producirse. ¿Es posible llegar a esta situación en una partida de ajedrez ortodoxa?

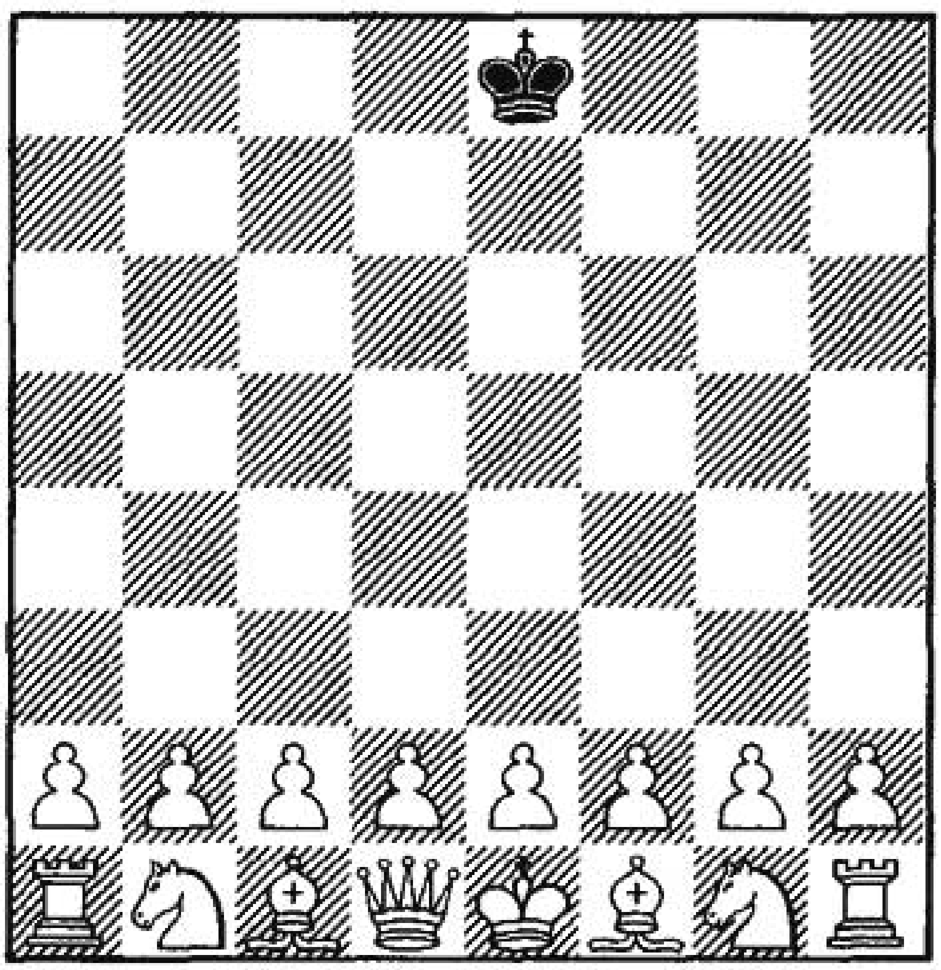


Figura 52.

Máximos y mínimos

Podría llegar a haber 18 damas en el tablero, pero no 32 piezas, puesto que para poder coronar todos los peones, al menos 8 de ellos han de comer piezas contrarias, única forma de salirse de su columna inicial, pues de otro modo los peones blancos y negros se cierran el paso unos a otros. Por lo tanto, el máximo número de piezas que puede llegar a haber en el tablero es 24.

El procedimiento para calcular los posibles recorridos del peón es idéntico al seguido en el caso del rey, y el esquema que se obtiene es prácticamente el mismo (compárese la figura 53 con la 12), pues el rey, si tiene que avanzar, se mueve como un peón (aunque el rey no necesita comer para moverse en diagonal). La única diferencia es que el peón no parte de la primera fila sino de la segunda, y puede llegar a cualquier casilla de la octava fila, por lo que el número total de recorridos posibles se obtiene sumando todos los números de la fila superior: 20 + 50 + 90 + 126 + 141 + 126 + 89 + 44 = 686 (ésta es la solución correspondiente a los peones centrales, que son los que pueden recorrer más caminos). Si consideramos que avanzar dos casillas en vez de una en el primer movimiento es seguir un "camino" distinto, entonces tenemos que sustituir el 3 de la casilla e4 por un 4, con lo que el resultado final aumenta en 80 caminos más.

8	20	50	90	126	141	126	89	44
7	5	15	30	45	51	45	30	14
6	1	4	10	16	19	16	10	4
5		1	3	6	7	6	3	1
4			1	2	3	2	1	
3				1	1	1		
2					0			
1								
	a	b	c	d	e	f	g	h

Figura 53.

En la disposición de la figura 54, los 32 peones no se amenazan entre sí y además cubren todo el tablero (como en el caso de las torres, la solución a ambos problemas es la misma y el "máximo" coincide con el "mínimo").

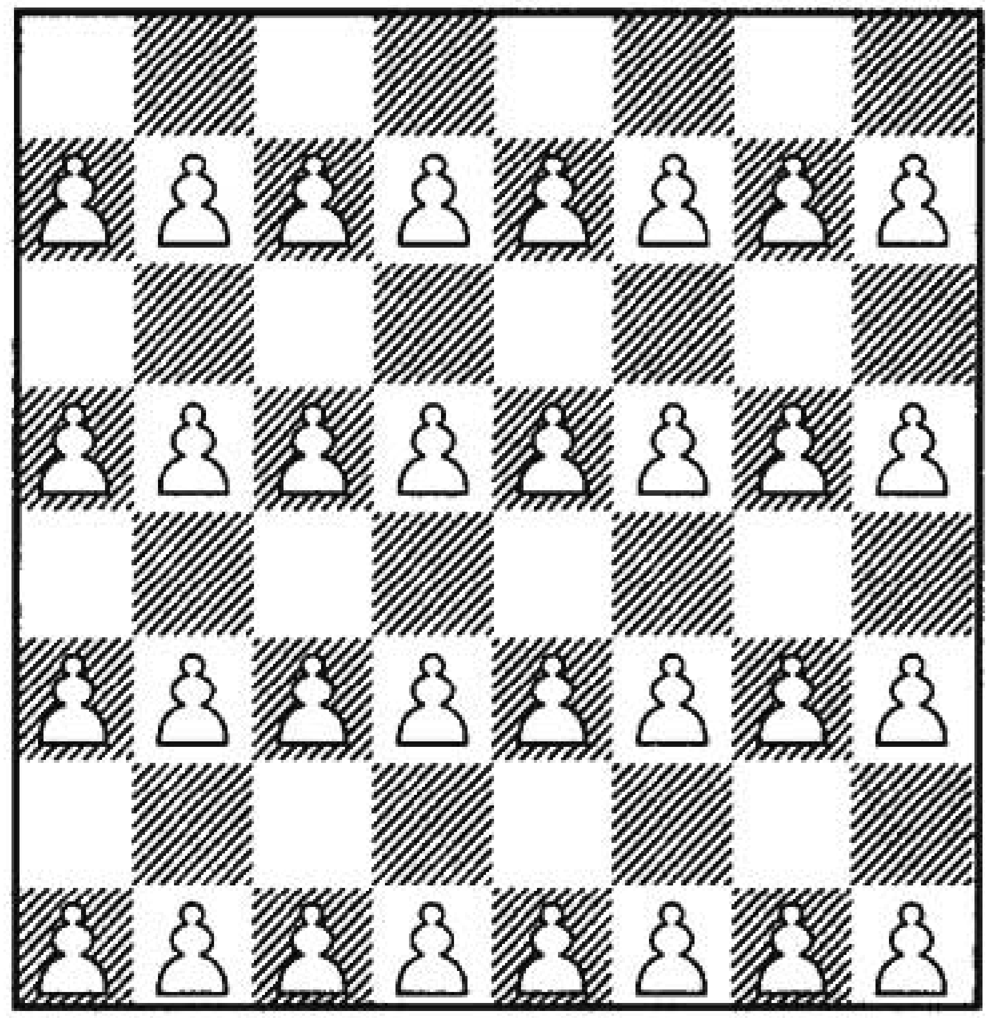


Figura 54.

En la figura 55 vemos una disposición de peones aparentemente análoga, pero que sólo cumple la primera condición (los peones no se amenazan entre sí, pero quedan sin cubrir las cuatro casillas blancas de la primera fila).

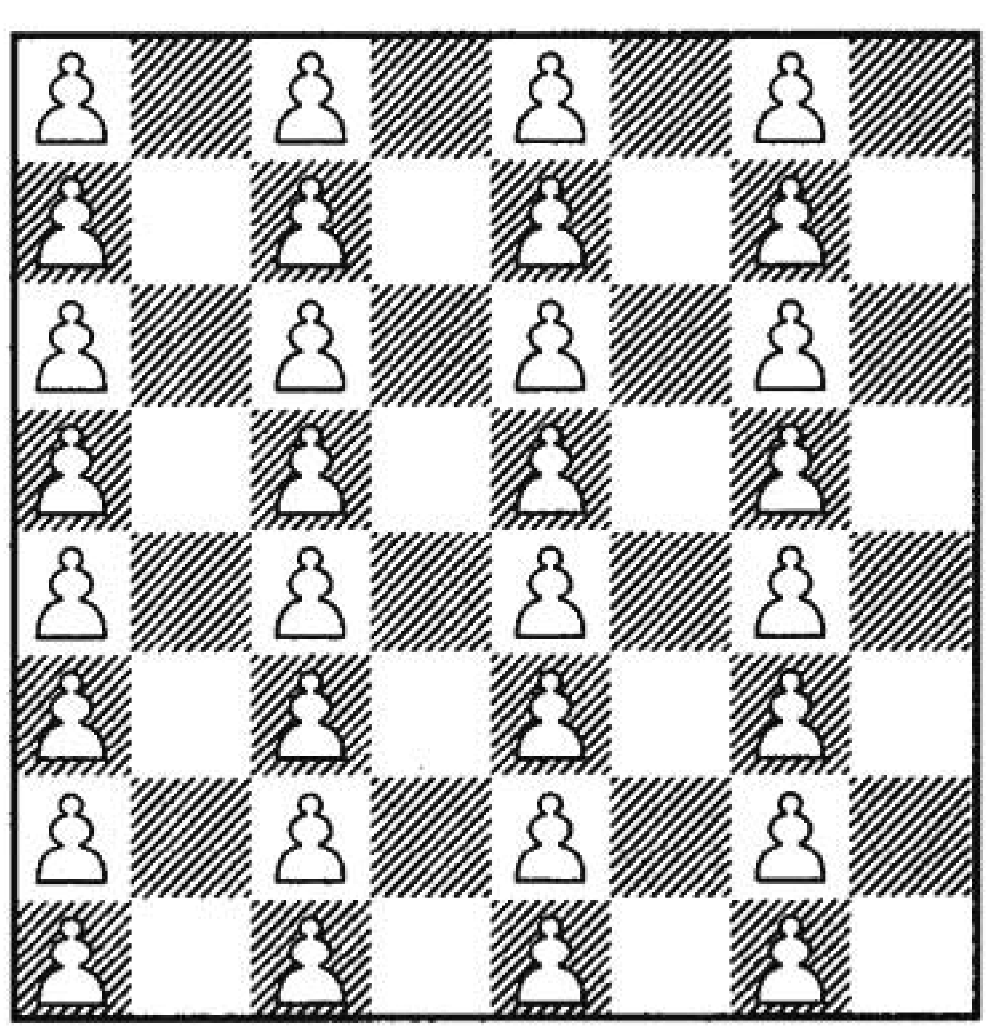


Figura 55.

Peones, combinaciones y permutaciones

En el título mismo de este apartado está la clave de las soluciones, pues el primero es un problema de combinaciones y el segundo de permutaciones.

Puesto que en su primer movimiento cada peón puede avanzar una casilla o dos, podemos llevarlos ambos a la octava fila en 10, 11 o 12 movimientos, según que movamos ambos peones 5 veces, uno 5 y el otro 6, o ambos 6 veces.

Empecemos considerando la última posibilidad. Si numeramos del 1 al 12, por orden de ejecución, las jugadas necesarias para coronar ambos peones, las seis jugadas correspondientes a uno de ellos (llamémoslo A, y al otro B) pueden ocupar cualesquiera de esos doce lugares, por lo que se trata de hallar las combinaciones de 12 elementos tomados de 6 en 6, o sea $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 / 6! = 924$. Razonando del mismo modo para los otros tres casos posibles (mover 5 veces el peón A y 6 el B, 6 el A y 5 el B, 5 veces ambos), se obtienen, respectivamente, los valores 462, 462 y 252, lo que da un total de 924 + 462 + 462 + 252 = 2.100 posibilidades.

Si los peones tuvieran cada uno su propia identidad, podríamos colocarlos de 8! = 40.320 formas. Ahora bien, para cada una de estas permutaciones peonales las torres pueden colocarse de dos formas distintas, y lo mismo los caballos y los alfiles, por lo que el número total de posibles colocaciones será $40.320 \times 2 \times 2 \times 2 = 322.560$. Eso si sólo tenemos en cuenta las piezas de un bando. Porque, por cada posible colocación de las blancas, las negras pueden adoptar 322.560, con lo que el número total de disposiciones diferentes de las 32 piezas será $322.560 \times 322.560 = 104.044.953.600$. Si nuestro hipotético ajedrez humano quisiera ensayar todas las disposiciones posibles, suponiendo que sólo dedicara un segundo a cada formación tardaría más de tres mil años en efectuar la prueba.

Los peones inmóviles

Se puede llegar a la situación de la figura 51 en 17 jugadas: 1 Cf3, Cf6; 2 Ch4, Ch5; 3 Cg6, Cg3; 4 Cxh8, Cxh1; 5 Cg6, Cg3; 6 Cxf8, Cxf1; 7 Rxf1, Rxf8; 8 Cc3, Cc6; 9 Ca4, Ca5; 10 Cb6, Cb3; 11 Cxa8, Cxa1; 12 Cb6, Cb3; 13 Cxc8, Cxc1; 14 Cd6, Cd3; 15 De1, De8; 16 Cxe8, Cxe1; 17 Rxe1, Rxe8. El procedimiento es simétrico, pues las negras repiten especularmente los movimientos de las blancas. Y casi es doblemente simétrico, pues el desarrollo en el flanco de dama es prácticamente el mismo que en el flanco de rey.

La situación de la figura 52 es perfectamente posible (aunque poco probable) y se puede llegar a ella en 16 jugadas: 1 Cc3, d5; 2 Cxd5, Cc6; 3 Cxe7, g5; 4 Cxc8, Cf6; 5 Cxa7, Ce4; 6 Cxc6, Cc3; 7 Cxd8, Tg8; 8 Cxf7, Tg6; 9 Cxg5, Te6; 10 Ch7, Cb1; 11 Cxf8, Ta3; 12 Cxe6, b5; 13 Cxc7+, Rf8; 14 Cxb5, Rg8; 15 Cxa3, Rf8; 16 Cxb1, Re8.

Ambas partidas fueron halladas por Henry Dudeney y figuran en su libro *Amusements in Mathematics*.

6

Alicia en el tablero de las maravillas

Es casi imposible interesarse por las matemáticas sin sentir al menos una cierta curiosidad por el ajedrez. Y es *totalmente* imposible interesarse por las matemáticas recreativas sin que el ajedrez se convierta en un importante punto de referencia.

Tanto el estadounidense Sam Loyd como el británico Henry Dudeney, los dos grandes creadores de rompecabezas y pasatiempos del siglo pasado, fueron audaces exploradores del inagotable tablero (algunos de sus hallazgos más notables figuran en los capítulos siguientes), y no podía ser menos el "padre y maestro mágico" de cuantos se acercan a la lógica y la matemática con espíritu festivo. Me refiero, evidentemente, a Lewis Carroll.

Como es bien sabido, su segundo libro de Alicia, *A través del espejo*, está estructurado como una anárquica (*ma non troppo*) partida de ajedrez o, más exactamente, como un problema de ajedrez: "El Peón Blanco (Alicia) juega y gana en once movimientos".

A modo de prólogo, o más bien de índice, el autor anota el desarrollo del juego, que, por cierto, transgrede casi todos los presupuestos del enunciado: no es el Peón Blanco el que juega, sino la Reina Roja, y los movimientos de las blancas no son once, sino trece, por tres de las rojas. En los supuestos once movimientos de las blancas hay cuatro no-movimientos (1, 3, 9 y 10); en los diez supuestos movimientos de las rojas sólo hay un falso movimiento (el 9), pero seis de los nueve restantes son en realidad de las blancas (2, 3, 4, 5, 7 y 10), por lo que las rojas sólo mueven tres veces (1, 6 y 8). Veamos el disparatado desarrollo tal como el autor lo describe:

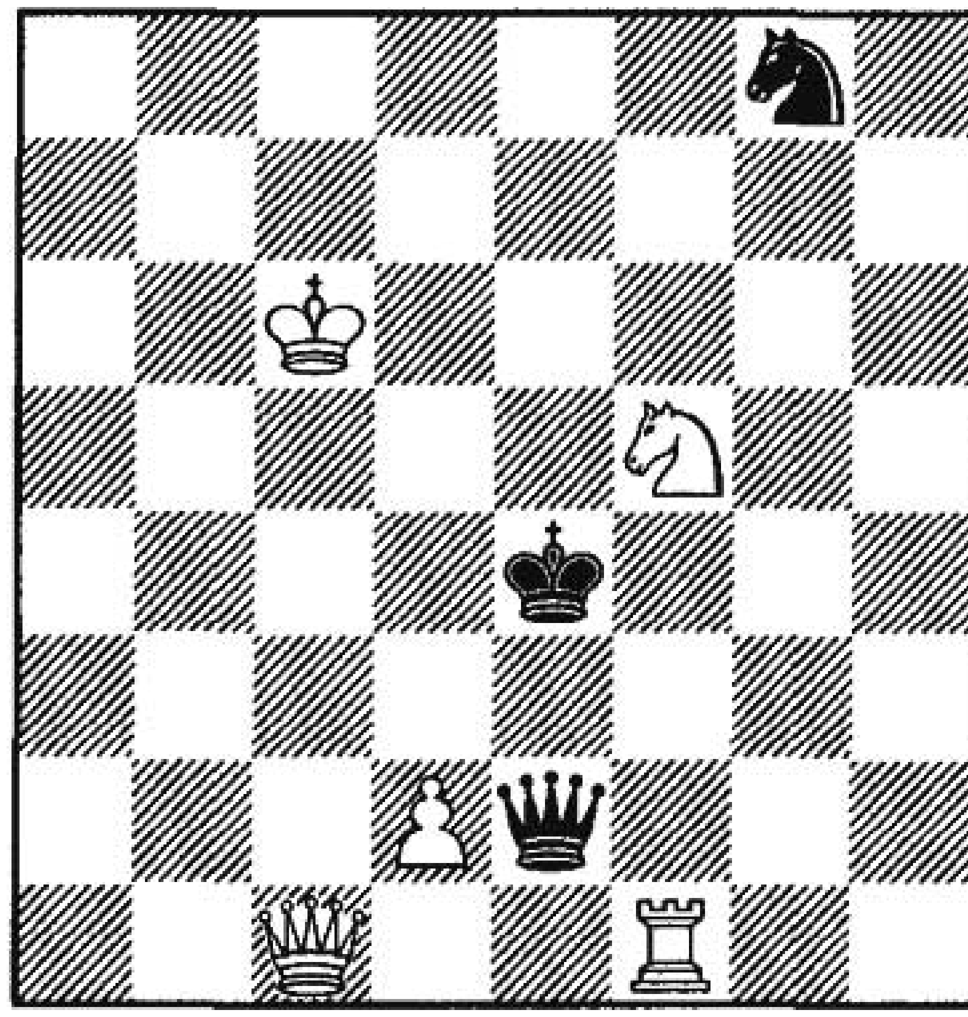


Figura 56. El Peón Blanco (Alicia) juega y gana en once movimientos.

1. Alicia se encuentra con la Reina Roja.
2. Alicia cruza la tercera casilla de Reina (*por ferrocarril*) y va a la cuarta (*Tweedledum y Tweedledee*).
3. Alicia se encuentra con la Reina Blanca (*con chal*).
4. Alicia a la cuarta casilla de Reina (*tienda, río, tienda*).
5. Alicia a la sexta casilla de Reina (*Humpty Dumpty*).
6. Alicia a la séptima casilla de Reina (*bosque*).
7. Caballo Blanco toma Caballo Rojo.
8. Alicia a la octava casilla de Reina (*coronación*).
9. Alicia se convierte en Reina.
10. Alicia se enroca (*festín*).
11. Alicia toma a la Reina Roja y gana.

1. Reina Roja a la cuarta casilla de la Torre de Rey.
2. Reina Blanca a la cuarta casilla del Alfil de Reina (*tras su chal*).
3. Reina Blanca a la quinta casilla del Alfil de Reina (*se convierte en oveja*).
4. Reina Blanca a la octava casilla del Alfil de Rey (*deja el huevo en la estantería*).
5. Reina Blanca a la octava casilla del Alfil de Reina (*huyendo del Caballo Rojo*).
6. Caballo Rojo a la segunda casilla de Rey (jaque).
7. Caballo Blanco a la quinta casilla del Alfil de Rey.
8. Reina Roja a casilla de Rey (*examen*).
9. Las Reinas se enrocan.
10. Reina Blanca a la sexta casilla de la Torre de Reina (*sopa*).

Las irregularidades de esta partida no han dejado de sorprender a los comentaristas desde que el libro se publicó por primera vez, en 1871, y han suscitado las digresiones más peregrinas. Pero de lo que hay que sorprenderse es de tal sorpresa, valga el juego de palabras, pues lo realmente sorprendente sería que Carroll se hubiera atenido estrictamente a las reglas del juego. Del mismo modo que, recurrentemente, el autor de *Alicia* subvierte la semántica desde el respeto a la sintaxis, o utiliza los formalismos lógicos para problematizar ciertos contenidos del pensamiento presuntamente racional, llevando el arte de la paradoja hasta los aledaños del surrealismo, en esta ocasión respeta la "gramática" del juego (los movimientos de las piezas) para ponerla al servicio de un "discurso" no convencional. El paradójico lema del príncipe de la paradoja podría haber sido "subvertir con las reglas".

Como prefacio a la edición revisada de 1897, el propio Carroll escribió:

> Puesto que el problema de ajedrez que aparece en la página siguiente ha desconcertado a algunos de mis lectores, tal vez convenga señalar que es correcto por lo que respecta a los *movimientos*. La *alternancia* de rojas y blancas podría haberse observado de forma más estricta, y el "enroque" de las tres Reinas no es más que una forma de decir que entran en el palacio: pero el jaque al Rey Blanco en el movimiento 6, la captura del Caballo Rojo en el movimiento 7 y el jaque mate final al Rey Rojo son, como verá quien se tome la molestia de colocar las piezas y moverlas como se indica, estrictamente acordes con las reglas del juego.

Quien se tome la molestia de colocar las piezas y moverlas como se indica, verá que el desarrollo, incluso cuando respeta plenamente las reglas del juego, es deliberadamente disparatado. En dos ocasiones, por ejemplo, la Reina Blanca pasa por alto situaciones de jaque mate, y en otra "huye" del Caballo Rojo sin que éste (que está en la casilla contigua) la amenace. La más flagrante violación de las reglas del ajedrez (aparte del hecho de que las blancas muevan trece veces por tres de las rojas) se produce cuando, en su última jugada, la Reina Roja da jaque al Rey Blanco sin que nadie, ni siquiera ella misma, parezca percatarse de ello. Aunque, por otra parte, es un despiste que encaja perfectamente con la personalidad de la Reina Roja, como también ocurre con las arbitrariedades de las demás piezas.

Como ha señalado Martin Gardner en su imprescindible edición anotada de ambos libros de Alicia:

Considerando las enormes dificultades que implica hacer encajar una partida de ajedrez con un divertido relato del absurdo, Carroll consigue un notable resultado. En ningún momento, por ejemplo, habla Alicia con una pieza que no esté en una casilla contigua. Las Reinas se afanan haciendo cosas mientras sus maridos permanecen relativamente quietos e impotentes, igual que ocurre en el juego del ajedrez. Las excentricidades del Caballero Blanco[1] encajan admirablemente con la forma en que se mueve esta pieza; incluso la tendencia de los caballeros a caerse de sus monturas, de un lado o del otro, sugiere el movimiento del caballo del ajedrez, dos casillas en una dirección y luego una casilla a la derecha o a la izquierda.

Más adelante, en la misma nota al prefacio de *A través del espejo*, Gardner añade:

Se han llevado a cabo diversos intentos de hallar una secuencia de jugadas de ajedrez que se adapte al relato y a la vez respete plenamente las reglas del juego. El más ambicioso intento de este tipo del que tengo noticia figura en el *British Chess Magazine* de mayo de 1910 (vol. 30, pág. 181). Donald M. Liddell desarrolla una partida de ajedrez completa, que empieza con la apertura Bird y termina con un mate de Alicia al llegar a la octava casilla ¡en su 66º movimiento! La elección de la apertura es adecuada, pues ningún ajedrecista experto ha tenido un estilo de juego tan hilarante y excéntrico como el del británico H. E. Bird. Si Donald Liddell era pariente de *los* Liddell, es algo que no he conseguido averiguar.

La casilla sobrante

Uno de los más famosos y desconcertantes rompecabezas relacionados con el tablero de ajedrez, atribuido a Lewis Carroll, es la paradoja geométrica expresada en la figura 57: cortando el tablero por las tres líneas de trazo grueso marcadas, se puede reagrupar los cuatro trozos resultantes en un rectángulo de 5×13, con lo cual ¡se ha "creado" una casilla!, pues el tablero tiene 64 y el rectángulo $5 \times 13 = 65$. (¿Puede explicar el lector la casilla que sobra?)

Aunque a menudo se le atribuye esta paradoja (Collingwood la incluye en *The Lewis Carroll Picture Book* como uno de sus mejores *puzzles*), y aunque Carroll la generalizó hallando una fórmula que da las dimensiones de todos los tableros que pueden

1. En inglés el caballo del ajedrez se llama *knight* (caballero).

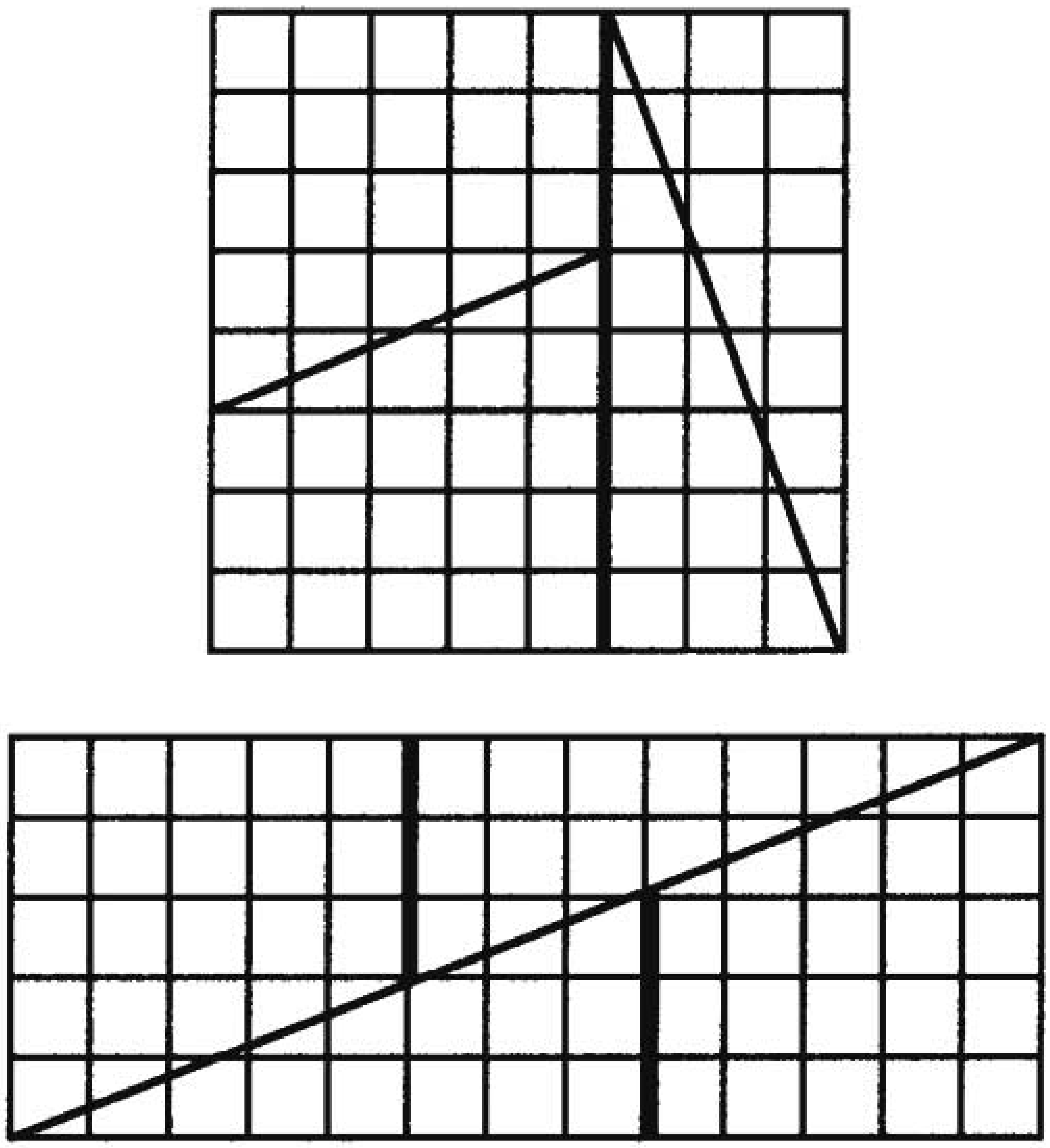


Figura 57.

dividirse de la misma forma (por ejemplo, los de 21×21 y 55×55), su paternidad es dudosa, y parece más probable que el autor fuera Sam Loyd. El propio Loyd, en su *Cyclopaedia of Puzzles*, afirma que la presentó en el Congreso Americano de Ajedrez en 1858. Y, dicho sea de paso, su hijo descubrió que las cuatro piezas también se pueden reagrupar de la forma que se ve en la figura 58, donde también sobra una casilla.

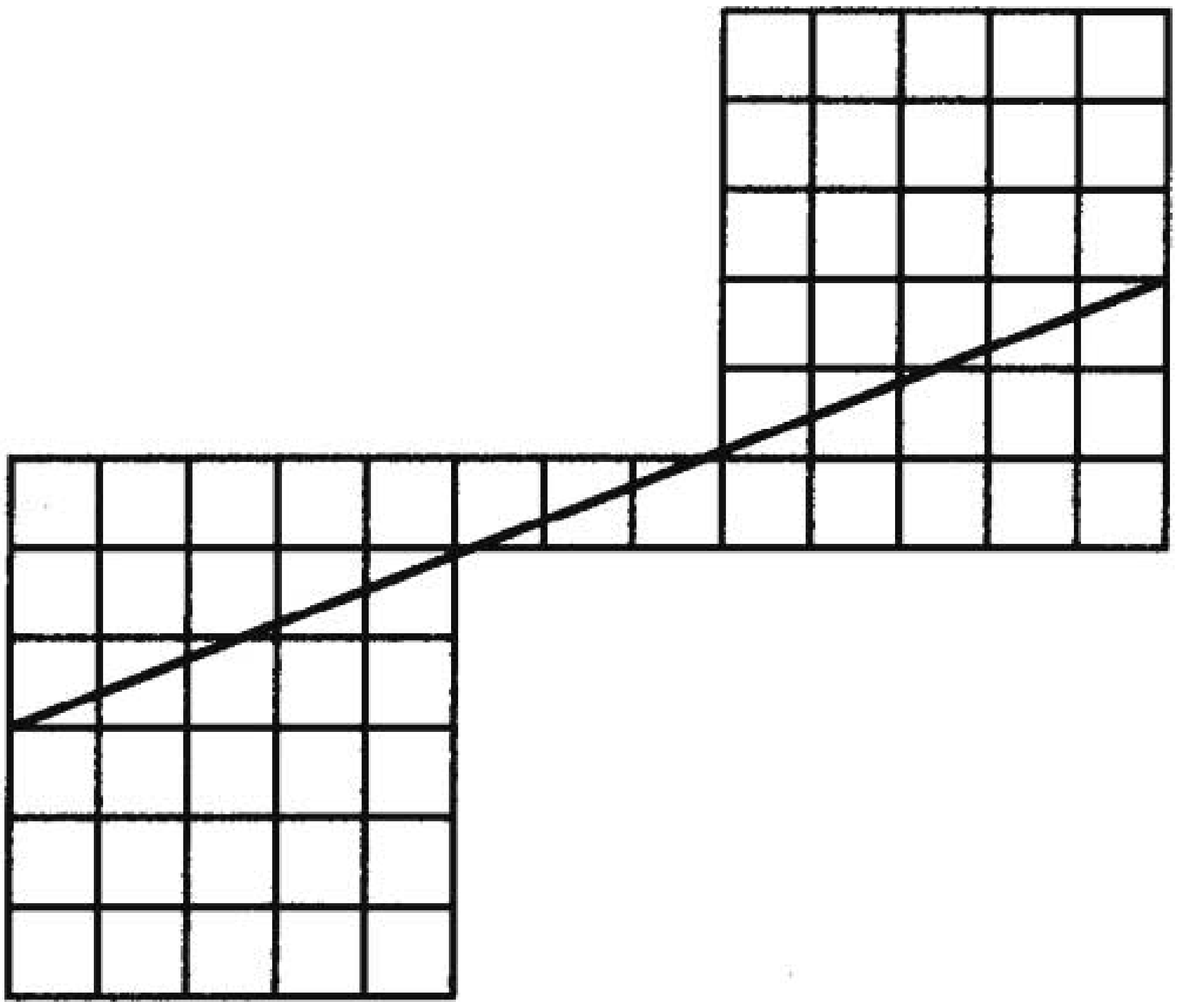


Figura 58.

El Lanrick

No se puede hablar de Lewis Carroll en relación con el ajedrez sin mencionar, aunque sea brevemente, el "Lanrick" o "Selección Natural", un interesante juego sobre el tablero de 8 × 8 inventado por él.

Aunque se impuso el primer nombre, tomado de un pasaje de *La Dama del Lago* de Walter Scott (*"The muster-place be Lanrick-mead"*), el otro es más descriptivo, pues el juego se inspira en los procesos de la selección natural, postulada por Darwin pocos años antes como motor de la evolución.

El Lanrick es un juego para dos jugadores, cada uno de los cuales dispone de 8 fichas (blancas las de uno y negras las del otro) que se mueven como las damas del ajedrez. Además, hay nueve cuadrados de cartón del tamaño de una casilla que sirven como "marcadores". El objetivo del juego es concentrar las propias fichas en ciertos grupos de casillas, determinados por los marcadores, llamados *"rendezvous"*.

Desgraciadamente, las reglas son demasiado largas y complicadas para darlas con detalle y poder entrar en la discusión del juego (se le ha reprochado a Carroll que la mayor dificultad del Lanrick estriba en memorizar las reglas). El lector interesado encontrará una descripción completa en la amena recopilación de John Fisher *The Magic of Lewis Carroll*.

Conclusión

Nuestro breve encuentro con Lewis Carroll nos ha apartado alegremente de la ortodoxia (no podía ser de otra manera) y nos ha introducido en un país de las maravillas ajedrecístico en el que todo es posible.

La disparatada partida que estructura las peripecias de Alicia al otro lado del espejo, nos remite directamente a dos temas fascinantes: el ajedrez heterodoxo y los problemas atípicos. La paradoja-falacia de la casilla sobrante es un distinguido exponente de una numerosa familia de rompecabezas rompetableros. Y el Lanrick es uno (aunque no uno cualquiera) de los muchos juegos nacidos del ajedrez, en el sentido de que utilizan su mismo tablero y, eventualmente, los movimientos de algunas de sus piezas.

Ajedrez heterodoxo, problemas atípicos, tableros rotos y juegos derivados del ajedrez: estos son los temas que Carroll nos propone y que, siguiéndole fascinados, como Alicia al Conejo Blanco, abordaremos en los próximos capítulos.

Soluciones

La aparente diagonal del rectángulo de 5 × 13 no es en realidad una línea carente de espesor, sino un alargadísimo triángulo cuya superficie compensa la de la casilla sobrante. Las 15 casillas situadas a lo largo de la falsa diagonal son seudocasillas incompletas, reconstruidas a partir de dos trozos que no se corresponden; por tanto, en el rectángulo hay 50 casillas completas y 15 incompletas cuya superficie conjunta equivale a la de 14 casillas completas. (Huelga señalar que en la recomposición de Loyd hijo ocurre exactamente lo mismo.)

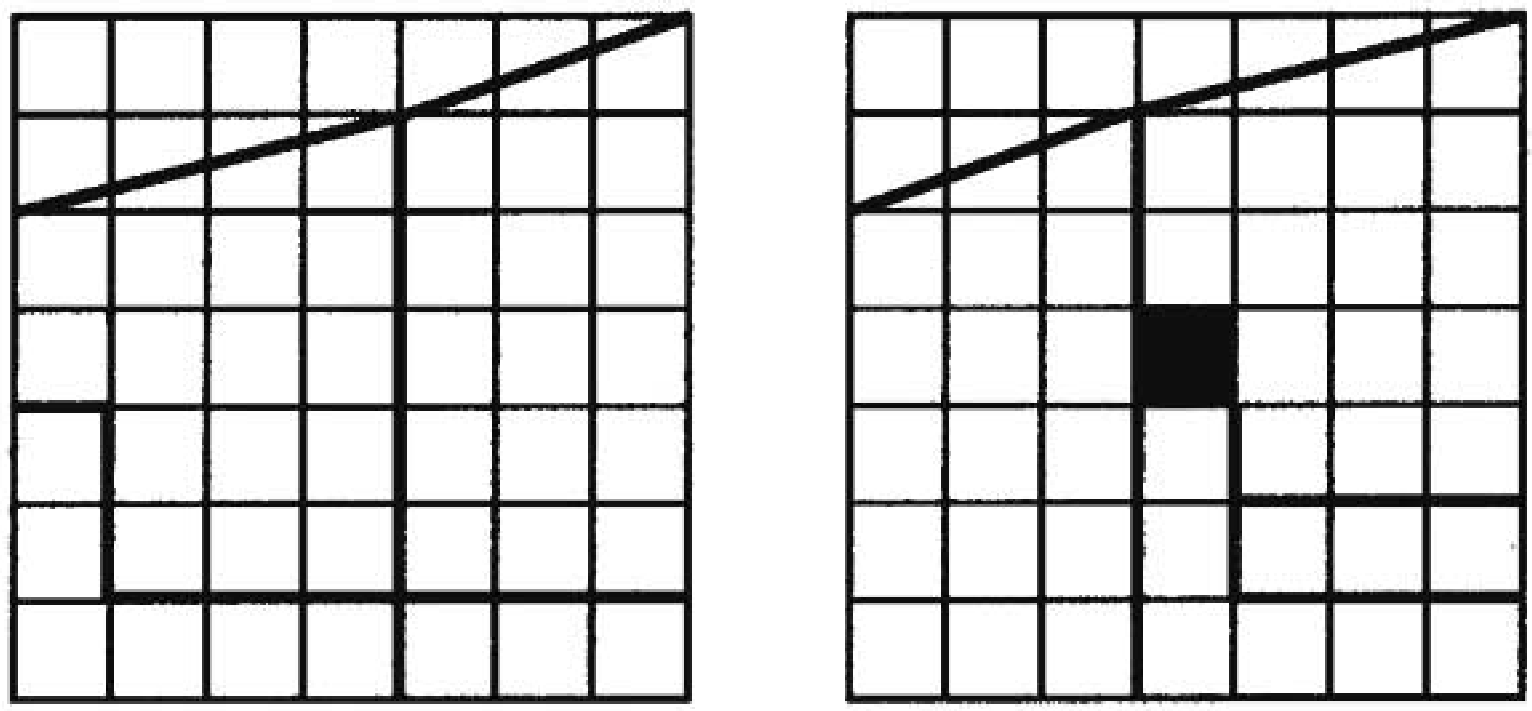


Figura 59.

Una interesante variación sobre el mismo tema es la debida al "matemago" estadounidense Paul Curry: tal como vemos en la figura 59, en este caso se ha esfumado una casilla tras la partición y reconstrucción de un tablero de 7 × 7. Aquí la "trampa" es más visible: al ser la recomposición tan parecida al original, es fácil darse cuenta de que la línea oblicua no es recta sino quebrada y que el ángulo cuasi-llano que forman sus dos segmentos se invierte en la reordenación de las piezas. Si en la paradoja de la casilla sobrante se producía un alargadísimo hueco triangular, aquí se produce un "solapado solapamiento" que escamotea un estirado paralelogramo de área equivalente a la de la casilla aparentemente faltante.

7

Ajedrez heterodoxo

En la dislocada partida-aventura de Alicia al otro lado del espejo, lo que Carroll modifica es, usando sus propias palabras, la alternancia entre blancas y negras, el hecho de que los jugadores, alternativamente, hacen un movimiento y sólo uno cada vez; sin embargo, las piezas se mueven de acuerdo con las reglas y la partida termina con el consabido jaque mate. Cada uno de estos aspectos (alternancia de las jugadas, movimiento de las piezas, objetivo del juego) puede ser alterado y, por supuesto, también admite modificaciones el terreno de juego mismo, o sea, el tablero, tanto en su tamaño como en su forma, incluso en su número de dimensiones. Pero, evidentemente, cualquier cambio en las reglas del ajedrez nos aparta de la "legalidad", llevándonos a los ilimitados e imprevisibles dominios del ajedrez heterodoxo.

Es imposible abarcar en pocas páginas un campo tan extenso y variado como el del ajedrez heterodoxo o "ajedrez de fantasía", en el que, en principio, cabe cualquier modificación de las reglas, las piezas o el tablero, por lo que nos limitaremos a ver algunas de sus modalidades más conocidas y representativas de las diversas posibilidades.

Para empezar, podemos distinguir entre las variantes que conservan el tablero normal de 8×8 y aquellas otras, más drásticas, en las que se modifica el soporte mismo del juego.

Con tablero normal

Por razones obvias, la mayoría de las modalidades del ajedrez heterodoxo pertenecen a este grupo, ya que modificar los objetivos del juego o la movilidad de las piezas no implica la alteración física del material ajedrecístico convencional, mientras que la modificación del "campo de batalla" supone construir un tablero especial y, a menudo, añadir piezas nuevas.

En este apartado, y a medio camino entre la ortodoxia y la heterodoxia, podríamos incluir aquellas partidas en las que un jugador, para compensar su superioridad, da alguna ventaja al otro, por ejemplo, empezando a jugar con una pieza menos.

También hay que mencionar las propuestas de modificación de las reglas actuales para dar más dinamismo y espontaneidad al juego. Por ejemplo, Lasker propuso suprimir el enroque en beneficio de la movilidad y la rapidez, y Bobby Fisher, inspirándose en el ajedrez de Brünner (que veremos a continuación), planteó la posibilidad de sortear la disposición inicial de las piezas para que la teoría de aperturas no tuviera tanto peso en el desarrollo inicial de la partida.

El ajedrez de Brünner

Lo único que cambia en esta variante es la disposición inicial de las piezas. Los peones se colocan en su posición habitual, pero las piezas propiamente dichas pueden disponerse en cualquier orden dentro de su fila de partida correspondiente, conservando la simetría especular entre blancas y negras (el rey negro ha de estar en la misma columna que el rey blanco, la dama negra en la misma que la dama blanca, etcétera).

En la figura 60 vemos una posible disposición inicial, en la

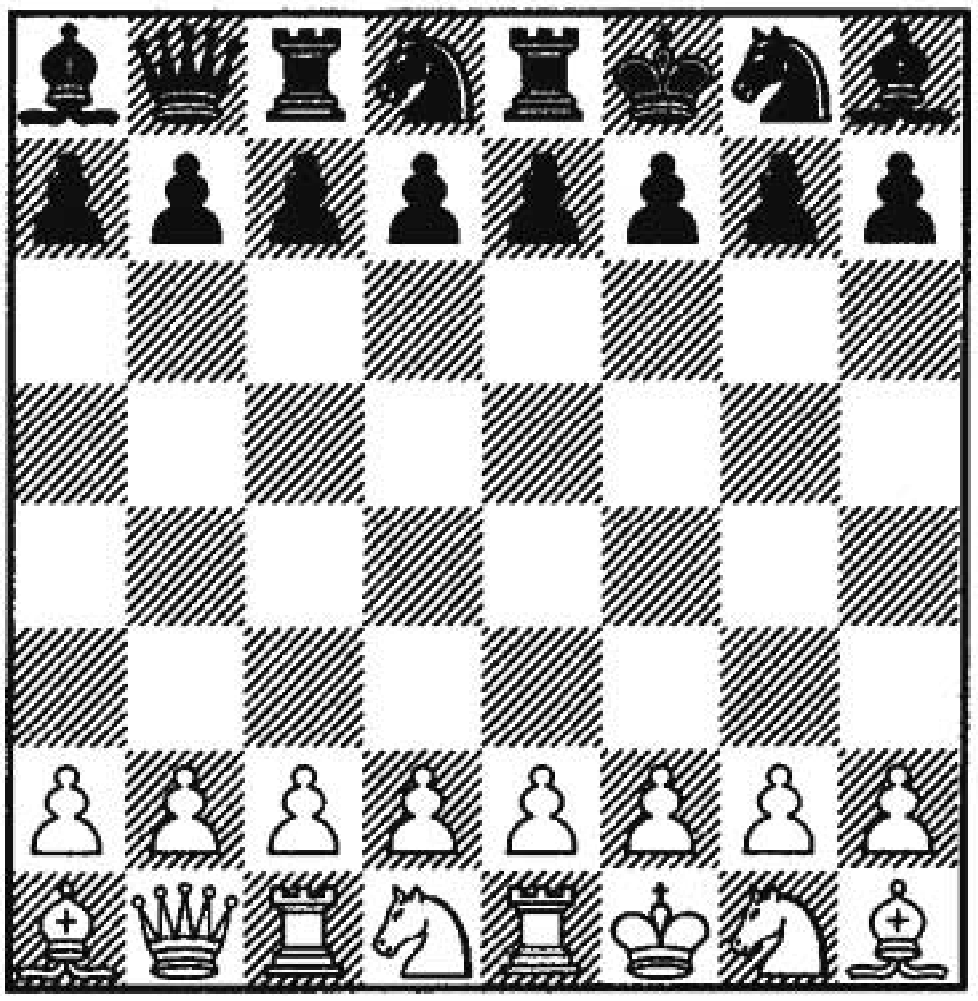


Figura 60.

que sólo el caballo de rey ocupa su casilla habitual. Naturalmente, hay muchas posibilidades más. (¿Podría el lector decir cuántas exactamente?)

El principal objeto de esta variante es abolir la teoría de aperturas, para hacer que el juego sea plenamente creativo desde los primeros movimientos, y por eso ha sido propugnada por jugadores con gran capacidad de improvisación, como Fisher.

Para iniciar una partida, el blanco sitúa una de sus piezas, a elección, en una cualquiera de las casillas de la primera fila; luego el negro sitúa una pieza igual en su casilla homóloga, y otra pieza de su elección en una cualquiera de las casillas libres, y así sucesivamente hasta colocar todas las piezas. La colocación inicial de las piezas también se puede decidir por sorteo, o dejarla a la elección de uno de los dos jugadores (preferentemente el que juega con negras, pues elegir la disposición de las piezas y además llevar la iniciativa es mucha ventaja).

El "mate jaque"

El nombre completo de esta variante sería "mate al primer jaque", pues gana el jugador que antes logra dar un simple jaque al rey adversario.

Este interesante planteamiento, sin embargo, no da mucho juego (nunca mejor dicho), pues las blancas disponen de una estrategia segura para dar jaque al rey negro en un máximo de cinco jugadas moviendo sólo los caballos. (Invito al lector a buscar dicha imparable maniobra de la caballería.)

Para dar más interés al juego, se puede aumentar el número de jaques necesarios para ganar la partida. Por ejemplo, gana el jugador que antes consiga dar jaque tres veces al rey contrario.

El que pierde, gana

Es decir, el objetivo es obligar al contrario a darnos jaque mate. Por lo demás, hay que respetar todas las reglas del ajedrez, incluida, por supuesto, la de neutralizar obligatoriamente los jaques del adversario. Y puesto que las únicas jugadas forzosas son precisamente los movimientos o capturas destinados a salir de la situación de jaque, la forma de obligar al contrario a darnos mate es, paradójicamente, darle jaque. Veamos un ejemplo:

1 f4, e5; 2 g4, Re7; 3 Cc3, Rf6; 4 Cd5+, Rg6; 5 Cf3, Ch6; 6 Ch4+, Dxh4 ++.

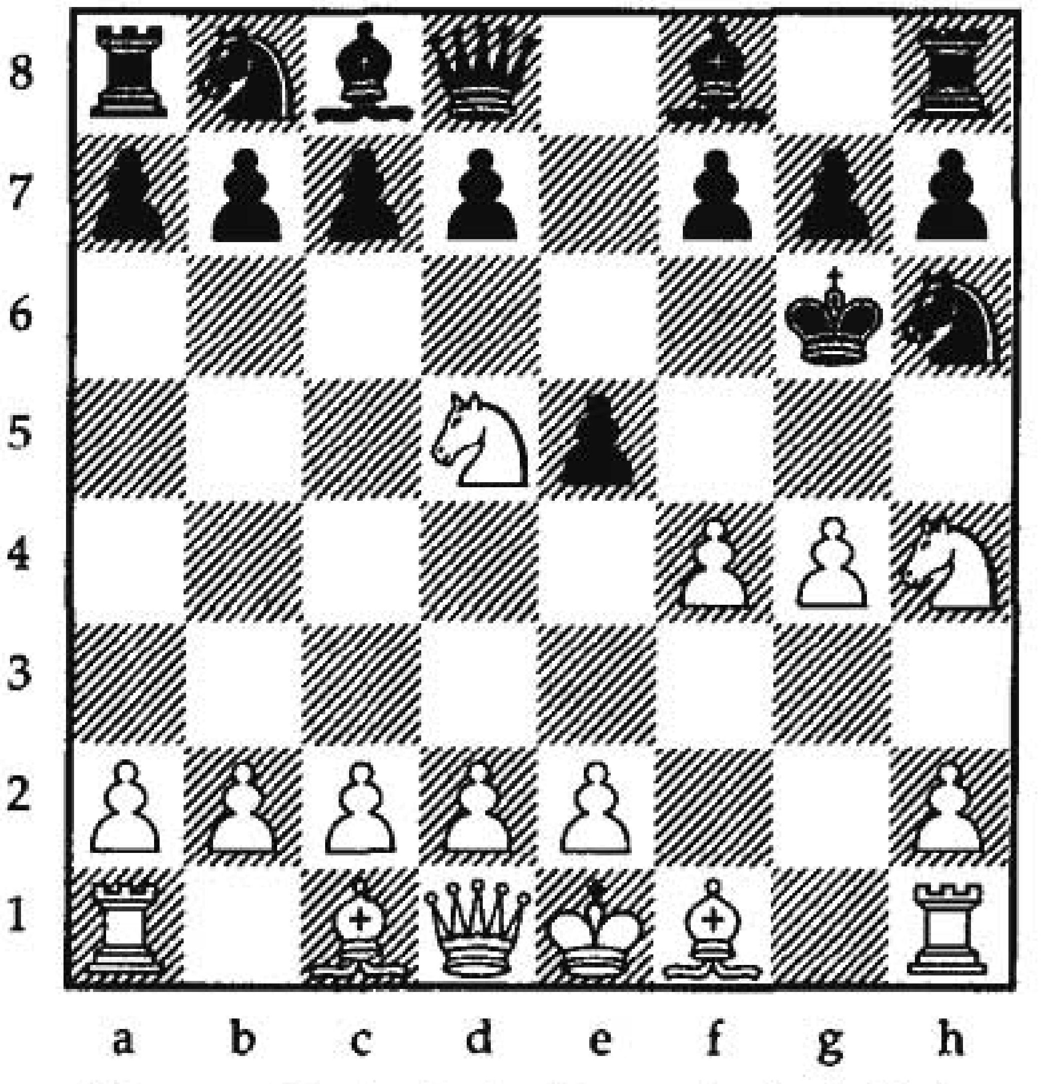


Figura 61. Posición después de 6 Ch4+.

El rey negro, al ser puesto en jaque por el caballo (fig. 61), no pude mover a ninguna de las casillas contiguas, pues todas están amenazadas; por lo tanto, la única forma que tienen las negras de neutralizar el jaque es comer el caballo con la dama, y al hacerlo dan jaque mate al rey blanco.

El ajedrez marsellés

En esta dinámica modalidad, cada bando realiza alternativamente dos movimientos en vez de uno. Sólo se puede dar jaque en el segundo movimiento de cada turno, y el rey sólo dispone de un movimiento para salir de una situación de jaque.

El ajedrez marsellés fue bastante popular en Francia durante algunos años, sobre todo en su variante "sin jaque", en la que el blanco sólo efectúa un movimiento en su primer turno (para disminuir la ventaja inicial) y en la que se elimina el jaque (a excepción del jaque mate, naturalmente), por lo que el rey puede estar impunemente al alcance de una pieza contraria.

El ajedrez bicolor

En el extremo opuesto de las distintas modalidades de ajedrez sin jaque está el ajedrez bicolor, en el que el rey no puede estar al alcance de ninguna de las piezas del tablero, ni siquiera de las de su propio bando. Naturalmente, esto obliga a eliminar el enroque (pues al enrocar el rey quedaría amenazado por su propia torre) y a alterar la disposición inicial (ya que el rey no puede estar junto a su dama), normalmente intercambiando las posiciones de la dama y el caballo de dama.

Hay una variante del ajedrez bicolor en la que, además, se puede capturar piezas del propio bando. A primera vista puede parecer una opción inútil, ya que no interesa mermar las propias fuerzas; pero a menudo un peón (u otra pieza) del propio bando se interpone en el camino de un ataque fulminante y puede convenir eliminarlo, por lo que esta variante confiere un gran dinamismo al juego.

El maharajá

Uno de los jugadores coloca sus 16 piezas de la forma habitual, y el otro sólo tiene una pieza, el maharajá, que es una dama que, además de sus movimientos habituales, puede saltar como un caballo. El que juega con el maharajá lo sitúa, al comienzo de la partida, en cualquier casilla no amenazada por los peones contrarios, y el otro hace el primer movimiento. El maharajá pierde si es capturado y gana si da jaque mate al rey contrario. Se conservan todas las reglas del ajedrez ortodoxo excepto la transformación de los peones al llegar a la última fila, pues de lo contrario sería facilísimo derrotar al maharajá: bastaría con llevar los peones de torre hasta la última fila y convertirlos en damas. Contra tres damas y dos torres, el maharajá no tendría nada que hacer.

Incluso con esta limitación, si se juega correctamente el maharajá lleva las de perder; pero su gran movilidad le permite a menudo dar un rápido mate al comienzo de la partida, y también puede llegar a comer todas las piezas contrarias para luego acorralar al rey y darle mate en una casilla periférica.

Con tablero alterado

En su novela *Los ajedrecistas de Marte*, Edgar Rice Burroughs describe detalladamente el *jetan* o ajedrez marciano, que se juega en un tablero de 10 × 10, con nuevas piezas y curiosas reglas (por ejemplo, la pieza llamada "princesa" tiene en cada partida una "opción de fuga", que le permite saltar, por encima de piezas propias y contrarias, tantas casillas como desee y en cualquier dirección). Pero no hace falta irse a otro planeta para encontrar variantes del ajedrez en las que no sólo las reglas, sino también el tablero y las piezas, sufren modificaciones.

El ajedrez de Carrera

Una de las primeras ampliaciones del ajedrez convencional fue propuesta en el siglo XVII por el clérigo y ajedrecista italiano Pietro Carrera.

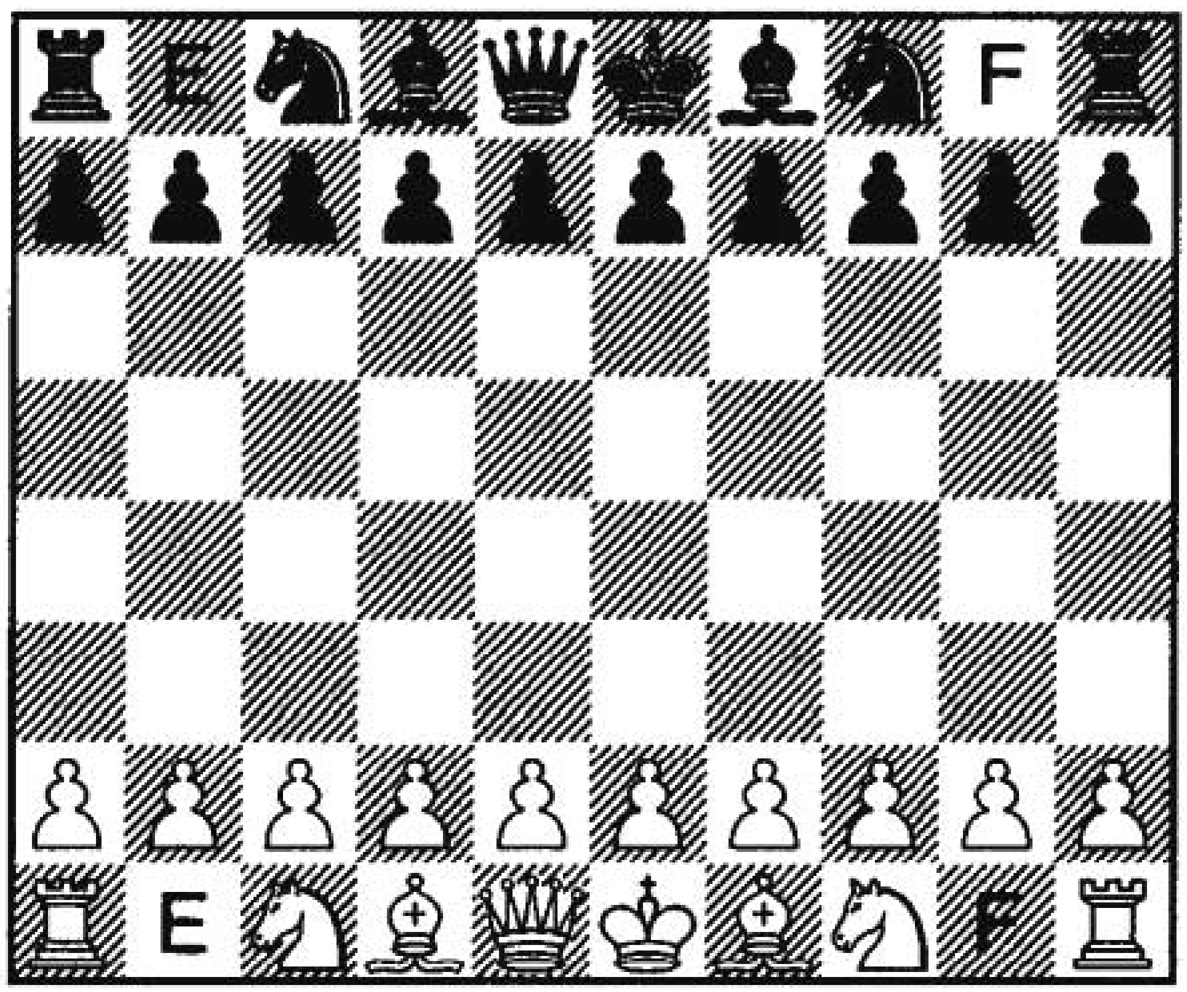


Figura 62. El ajedrez de Carrera.

El ajedrez de Carrera (figura 62) se juega sobre en tablero de 8 × 10, y cada bando tiene dos peones más y dos piezas nuevas: el "centauro" (E), que reúne los movimientos del alfil y el caballo, y el "campeón" (F), a la vez torre y caballo. Por lo demás, las reglas son las del ajedrez convencional, aunque el juego resulta mucho más ágil y agresivo debido a las nuevas piezas.

El ajedrez de Morley

Consiste en añadir dos "pasillos" laterales, de seis casillas cada uno, al tablero convencional (figura 63).

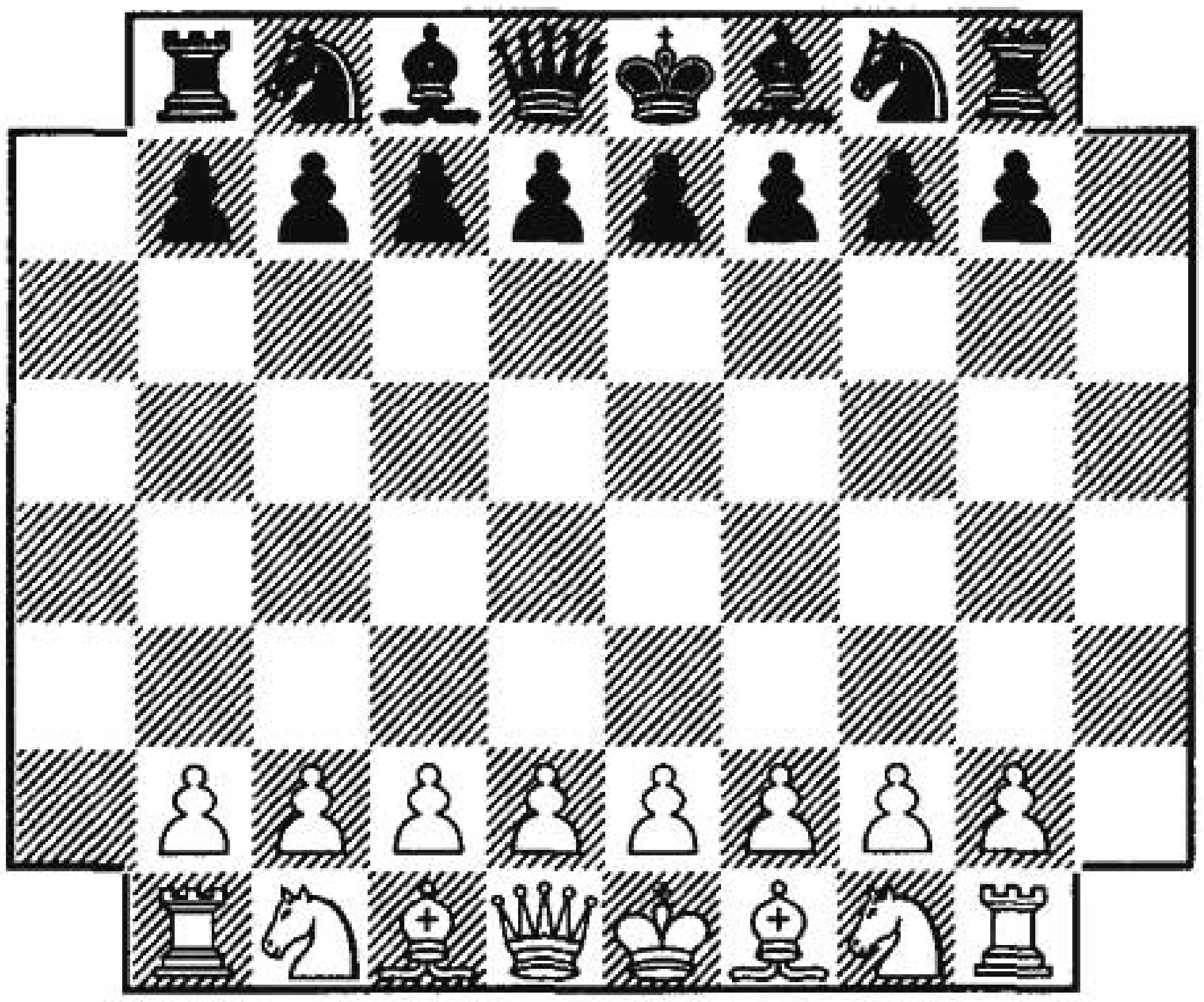


Figura 63. El ajedrez de Morley.

Este desahogo lateral permite interesantes maniobras y modifica sustancialmente los finales de partida.

El ajedrez de Parton

También llamado "ajedrez gemelo", se juega en un tablero de 10 × 10, y cada bando tiene dos reyes y dos damas (y diez peones en lugar de ocho). La disposición inicial de las piezas es la que se ve en la figura 64.

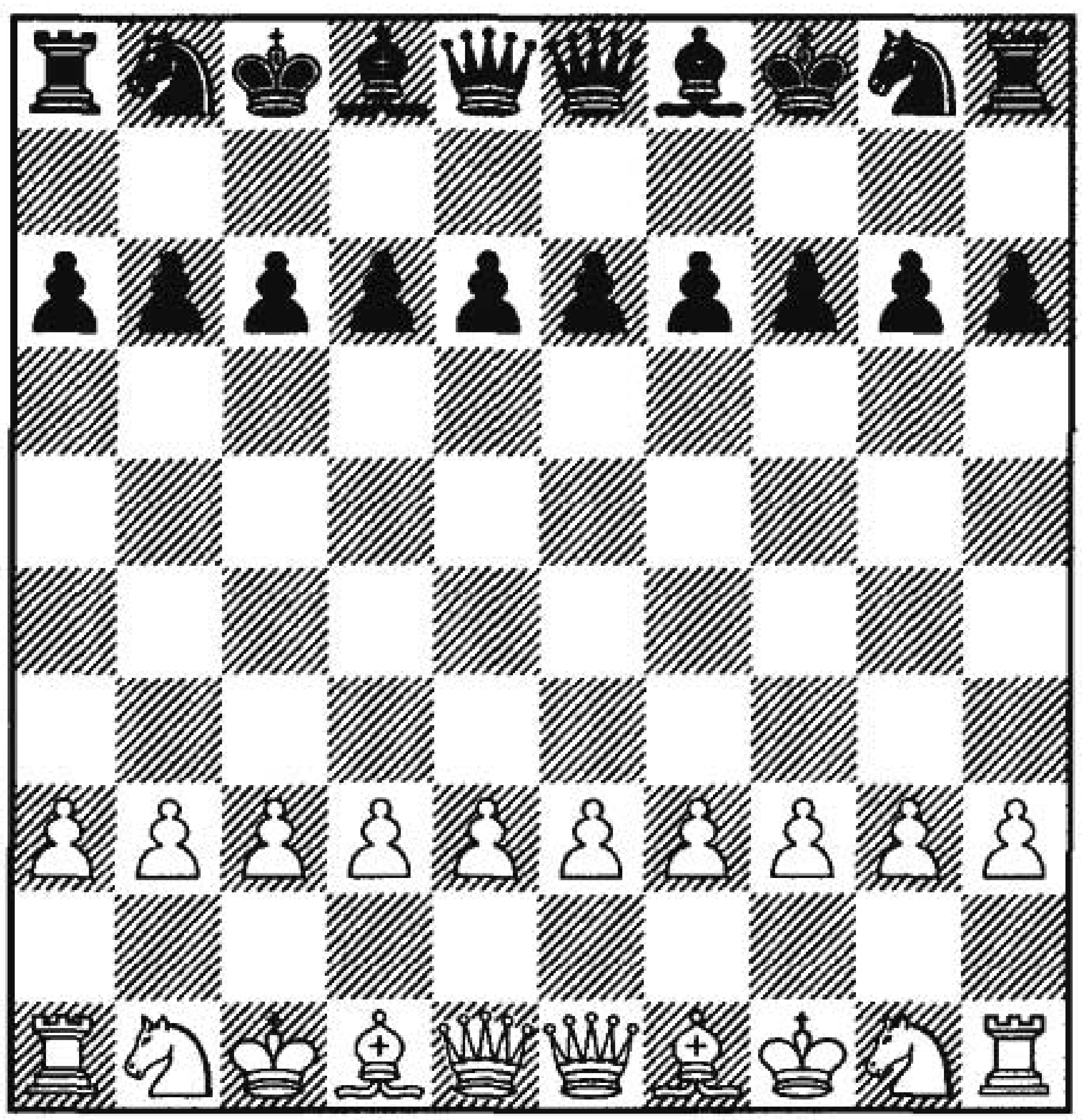


Figura 64. El ajedrez de Parton.

La única modificación de las reglas convencionales es la supresión del enroque. Gana el que da mate a uno de los reyes contrarios, aunque también cabe la variante de tener que capturar ambos reyes para ganar la partida.

El ajedrez a cuatro

Aquí se modifica incluso el número de jugadores, que pasa de dos a cuatro. Se juega en un tablero de 160 casillas con piezas de cuatro colores, dispuestas al comienzo de la partida como se ve en la figura 65.

Se suelen formar dos bandos: blancas y negras contra rojas y verdes. Cuando un rey está en jaque, el otro jugador del mismo bando puede usar su turno para librarlo de la amenaza.

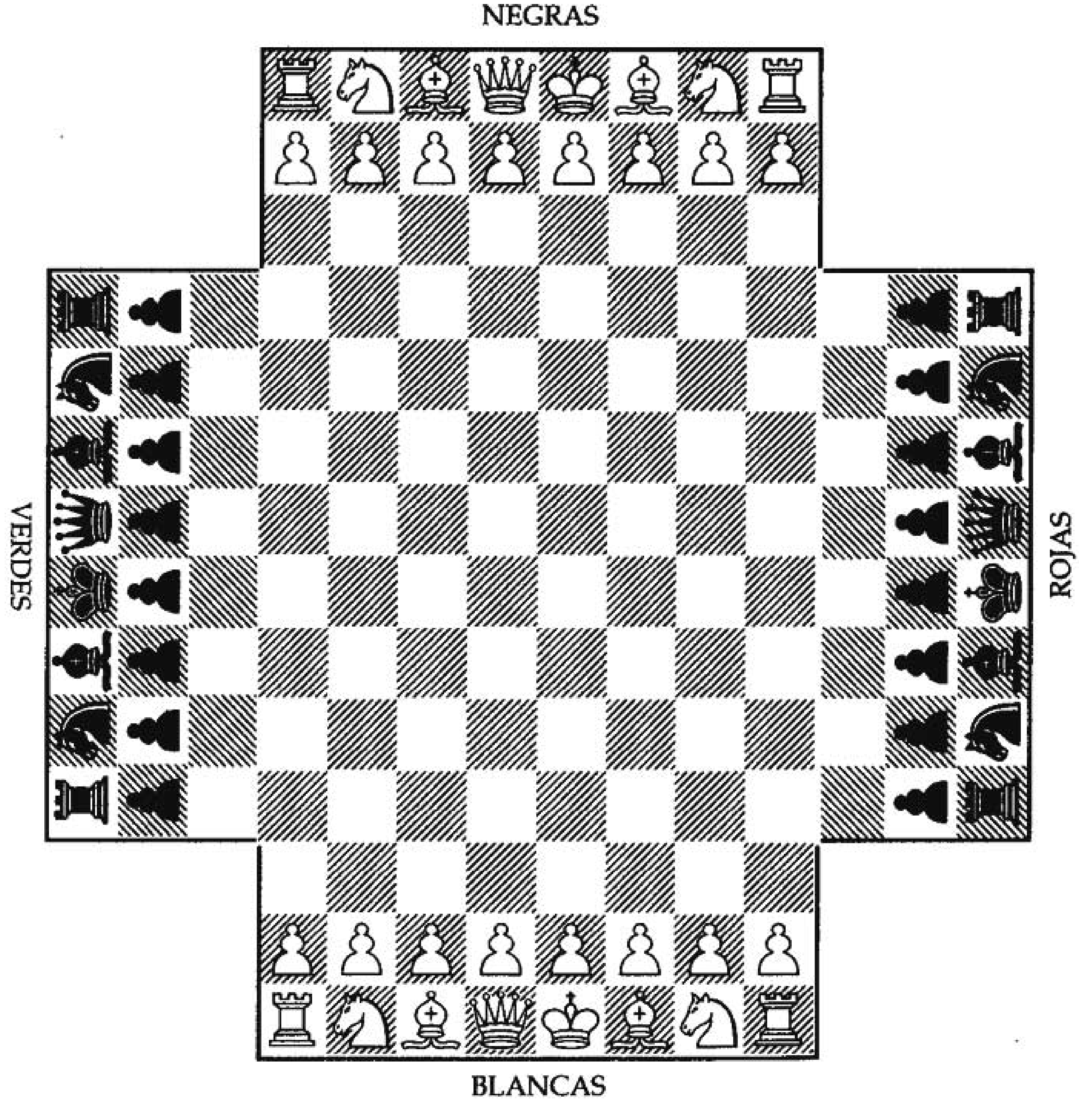


Figura 65. El ajedrez a cuatro.

Soluciones

El ajedrez de Brünner

Como ya hemos visto al hablar del problema de las ocho damas, el número de posibles permutaciones de 8 elementos es 8!, o sea, $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 40.320$. Si todas las piezas fueran distintas, podrían, pues, colocarse de 40.320 maneras; pero como hay dos alfiles, dos caballos y dos torres, y cada miembro de estas tres parejas es idéntico a su compañero, habrá que dividir este número tres veces por 2, con lo que el número de disposiciones iniciales posibles será $40.320 : 8 = 5.040$.

El "mate jaque"

Si las blancas salen con 1 Cc3, desde aquí, en dos jugadas más y por distintos caminos, el caballo puede llegar a d6 o f6 y dar jaque al rey negro. Por tanto, las negras tienen que abrir una vía de escape para su rey; si juegan 1 ..., e5 están perdidas, pues las blancas juegan 2 Cd5, con lo que impiden el movimiento del rey a e7 y en la jugada siguiente le dan jaque moviendo el caballo a c7 o f6. La mejor jugada de las negras es 1 ..., e6, pues de este modo, a la vez que hacen sitio al rey, impiden que el caballo blanco salte a d5.

La segunda jugada de las blancas será entonces 2 Ce4. Ahora las negras tienen que jugar forzosamente 2 ..., Re7, pues de lo contrario el caballo blanco daría jaque en la siguiente jugada saltando a d6 o f6.

Las blancas sacan ahora su otro caballo jugando 3 Cf3 (figura 66) y a las negras, hagan lo que hagan, sólo les quedan dos jugadas de vida. Según lo que hagan las negras, las blancas jugarán 4 Cd4 o 4 Ch4, y las negras no tendrán forma de evitar el jaque en la siguiente jugada.

Hay otras aperturas que garantizan el jaque en cinco jugadas (entre ellas la clásica apertura de peón de rey, 1 e4), pero la que acabamos de ver es la más sencilla y elegante.

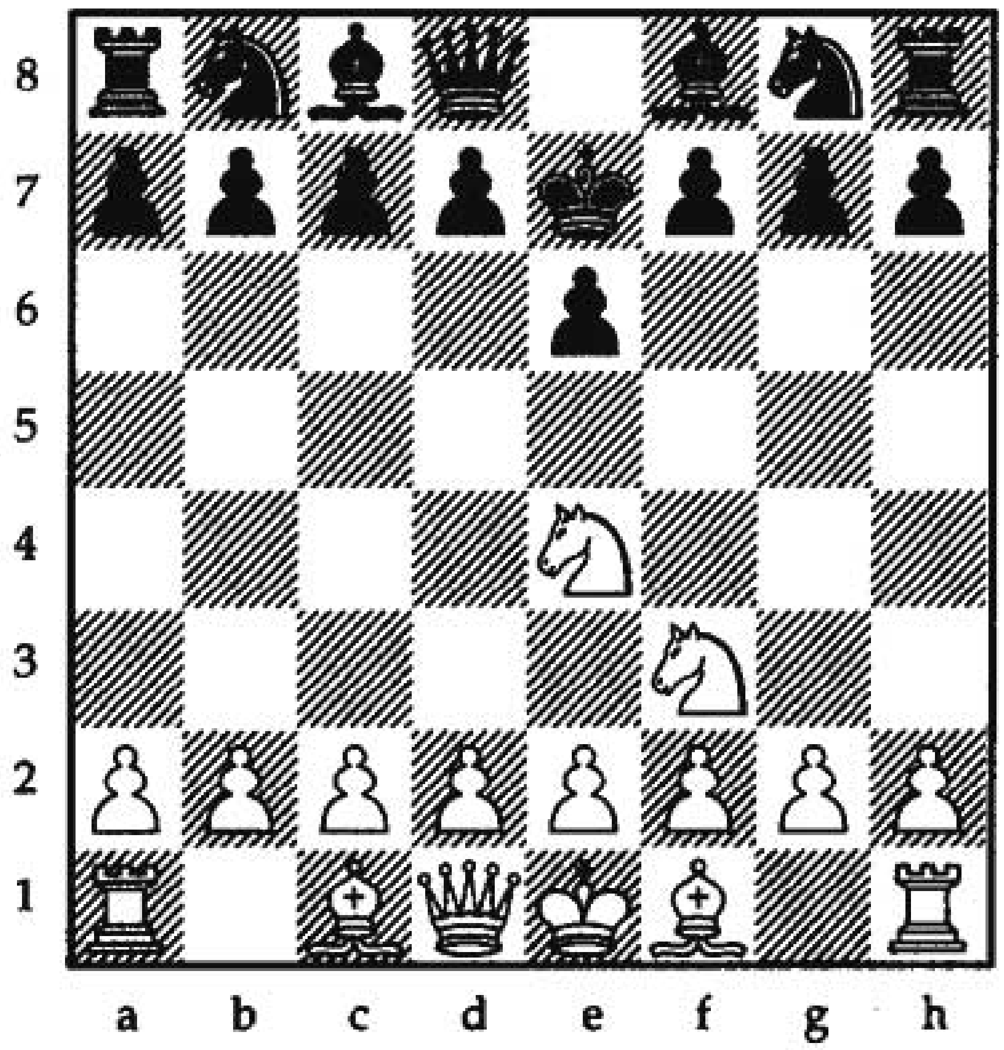


Figura 66. Posición después de 3 Cf3.

8

Problemas atípicos

Como es bien sabido, el problema de ajedrez típico consiste en hallar, dada una posición que podría producirse en el desarrollo de una partida, la jugada o serie de jugadas que dan la victoria a uno de los bandos. Los problemas del tipo "juegan las blancas y dan mate en tres" aparecen a menudo en las secciones de pasatiempos de diarios y revistas, y han dado lugar a numerosas y excelentes recopilaciones, por lo que no tiene mucho interés insistir en el tema, salvo para examinar algunas de sus vertientes más insólitas y curiosas.

Para justificar el título del capítulo, habría que empezar por definir qué es un problema de ajedrez atípico. Por supuesto, son atípicos todos los que, como el de Carroll en *A través del espejo*, se apartan de alguna manera de la ortodoxia ajedrecística, aunque en este caso sería más propio hablar de problemas heterodoxos o de fantasía. Pero hay formas más sutiles de apartarse de la normalidad sin vulnerar las reglas, ya sea partiendo de posiciones "legales" pero inimaginables en una partida real, o proponiendo vías de resolución insólitas, o adornando el problema con elementos externos al juego, por no citar sino algunas posibilidades. Sin ánimo de delimitar un campo por definición indefinible, veamos algunos ejemplos.

Blancas contra turcos

Nada más adecuado que empezar con el más famoso problema de ajedrez de Sam Loyd, relativo a una apócrifa partida del rey Carlos XII de Suecia.

En 1713 el rey Carlos, asediado por los turcos en su campamento de Bender, estaba jugando al ajedrez con uno de sus ministros y, habiendo llegado a la posición de la figura 67, anunció

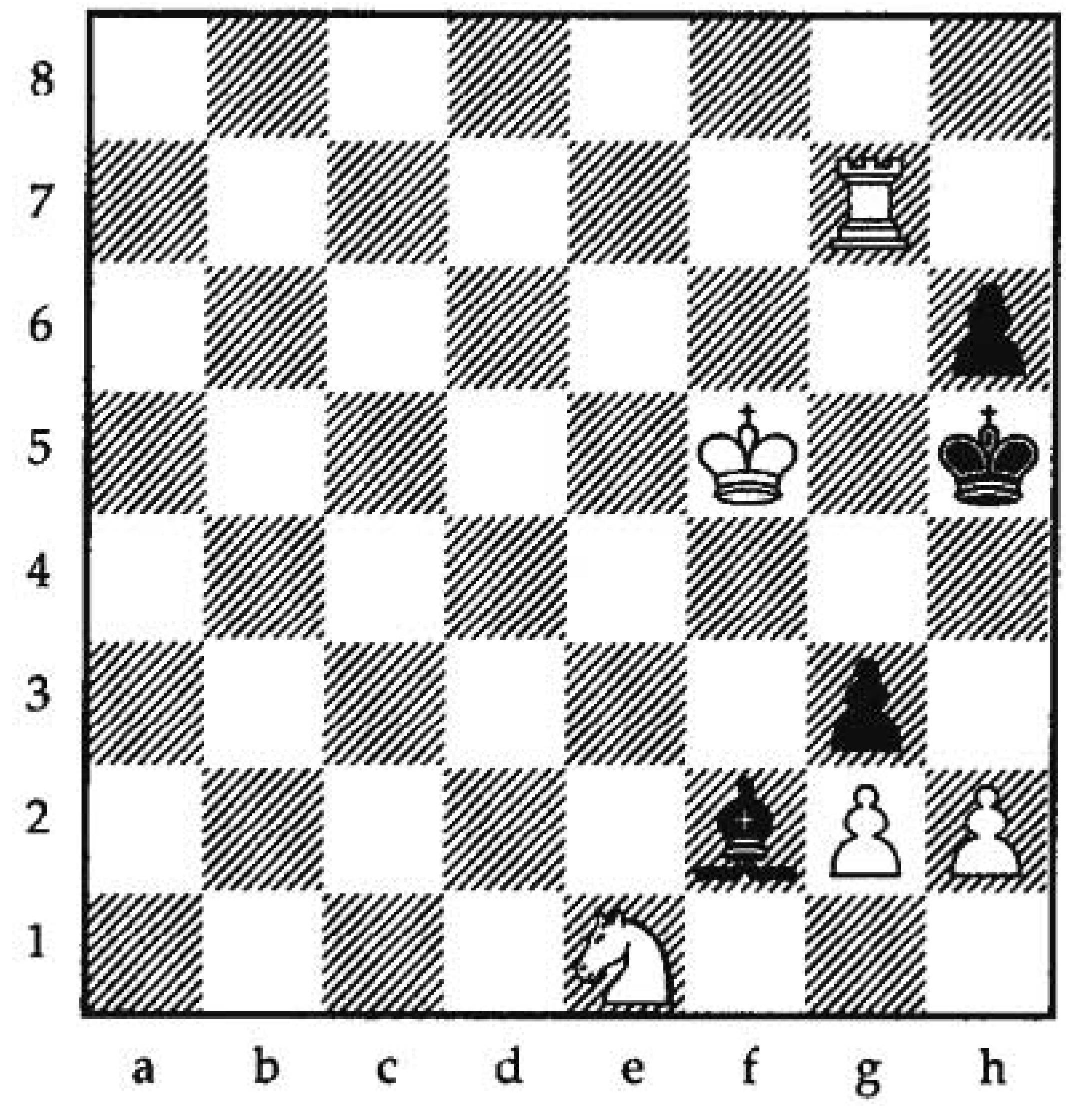


Figura 67. Las blancas juegan y dan mate en tres.

mate en tres (huelga decir que Carlos jugaba con las blancas). En ese momento, una bala enemiga destrozó el caballo blanco; pero Carlos, sin inmutarse, dijo que, a pesar de la baja, podía seguir dando mate, aunque ahora en cuatro jugadas en vez de tres. Sin darle tiempo a mover, otra bala se llevó por delante el peón situado en h2. Y Carlos, imperturbable, comentó: "Está bien, en ese caso tendrá que ser mate en cinco".

Tiempo después, un analista observó que si la primera bala turca hubiera eliminado la torre en lugar del caballo, Carlos hubiera podido anunciar mate en seis jugadas. (Invito al lector a resolver este delicioso problema en cuatro etapas.)

Mejor sin peones

El gran escritor irlandés de relatos fantásticos Lord Dunsany fue también un notable ajedrecista, y compuso algunos problemas tan peculiares como el siguiente: partiendo de la posición de la figura 68, las blancas juegan y dan mate en cuatro. (Por inverosímil que resulte la posición, es teóricamente posible, en el sentido de que se puede llegar a ella respetando las reglas del juego.)

A primera vista, diríase que es un problema aristocratizante (¡propio de un Lord!), pues parece desprenderse de él que los peones son un estorbo, ya que es su ausencia la que permite una rápida victoria... ¿Qué tiene que decir el lector al respecto?

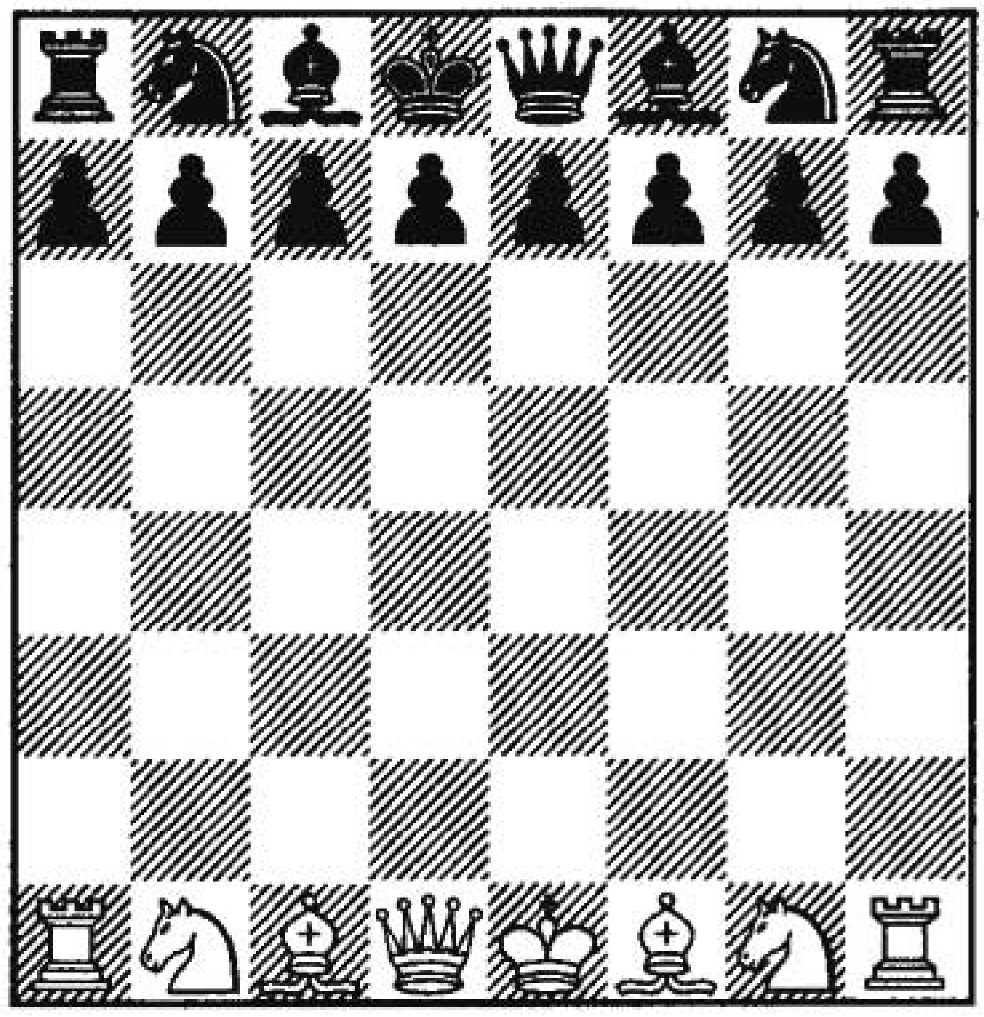


Figura 68. Las blancas juegan y dan mate en cuatro.

Mejor solo que mal acompañado

Si en el caso anterior los peones parecen un obstáculo para su propio bando, pues su ausencia permite a las blancas obtener una rápida victoria, en este desconcertante problema propuesto por Prokop en 1929 (figura 69) son los caballos los que estorban. Pues un rey solo contra rey y dos caballos es tablas, como saben todos los ajedrecistas, y en este caso la presencia de los dos caballos negros hace que las blancas puedan dar mate en cuatro. ¿Cómo es posible?

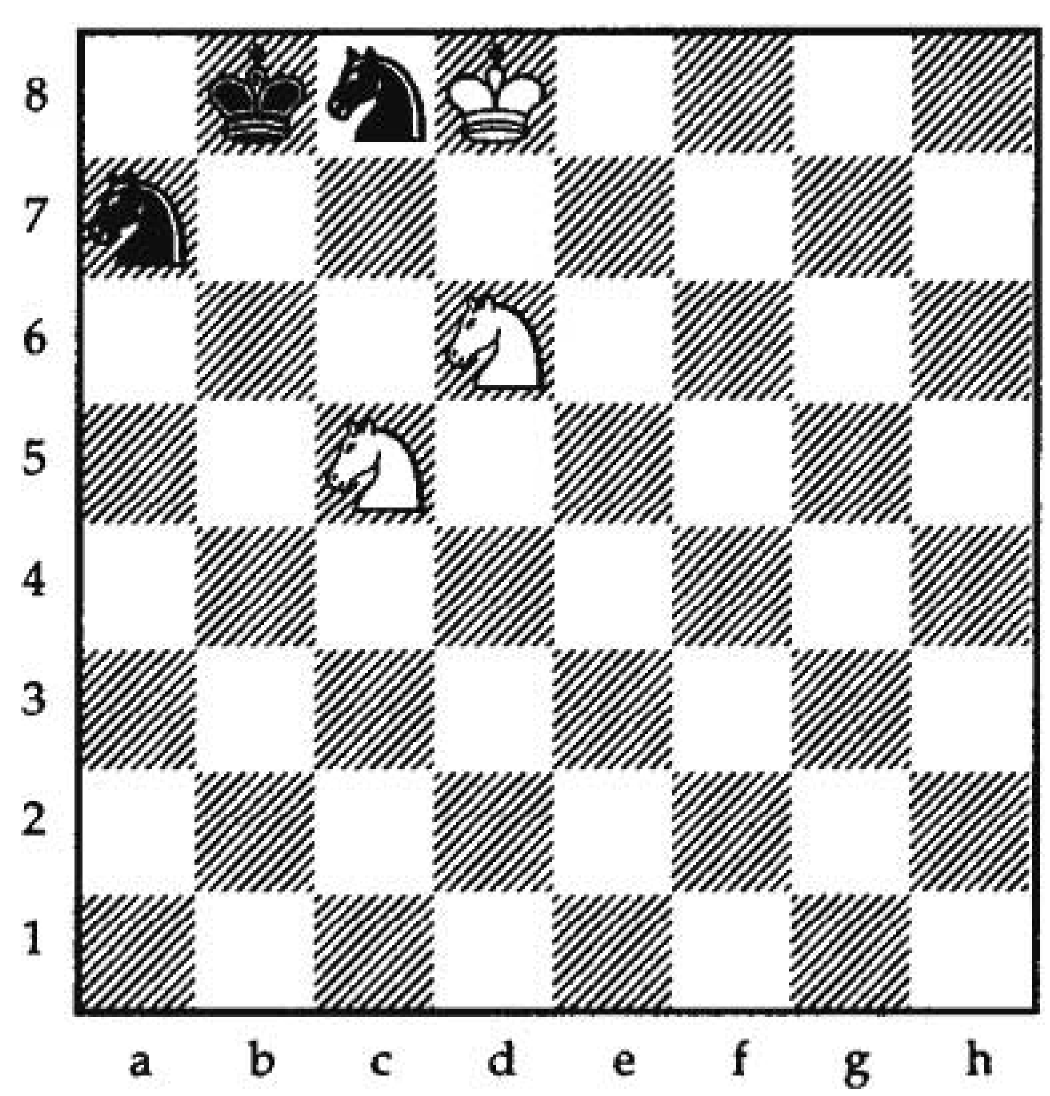


Figura 69. Las blancas juegan y dan mate en cuatro.

Mate en media

En la posición de la figura 70, las blancas dan mate en *media* jugada.

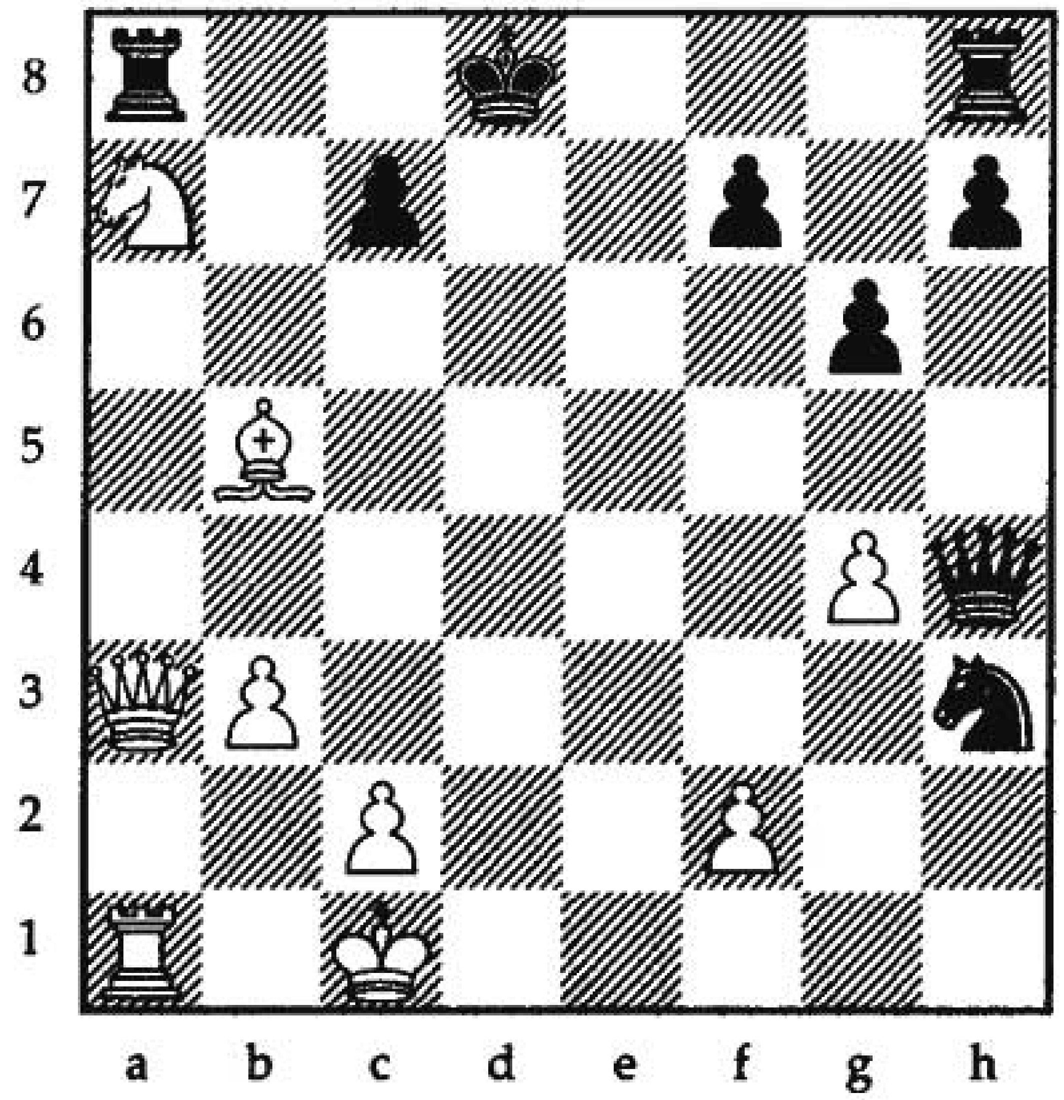


Figura 70. Las blancas juegan y dan mate en media jugada.

El problema más largo

Tras un problema de brevedad insuperable (es imposible dar mate en menos de *media* jugada), parece adecuado hacer referencia al problema de ajedrez más largo jamás compuesto, debido al gran

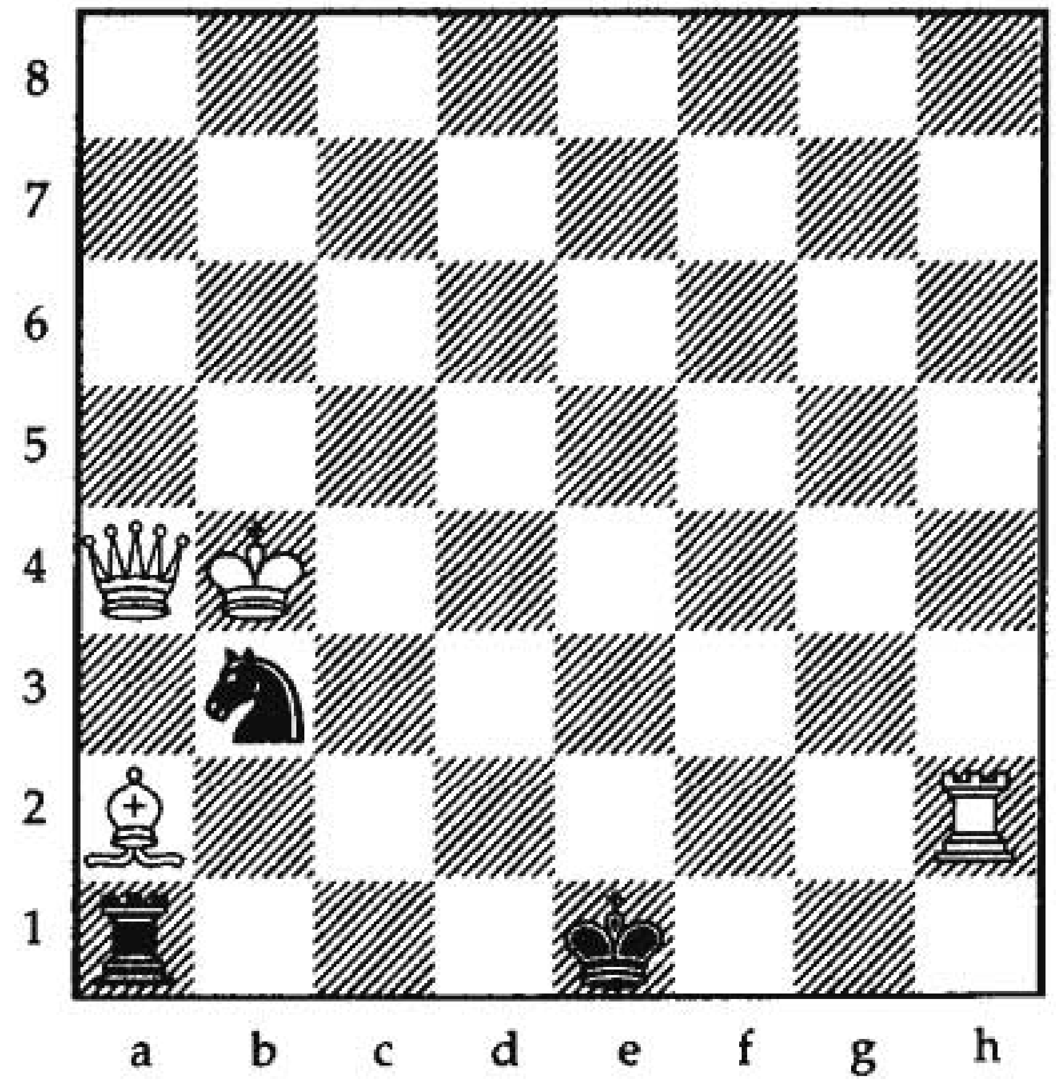


Figura 71. Las blancas juegan y dan mate en 418 jugadas.

especialista W. A. Shinkmann. En la posición de la figura 71, las blancas juegan y dan mate en 418 jugadas. (No se alarme, querido lector: en realidad, hay una solución más breve, descubierta posteriormente, en sólo 298 jugadas.)

Un estudio ejemplar

No se puede terminar un capítulo dedicado a los problemas de ajedrez, por atípicos que sean, sin hacer referencia a los "estudios" o "finales artísticos".

La diferencia formal entre un problema de ajedrez y un estudio es mínima. Los problemas responden a la consabida fórmula "las blancas juegan y dan mate en *n*" (donde *n*, como hemos visto, puede variar entre 1/2 y 418), mientras que los estudios, más generales y ambiciosos, son del tipo "las blancas juegan y ganan" o "las blancas juegan y consiguen tablas"; la forma de ganar o conseguir tablas puede ser forzar un cambio favorable o sustraerse a una fuerte amenaza.

En los estudios, dirigidos de forma más específica a los ajedrecistas propiamente dichos, se pretende, como su nombre indica, "estudiar" a fondo la teoría ajedrecística, mientras que en los problemas se trata, simplemente, de descubrir una maniobra de mate. De todos modos, la frontera entre problemas y estudios no es, ni mucho menos, nítida y, por supuesto, un problema puede ser más complejo y profundo que un estudio. Por otra parte, los estudios proceden a menudo de partidas reales, mientras que los problemas casi siempre se componen ensayando sobre el tablero disposiciones elegantes y combinaciones espectaculares.

Para ilustrar lo dicho, veamos a continuación un famoso estudio del siglo pasado, nacido de una partida real y fruto de una labor colectiva rematada por el abate Fernando Saavedra.

En 1875 Fanton y Potter, dos conocidos ajedrecistas de la época, jugaron en un club londinense una partida que dio lugar a la posición de la figura 72. Las negras parecen perdidas, y la partida continuó así: 1 Txh3, Rxh3; 2 Rc6, Txa5; 3 b7, Ta6+. Pero, llegados a este punto, Fanton observó que a 4 Rc7 sigue 4 ..., Ta7, y a 4 Rb6 sigue 4 ..., Ta1, por lo que, muy disgustado, aceptó tablas.

Este final de partida llamó la atención del maestro polaco Hermann Zukertort, que descubrió que las blancas se habían precipitado al pactar tablas, pues podían haber ganado jugando: 4 Rc5, Ta5+; 5 Rc4, Ta4+; 6 R3b, Ta1; 7 Rb2.

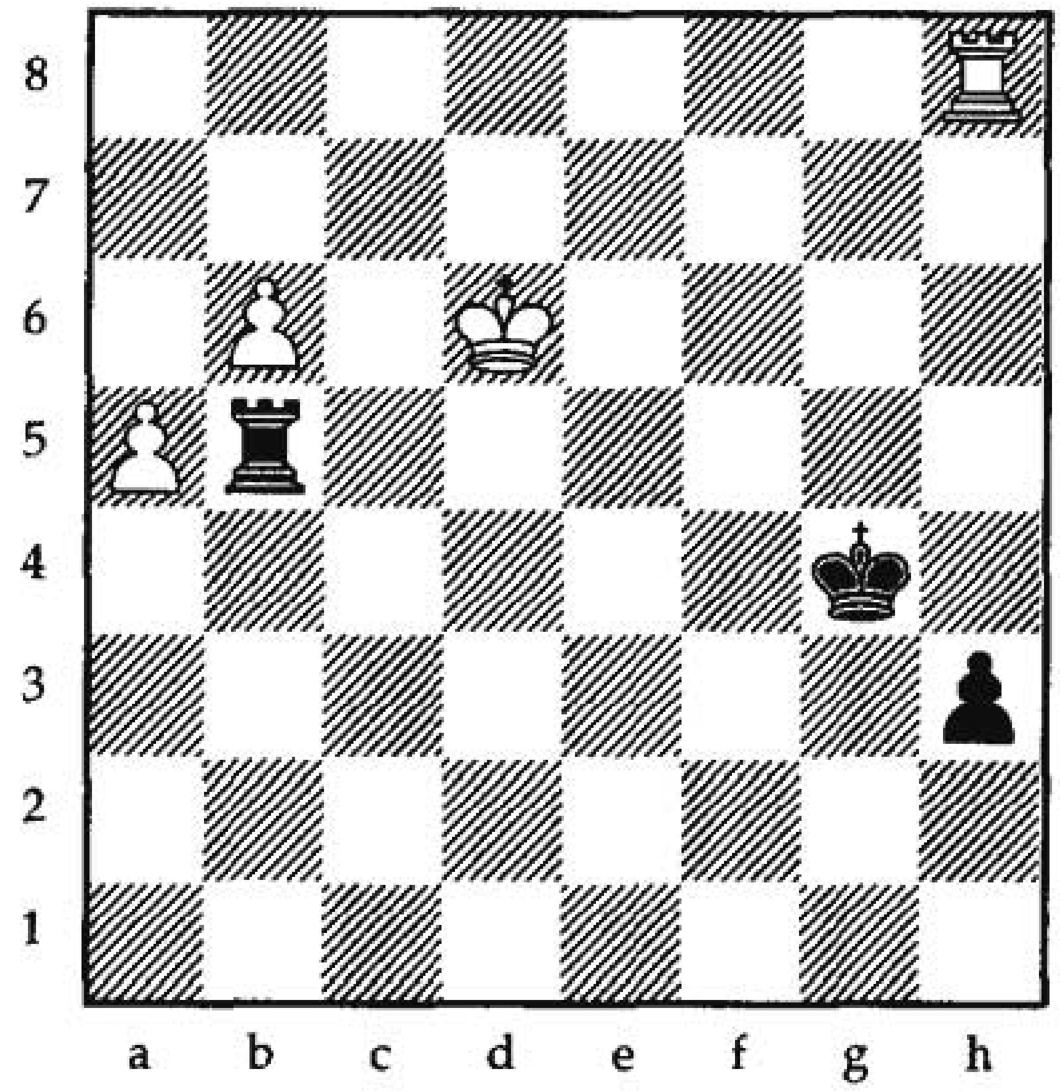


Figura 72. Las blancas juegan y…

Veinte años después, el ajedrecista francés J. Barbier publicó un estudio basado en este final: partiendo de la posición de la figura 73, juegan las blancas y las negras consiguen tablas.

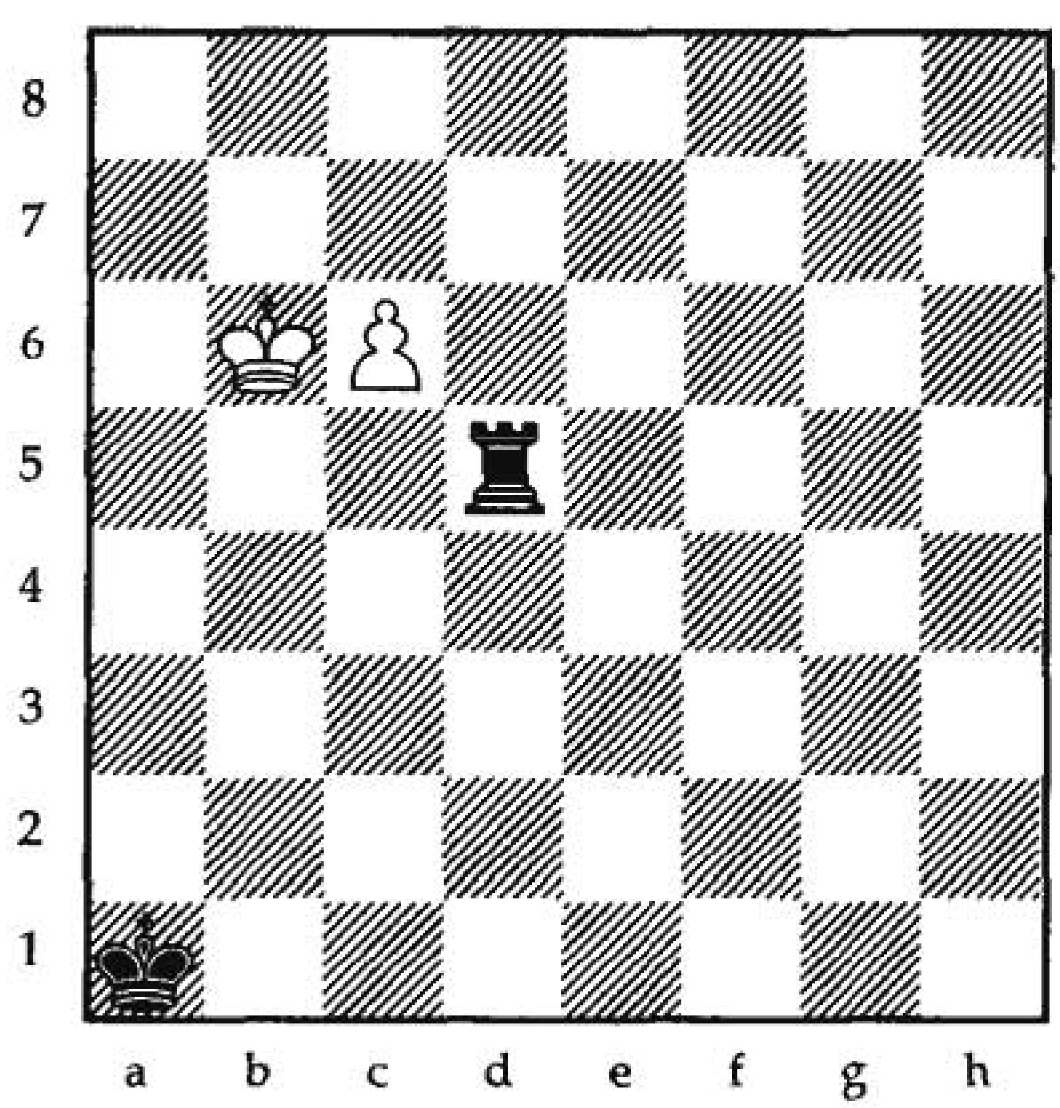


Figura 73. Las blancas juegan y ganan.

El desarrollo, análogo al de Zukertort, es el siguiente: 1 c7, Td6+; 2 Rb5, Td5+; 3 Rb4, Td4+; 4 Rb3, Td3+; 5 Rc2, Td4!; 6 c8=D, Tc4+!, lo que obliga a las blancas a comer la torre con la dama, ahogando al rey negro.

Pero el abate Fernando Saavedra, al examinar este estudio, descubrió que, en realidad, las blancas pueden ganar modificando sutilmente su 6ª jugada. En honor a su feliz hallazgo, este famoso final artístico se conoce como "estudio Saavedra", aunque debería llamarse "Zukertort-Barbier-Saavedra", o mejor aún, "Fanton-Potter-Zukertort-Barbier-Saavedra". (¿Podría el lector repetir la hazaña del abate y hallar la sutil 6ª jugada de las blancas que les da la victoria?)

Soluciones

Blancas contra turcos

Las blancas dan mate en tres tomando el peón con la torre. Si el alfil negro toma la torre, el caballo blanco salta a f3, las negras tienen que mover el alfil y las blancas dan mate moviendo el peón a g4. Si las negras toman el caballo en lugar de la torre, las blancas mueven la torre a h3 y dan jaque; las negras cubren con el alfil y las blancas mueven el peón a g4.

Tras la desaparición del caballo, las blancas dan mate en cuatro tomando el peón negro con el suyo. Si las negras llevan el alfil a e3, las blancas mueven la torre a g4. Las negras llevan el alfil a g5 y las blancas dan jaque llevando la torre a h4. El alfil toma la torre y de nuevo el peón da mate en g4.

Tras la destrucción del peón de h2 por la segunda bala, las blancas dan mate en cinco llevando la torre a b7. Si las negras llevan su alfil a e3, sigue: 2 Tb1, Ag5; 3 Th1+, Ah4; 4 Th2, gxh2; 5 g4++. Si las negras, en su primera jugada, llevan el alfil a g1, sigue: 2 Tb1, Ah2; 3 Te1, Rh4; 4 Rg6, y, hagan lo que hagan las negras, en la siguiente jugada las blancas dan mate llevando su torre a e4.

Si la primera bala hubiera eliminado la torre en lugar del caballo, las blancas habrían dado mate en seis llevando el caballo a f3. La mejor respuesta de las negras es llevar el alfil a e1, y sigue: 2 Cxe1, Rh4; 3 h3, Rh5; 4 Cd3, Rh4; 5 Cf4, h5; 6 Cg6++.

Mejor sin peones

El rey y la dama negros han intercambiado sus posiciones iniciales, lo cual, obviamente, sólo es posible si se han movido los peones negros. Pero como los peones no pueden retroceder, la única conclusión posible es que los peones negros han alcanzado su insólita posición actual partiendo del lado inferior del tablero. En tales circunstancias, las blancas pueden dar mate en cuatro fácilmente con su caballo de la derecha.

En su primera jugada, las blancas ponen su caballo delante del rey. Si las negras contestan llevando el caballo de la izquierda a la columna de la torre, las blancas dan mate al inmovilizado rey negro con otros dos saltos del caballo. Si las negras mueven su caballo a la columna del alfil en lugar de a la de la torre, retrasan el mate una jugada, pues en su siguiente movimiento podrá obstaculizar el jaque del caballo blanco y tendrá que ser capturado por la dama, pero el desenlace es el mismo.

Mejor solo que mal acompañado

1 Cd7+, Ra8; 2 Rc7, Cc6; 3 Cxc8, y a cualquier jugada de las negras sigue 4 Cd-b6++.

Mate en media

Las blancas acaban de desplazar su rey a c1 para enrocar; con otra *media* jugada llevan la torre a d1 para consumar el enroque y dan jaque mate.

El problema más largo

Este famoso problema aparece citado en diversas fuentes, pero en ninguna de las que conozco viene la solución; si algún lector la tiene (¡o la encuentra por sí mismo!), le agradeceré que me la envíe.

Un estudio ejemplar

Las blancas ganan convirtiendo el peón en torre en lugar de convertirlo en dama; de este modo, al comer la torre negra ya no ahogan al rey.

9

Ajedrez retrógrado

Los problemas de ajedrez convencionales nos invitan, a partir de una posición dada, a averiguar el ulterior desarrollo de la partida (el desarrollo óptimo, se entiende, es decir, el que lleva a la victoria en el menor número de jugadas). Pero puede ser igualmente interesante, o incluso más, deducir no el futuro sino el pasado de una posición, y eso es lo que hace el análisis retrospectivo.

Este tipo de análisis "hacia atrás" se desarrolló en Europa en los años veinte, pero el gran especialista en el tema es el lógico estadounidense Raymond Smullyan, que le ha dedicado dos libros fascinantes: *Problemas de ajedrez para Sherlock Holmes* y *Juegos de ajedrez y los misteriosos caballos de Arabia.*[1]

La elección de Holmes como protagonista de un libro de "ajedrez retrógrado" no podía ser más acertada, pues la especialidad del gran detective es precisamente la deducción, a partir de una situación dada, de las "piezas" humanas que han participado en la acción y los "movimientos" efectuados. Por otra parte, el famoso lema de Holmes: "Cuando se ha eliminado lo imposible, lo que queda, por improbable que sea, tiene que ser la verdad", expresa a la perfección el espíritu y la técnica del análisis retrospectivo, que consiste, básicamente, en deducir las jugadas que han sido hechas por eliminación de las imposibles. Pero dejemos que nos lo explique el propio Holmes mediante una de sus habituales charlas con Watson. El primer capítulo del libro de Smullyan comienza así:

> —¿Qué le parece si nos damos una vuelta por el club de ajedrez?— me propuso Holmes una tarde.

1. Publicados ambos en esta misma colección.

—¡Vaya, Holmes! —comenté asombrado—. No sabía que fuera aficionado al ajedrez.
—No soy un aficionado convencional —rio Holmes—. No me interesa demasiado el ajedrez como juego; de hecho, no me interesan mucho los juegos en general.
—¿Y qué otra cosa es el ajedrez sino un juego?— pregunté desconcertado.
Holmes se puso serio.
—Hay situaciones en el ajedrez, Watson, que desafían la mente analítica con tanta intensidad como cualquier otra de la vida real. Es más, las he hallado de gran valor para desarrollar esos poderes de pura deducción que son esenciales para desenvolverse en la vida.
—¿Podría ser más explícito? —le rogué.
—Lo que quiero decir, Watson, es lo siguiente: en una partida normal, ambos jugadores están concentrados exclusivamente en el futuro. Cada jugador intenta controlar el futuro para mejorar su propia posición. Y también en la mayoría de los problemas de ajedrez, en los que las blancas han de mover y dar mate en un determinado número de jugadas, se pone todo el énfasis en el control del futuro. Y aunque los buenos problemas de este tipo me inspiran el mayor respeto, pues algunos son auténticas obras de arte, la clase de estrategia que lleva a su resolución no me es de gran utilidad en mi trabajo.
—Me temo que no acabo de entenderle —dije.
—Hay situaciones en el tablero de ajedrez —explicó Holmes— que no tienen interés para el jugador como tal, es decir, que son poco interesantes con respecto a las jugadas futuras, pero que resultan interesantísimas por las pistas que suministran sobre lo que sucedió en el pasado.

Veamos un ejemplo relativamente sencillo. La posición de la figura 74 tiene escaso (por no decir nulo) interés desde el punto de vista ajedrecístico convencional, pues la victoria blanca es evidente si es su turno, y si juegan las negras es un típico caso de tablas por ahogado. Pero esta posición de futuro tan poco interesante adquiere un enigmático pasado que desafía la imaginación en cuanto nos enteramos de que la partida no es tablas. ¿Cuál fue la última jugada de las negras? ¿Y la de las blancas?

Y si Holmes es el más adecuado protagonista de un libro de ajedrez retrógrado, el marco y los personajes de *Las mil y una noches* constituyen una elección igualmente acertada. Harún-al-Raschid, que, por cierto, fue un gran aficionado al ajedrez (es famoso el magnífico juego tallado en marfil que regaló a Carlomagno), es un inmejorable "rey blanco", y el encantador ambiente de los cuentos árabes se presta a todo tipo de mágicas sutilezas a la hora de plantear los problemas.

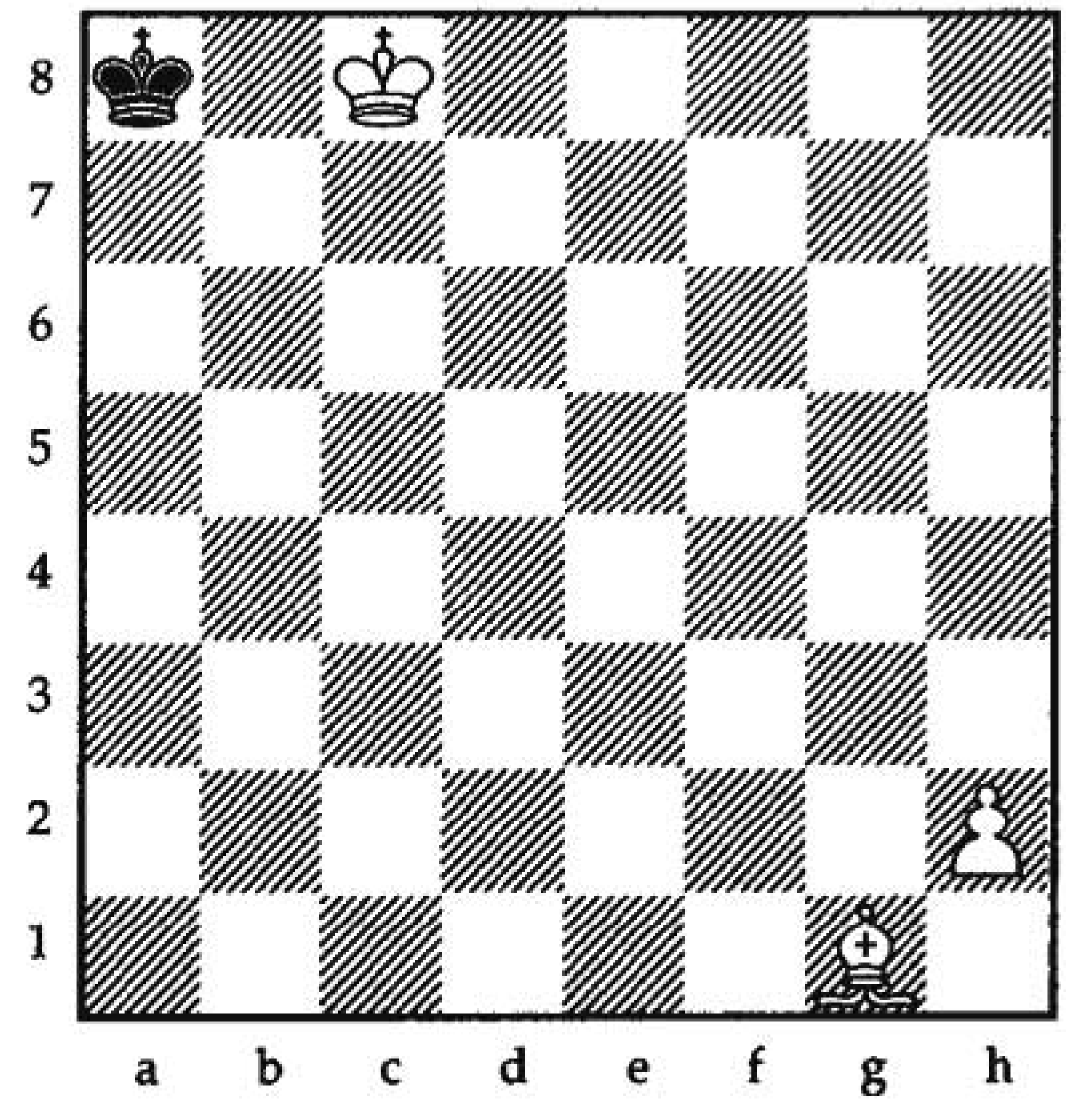


Figura 74.

He aquí un delicioso ejemplo: en la figura 75, Harún (el rey blanco) se ha vuelto invisible. ¿En qué casilla está?

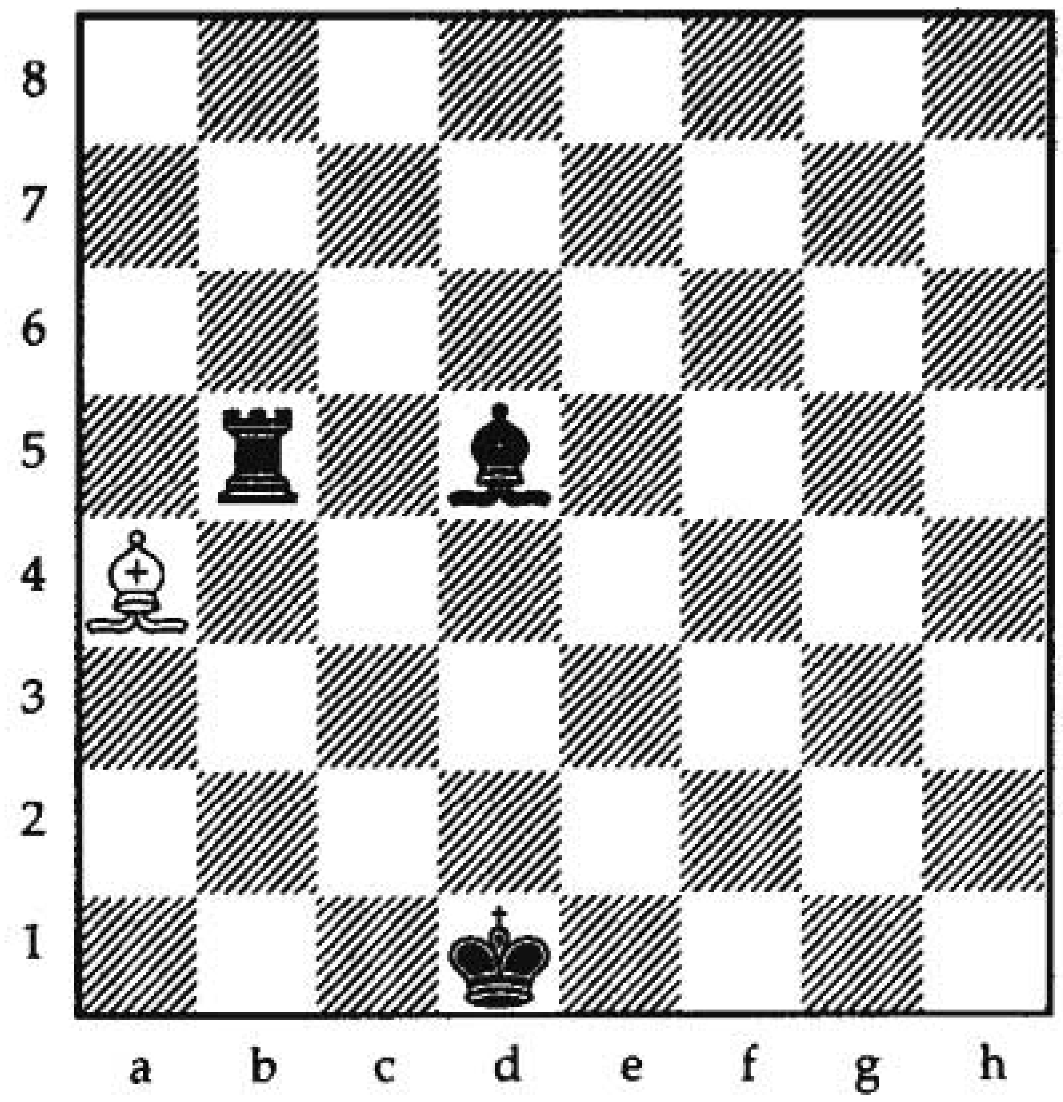


Figura 75.

Problemas afines

Hay algunos problemas de ajedrez no convencionales que, aunque a primera vista no parezcan retrógrados, lo son en la medida en que requieren una cierta dosis de análisis retrospectivo para su resolución. El siguiente ejemplo, comentado por Martin Gardner en su libro *Viajes por el tiempo*, fue publicado en *The Problemist* en 1974, y su autor es G. Husserl.

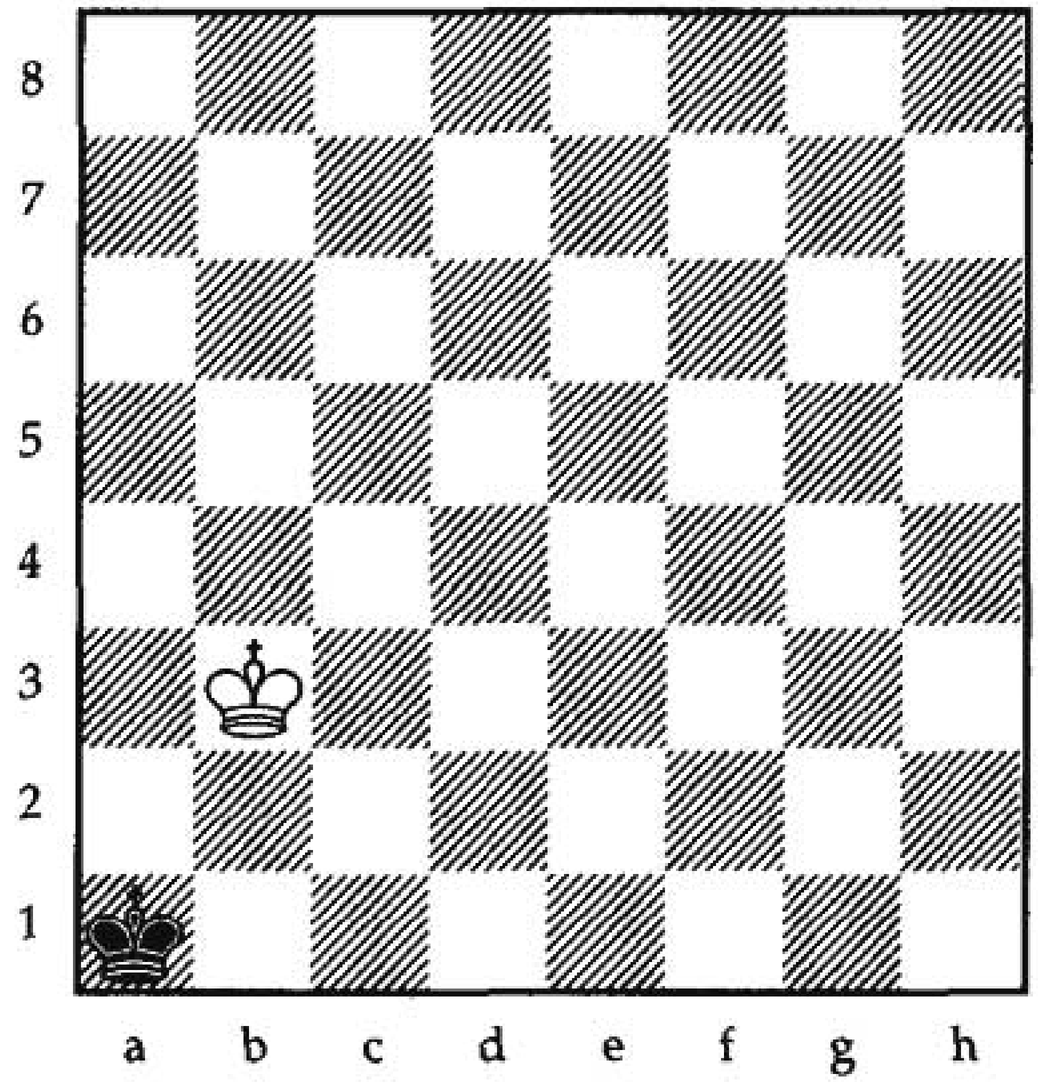


Figura 76.

Los dos reyes están solos en el tablero, tal como se indica en la figura 76. Se pide añadir una tercera pieza de forma que la situación creada cumpla las siguientes condiciones:

1. Ninguno de los reyes está en jaque.
2. La posición es alcanzable como desarrollo de una partida normal acorde con las reglas del juego.
3. Ninguno de los bandos puede jugar lícitamente.

¿Qué pieza hay que añadir y dónde debe colocarse?

A primera vista no parece un problema de ajedrez retrógrado; sin embargo, obsérvese que la petición de añadir una pieza equivale a decir, como en el problema de Harún, que la pieza ya está en el tablero y es invisible. Y, como en el caso anterior, el análisis retrospectivo es fundamental para resolver el problema.

Soluciones

La última jugada

Es el turno de las blancas (si fuera el de las negras, sería tablas por ahogado), luego las negras han efectuado la última jugada. Y puesto que el rey negro está en a8, antes de este último movimiento tenía que estar en alguna de las casillas contiguas. No podía estar en b7 ni en b8, pues los dos reyes no pueden ocupar en ningún momento casillas contiguas. Por lo tanto, sólo podía estar en a7, de la que ha tenido que marcharse al darle jaque el alfil... lo cual parece imposible pues, al estar ocupada la casilla h2 por un peón, el alfil no ha podido llegar a la diagonal de jaque en la jugada inmediatamente anterior. La única explicación posible es que haya sido un jaque a la descubierta: había una pieza blanca entre el alfil y el rey, y las blancas han dado jaque quitando esa pieza. Pero entonces, ¿dónde está ahora? Sólo hay una posibilidad: el rey negro, a la vez que se sustraía al jaque del alfil, la ha capturado en a8. Luego había un caballo blanco en b6 cuando el rey negro estaba en a7. Las blancas movieron su caballo a a8, dando jaque a la descubierta, y el rey negro comió el caballo.

El rey invisible

La situación es aparentemente imposible, pues el rey blanco no puede estar en c2, bloqueando el jaque del alfil blanco al rey negro, ni dicho jaque puede haberse producido por desplazamiento del alfil a a4, ya que el acceso está bloqueado por la torre. La única posibilidad es que el rey blanco estuviera en b3 y se desplazara en la última jugada anterior a la posición que vemos (es un decir) en el tablero; pero la casilla b3 está a tiro tanto del alfil como de la torre, y las negras no pueden haber dado jaque con dos piezas a la vez... ¿o sí? Sí, sí que pueden, aunque a primera vista parezca imposible. El rey blanco estaba, efectivamente, en b3, y había un peón negro en b4 y un peón blanco en c2. Procedente de alguna casilla de la diagonal principal, el alfil mueve a d5 y da jaque; entonces las blancas adelantan su peón de c2 a c4, tapando el jaque; el peón negro come al paso al peón blanco, y de este modo da un doble jaque a la descubierta. Y como el peón negro ya no está, eso significa que se lo acaba de comer el invisible rey blanco que, por lo tanto, está en c3.

La única solución que cumple todas las condiciones es poner un alfil blanco en a2 (figura 77).

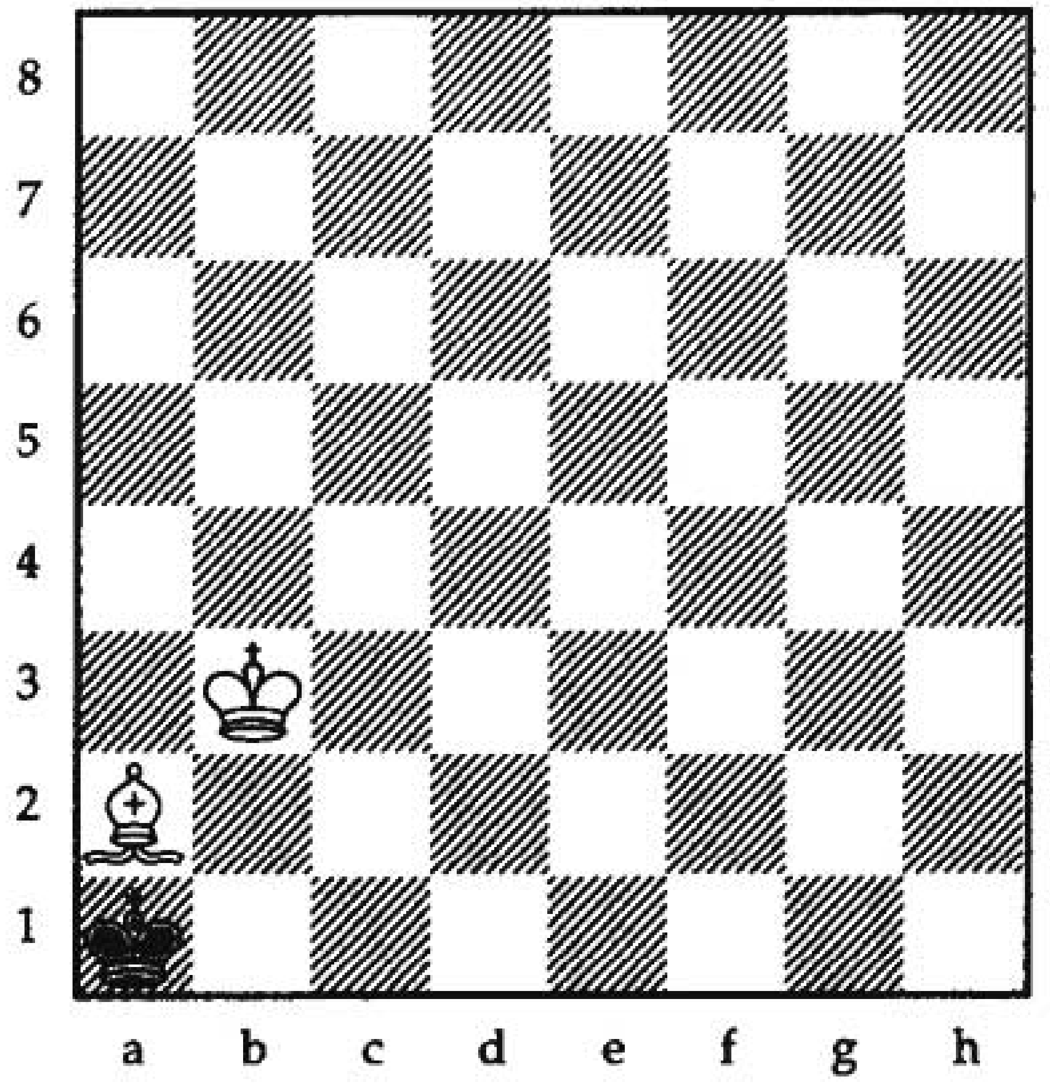


Figura 77.

El rey negro no puede mover, pues está ahogado, y las blancas no pueden mover lícitamente, pues no es su turno, como se desprende de un sencillo análisis retrospectivo: si fuera el turno de las blancas, el rey negro acabaría de llegar a a1 procedente de b2, pero eso a su vez exigiría que el alfil blanco hubiera llegado a a2 en el movimiento inmediatamente anterior, lo cual es imposible porque el rey blanco bloquea el acceso a dicha casilla.

10

Tareas

En los problemas de ajedrez convencionales y en los estudios o "finales artísticos" se parte de una posición propia de una partida de ajedrez verosímil y se pide hallar la estrategia ganadora. Por otra parte, el ajedrez se presta, como hemos visto, a plantear todo tipo de problemas que, aunque basados en las reglas del juego, no tienen nada que ver con la partida convencional (por ejemplo, hallar todos los caminos por los que un rey puede ir de su casilla a la del rey contrario).

A medio camino entre los problemas convencionales y los totalmente ajenos al juego del ajedrez como tal, están las "tareas". Una "tarea" (*task*, en inglés) es un problema relacionado con el desarrollo normal del juego, pero que no consiste en hallar la estrategia ganadora. A menudo se trata de lograr un determinado resultado en el menor número de movimientos (otro paralelismo con los problemas convencionales, en los que se busca el mate más rápido posible).

En capítulos anteriores hemos visto algunas tareas de este tipo, como hallar la partida de ajedrez más corta posible o eliminar todas las piezas en el menor número de jugadas. Veamos algunas más:

¿Cuál es la partida más breve que puede terminar en tablas? (Una pista: las tablas se consiguen por jaque continuo.)

¿Cuál es la partida más breve que termina en tablas por ahogado? (Una pista: las blancas ahogan al rey negro en la décima jugada.)

Si al lector le parecen difíciles estas tareas, puede consolarse viendo en la figura 78 la consecución de una mucho más ardua: un doble ahogo en 25 jugadas, conseguido por G. R. Reichelm en 1882. En esta bella posición simétrica ninguno de los bandos puede mover pieza alguna.

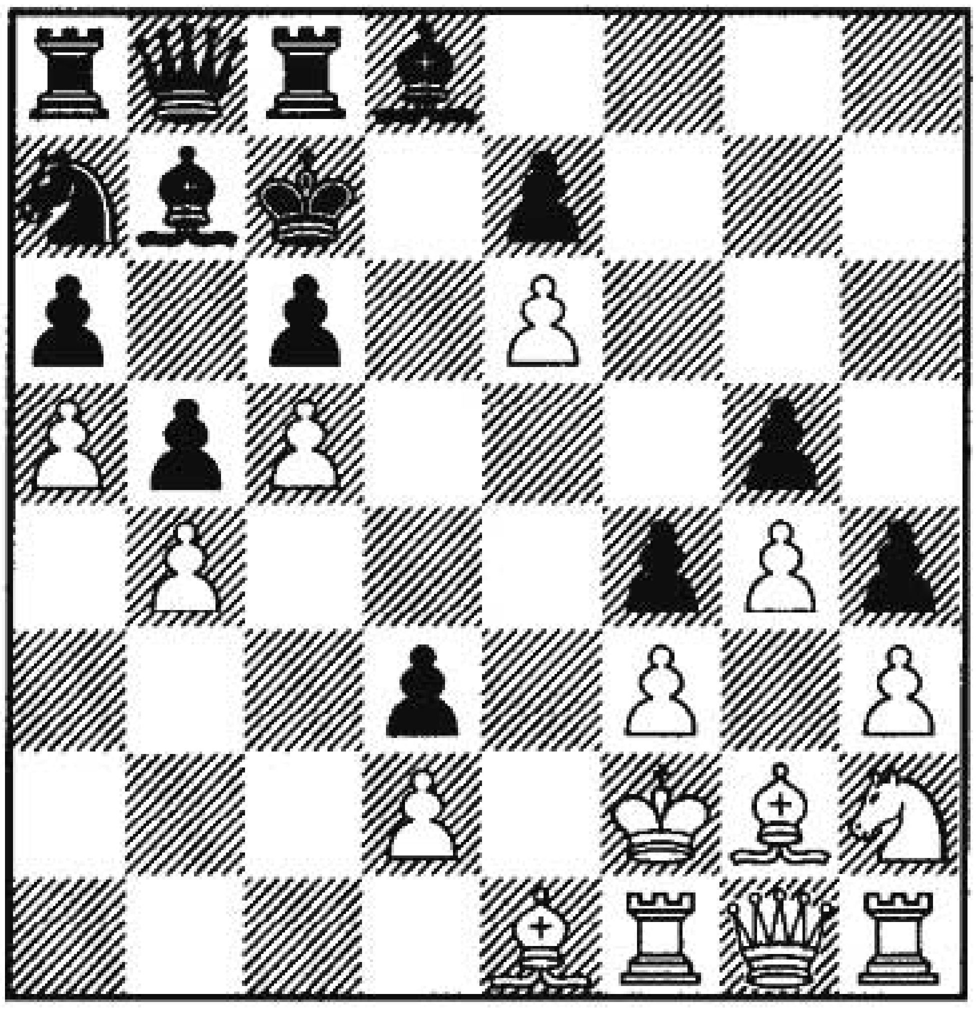


Figura 78.

Obsérvese que hay 30 piezas en el tablero (sólo faltan un caballo blanco y uno negro), lo que hace más meritorio el doble colapso total.

Tareas de construcción

Una "tarea de construcción" (*construction task*) consiste en situar las piezas (todas o algunas, de un bando o de ambos) de forma que se cumpla alguna condición, como que el número de jugadas o de capturas posibles sea máximo o mínimo.

Una de las tareas de construcción más conocidas consiste en colocar en el tablero las 16 piezas blancas de forma que puedan efectuar el máximo número de jugadas. La solución, debida a N. Petrovic, se ve en la figura 79. ¿Cuántas jugadas diferentes se puede efectuar? (Cuidado, lector, es fácil quedarse corto en la cuenta por olvidar un pequeño detalle.)

Si prescindimos de los peones y sólo colocamos las piezas propiamente dichas, el máximo número de jugadas posible es 100, según demostró M. Bezzel en 1848. Pero, ¿cuál será el número mínimo? (Invito al lector a colocar en el tablero las ocho piezas blancas de forma que puedan efectuar el menor número de movimientos posible.)

Siguiendo con los mínimos, los 32 trebejos pueden situarse en una posición lícita de forma que sólo puedan efectuarse dos jugadas (de acuerdo con las reglas del ajedrez, no se cuenta como

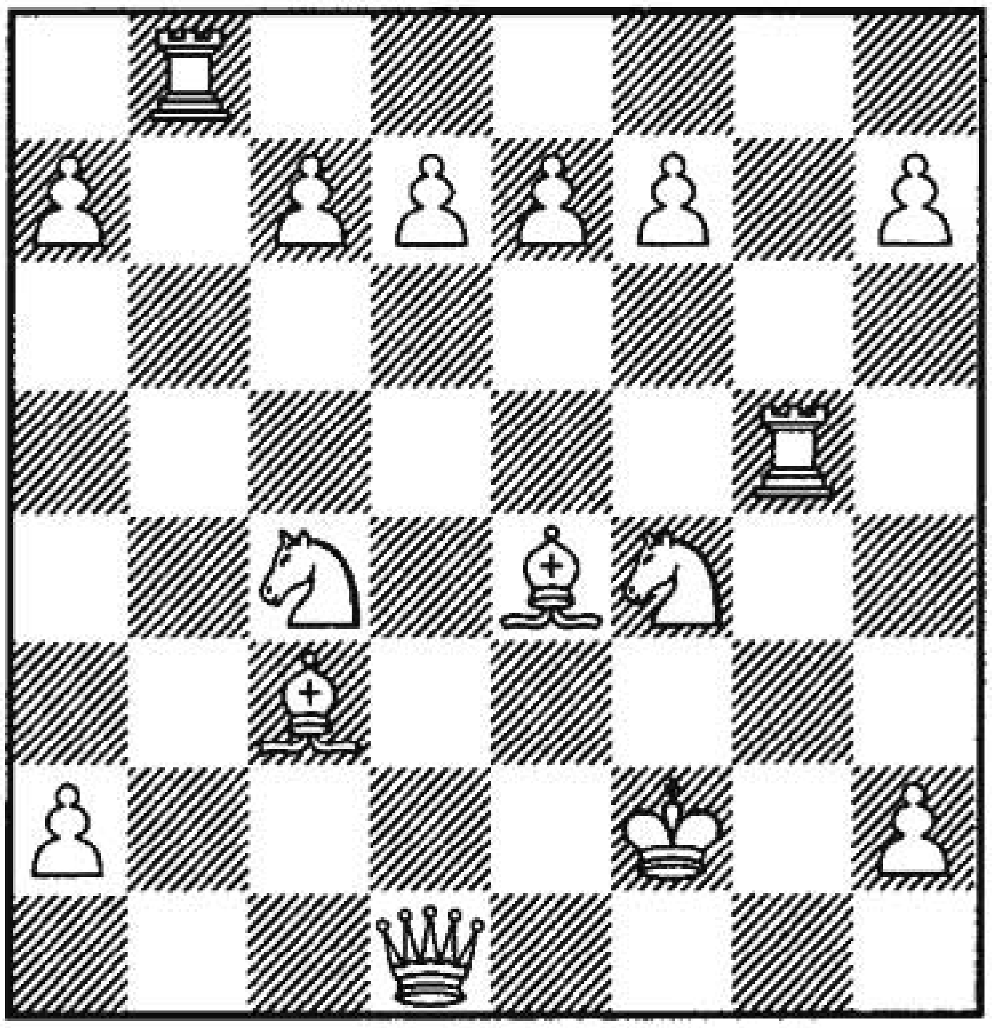


Figura 79.

movimiento posible el desplazamiento de un rey a una casilla amenazada por una pieza contraria).

En la figura 80 vemos la solución hallada por T. R. Dawson en 1923. El récord de "sólo dos jugadas" no ha sido mejorado, pero en 1938 E. Fielder halló una disposición de las 32 piezas en la que sólo puede mover la dama blanca. (¿Podría el lector reproducir esta situación de colapso casi total?) Aunque no se conoce ninguna disposición de las 32 piezas que impida todo movimiento, tampoco se ha demostrado que sea imposible.

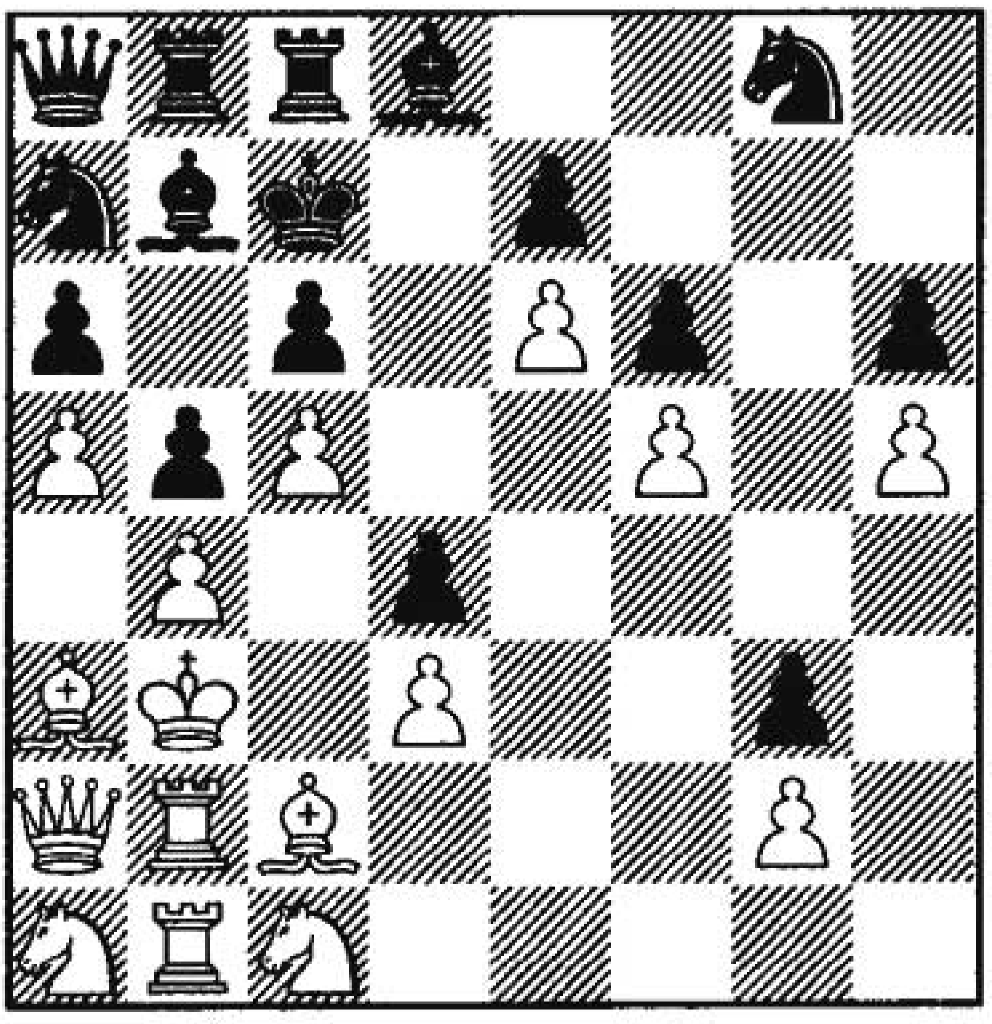


Figura 80.

El mínimo número de capturas posible con todas las piezas sobre el tablero es, evidentemente, cero, y las soluciones son triviales (la más obvia es la disposición de las piezas al comienzo de la partida). Pero, ¿cuál es el máximo número de capturas diferentes que pueden producirse en una posición lícita con las 32 piezas en el tablero? Como no es fácil determinar el número exacto, le haré al lector una pregunta más sencilla: el máximo número de capturas distintas que puede efectuar un bando en un momento dado, ¿es mayor o menor que 70?

Otra conocida tarea de construcción, directamente relacionada con las anteriores, consiste en colocar las ocho piezas de un bando de forma que ataquen el máximo número de casillas. Si se permite la licencia de colocar los dos alfiles en casillas del mismo color, entre las ocho piezas pueden atacar todas las casillas (incluso las ocupadas); de lo contrario, el máximo es 63. (Invito al lector a hallar estas disposiciones de máximo poder ofensivo.)

Soluciones

Tareas

La partida más breve que termina en tablas por jaque continuo fue hallada en 1866 por Sam Loyd, y es la siguiente:

1 f4, e5; 2 Rf2, Df6; 3 Rg3, Dxf4+.

Se llega así a la posición de la figura 81: el rey blanco sólo puede ir a h3, y la dama negra, dándole jaque desde h6, lo puede obligar a volver a g3, por lo que las negras pueden forzar tablas por jaque continuo.

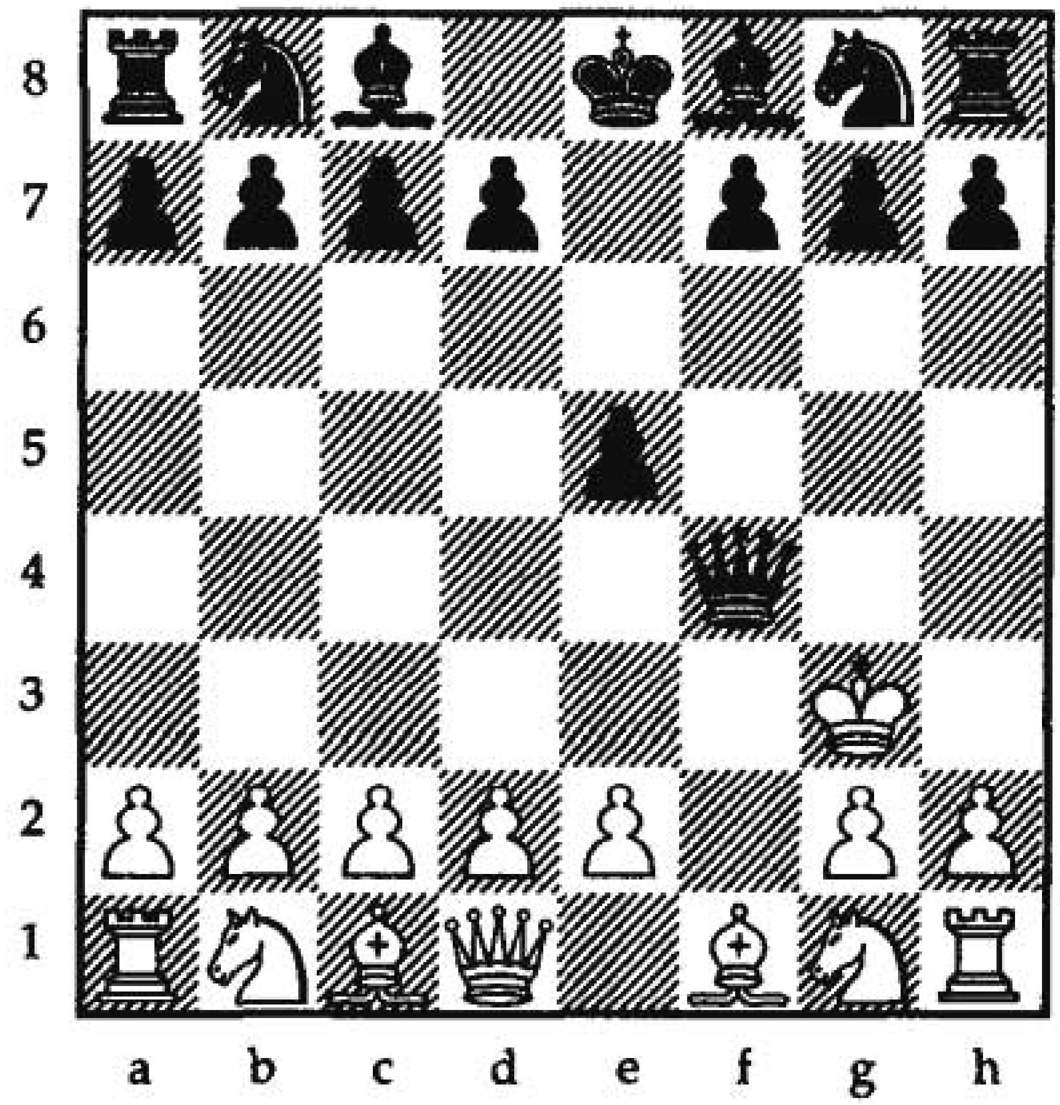


Figura 81.

La partida más breve que termina en tablas por ahogado también fue hallada por Loyd en 1866, y es la siguiente:

1 e3, a5; 2 Dh5, Ta6; 3 Dxa5, h5; 4 Dxc7, Ta-h6; 5 h4, f6; 6 Dxd7+, Rf7; 7 Dxb7, Dd3; 8 Dxb8, Dh7; 9 Dxc8, Rg6, 10 De6 tablas.

En la figura 82 vemos la posición final. Obsérvese que las blancas conservan todas sus piezas y sólo han movido la dama y dos peones.

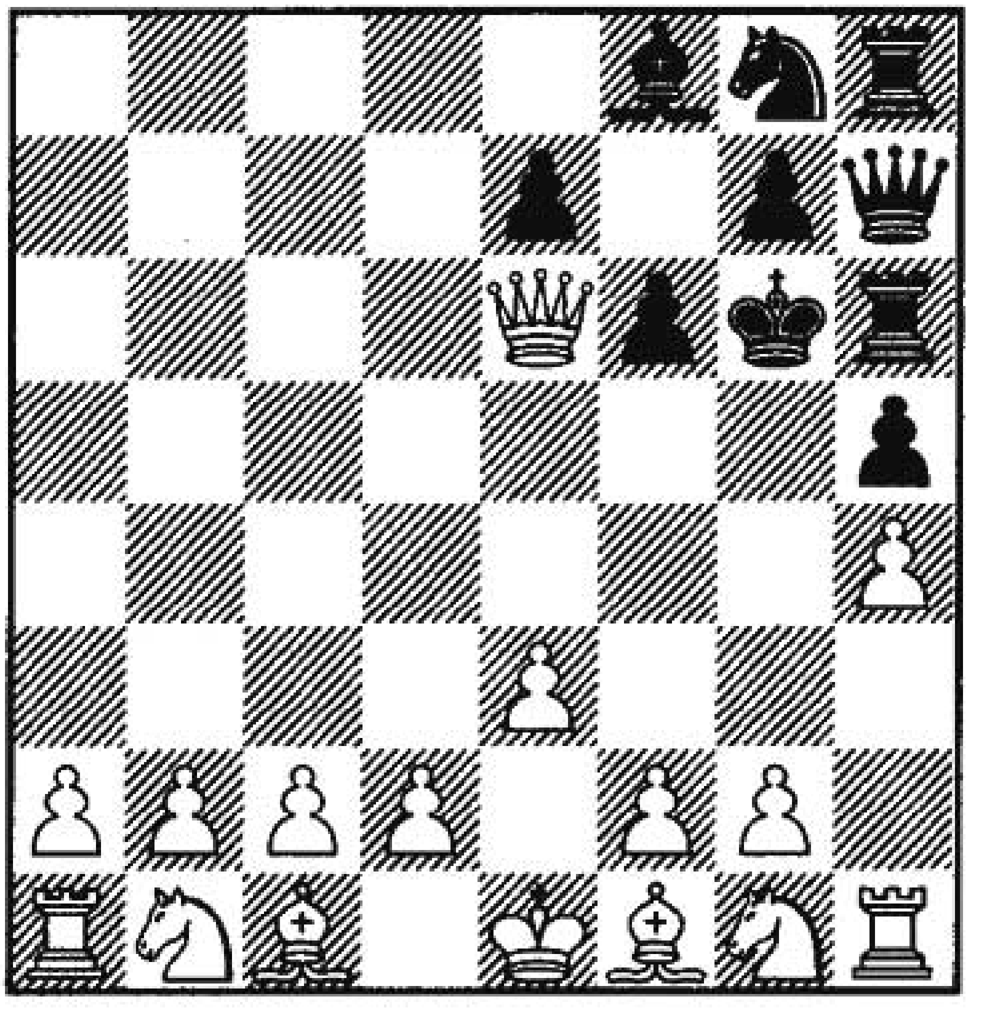


Figura 82.

Tareas de construcción

En la disposición de la figura 79 se pueden efectuar 122 jugadas diferentes. Si el lector sólo ha contado 104, tenga en cuenta que un peón, al llegar a la octava fila, puede convertirse en dama, torre, alfil o caballo, por lo que cada una de las seis promociones posibles vale por cuatro jugadas.

En la figura 83 vemos una disposición de las piezas blancas en la que sólo se pueden efectuar 10 movimientos: 3 con el rey, 3 con un caballo y 4 con el otro.

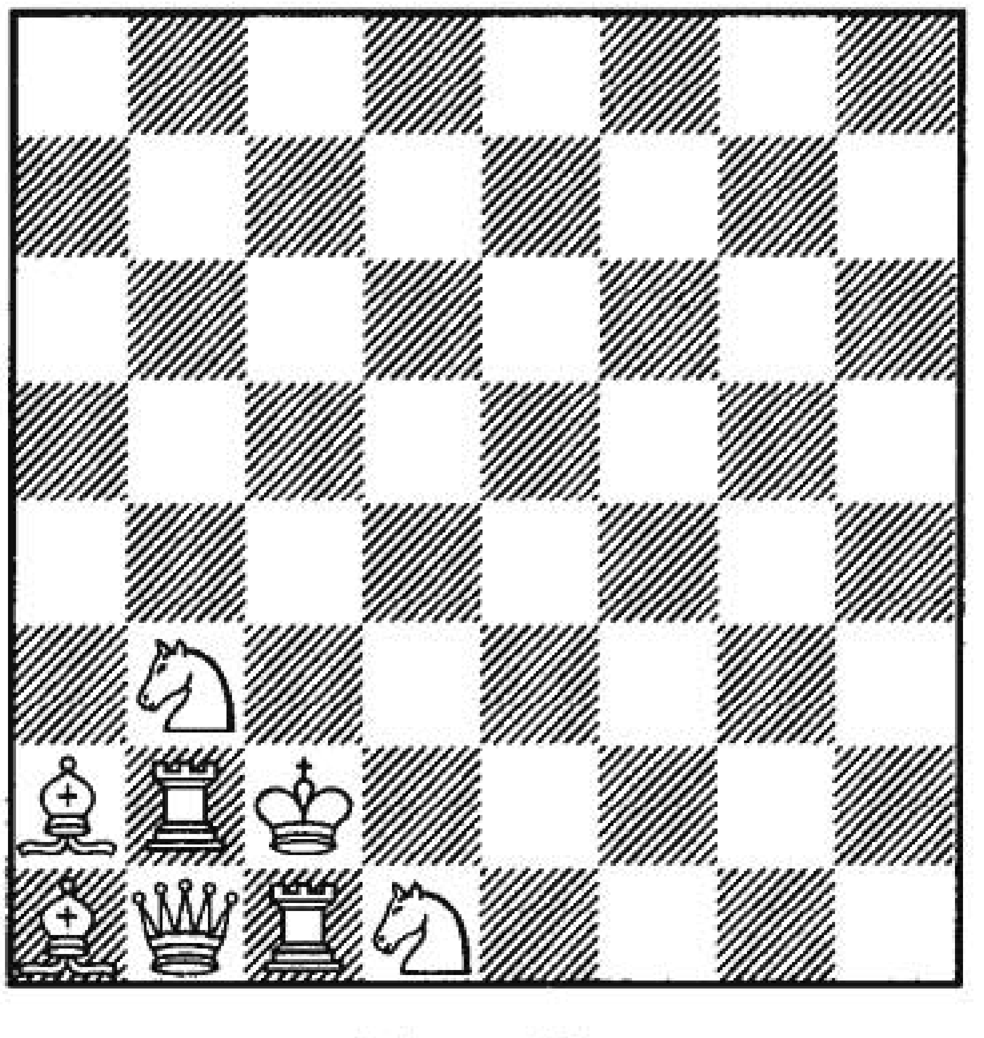


Figura 83.

En la figura 84 vemos una disposición de las 32 piezas en la que sólo puede mover la dama blanca.

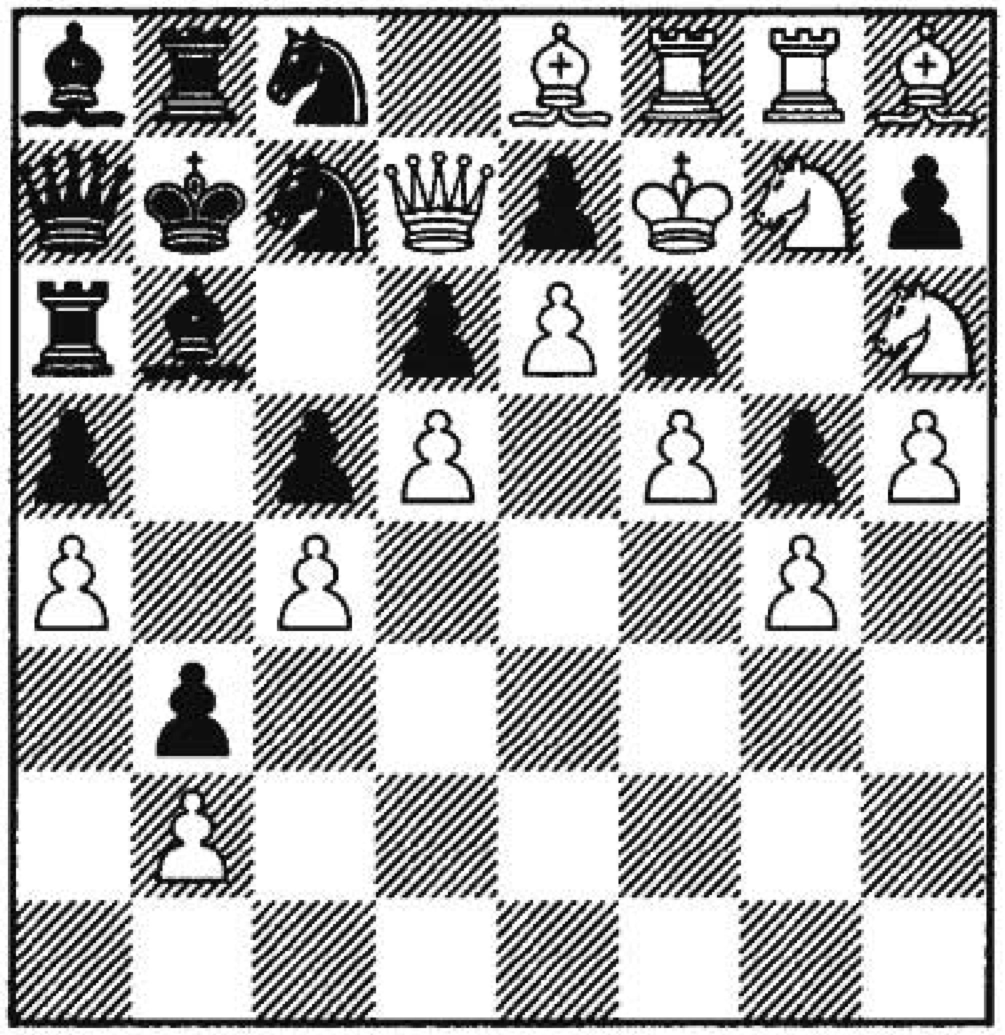


Figura 84.

Es fácil demostrar que el número de capturas que puede efectuar un bando en una posición cualquiera es inferior a 70 pues, en condiciones óptimas, la dama puede efectuar un máximo de 8 capturas, lo mismo que el rey y los caballos; las torres y los alfiles, 4 cada uno; y los peones, 2 cada uno; en total, 64. Por supuesto, el máximo real está bastante por debajo de esta cota superior: disponiendo los 32 trebejos de la forma óptima, entre ambos bandos pueden efectuar 88 capturas diferentes.

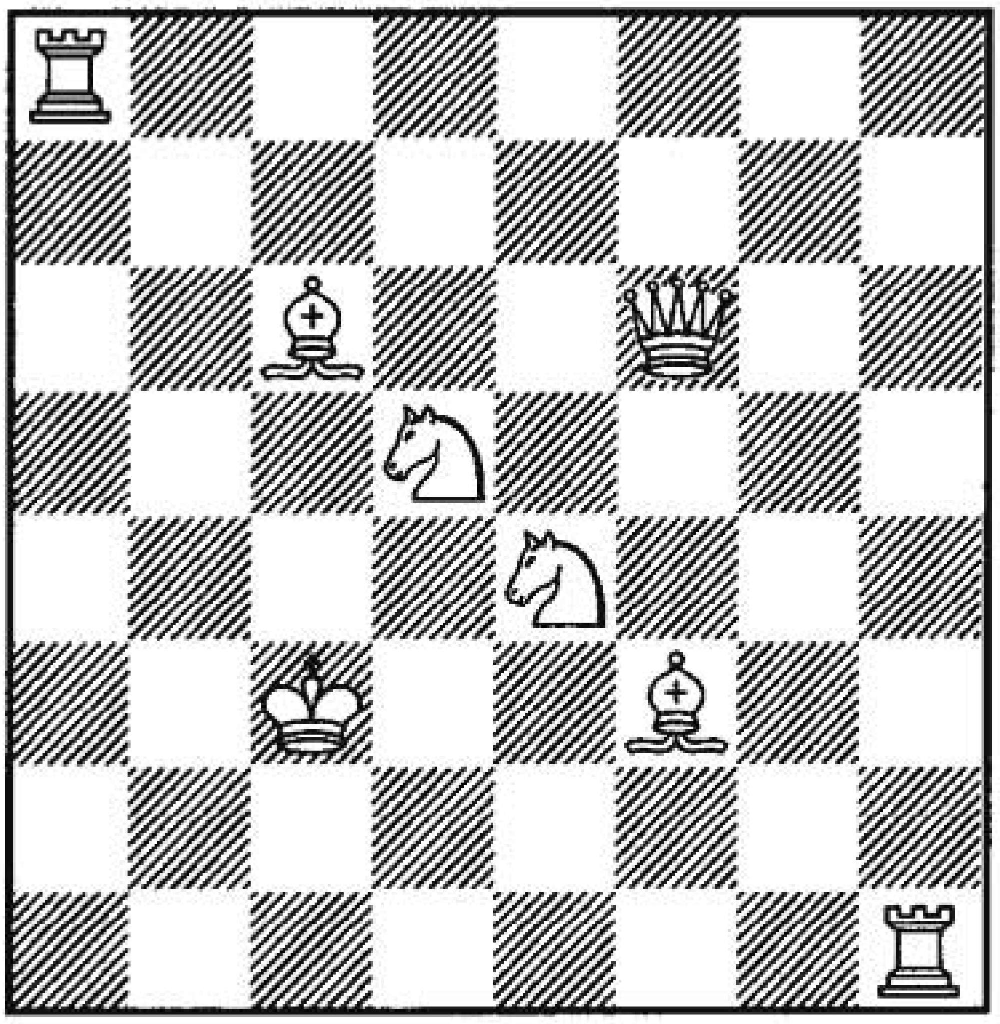


Figura 85.

En la figura 85 vemos una elegante disposición simétrica de las piezas blancas en la que todas las casillas (incluso las ocupadas) están a tiro de alguna de ellas; para ello ha sido necesario colocar los dos alfiles en casillas del mismo color.

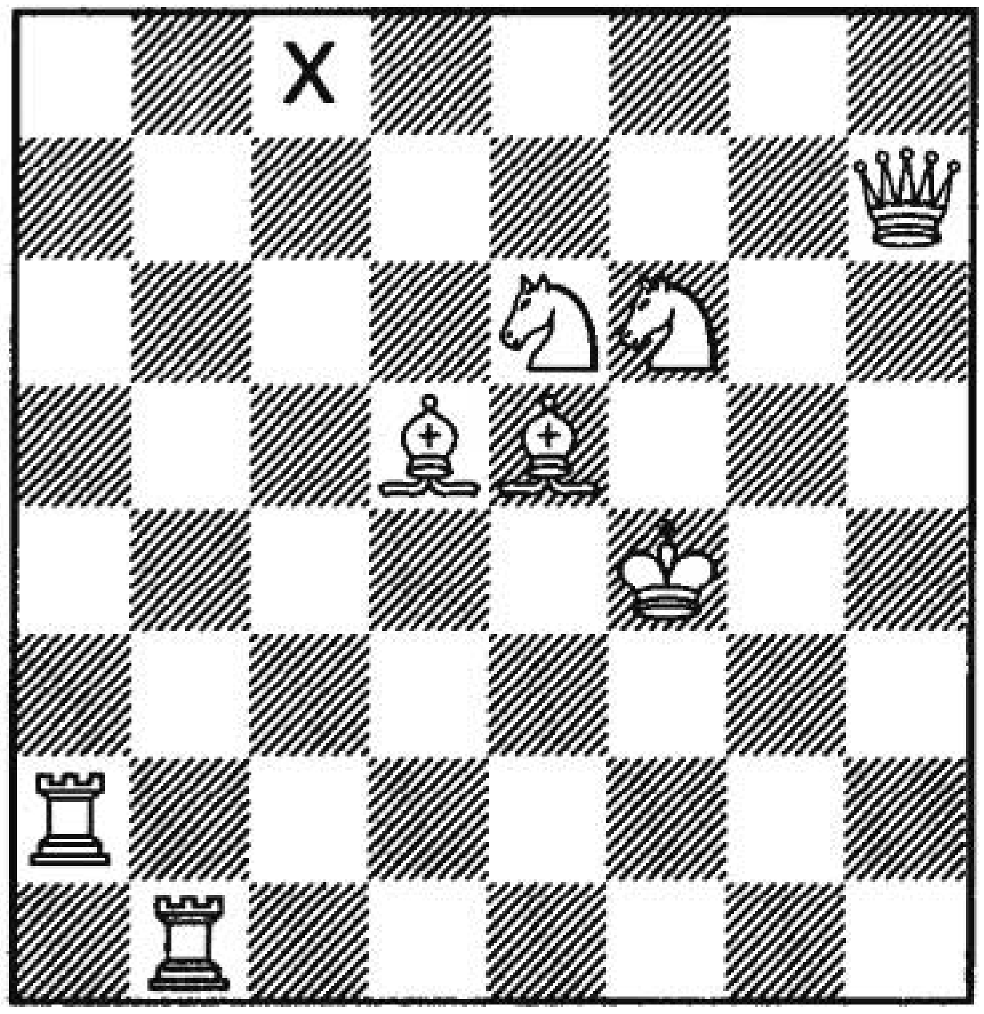


Figura 86.

Si no nos permitimos la licencia de poner ambos alfiles en casillas del mismo color, queda una casilla sin atacar (marcada con una x en la figura 86).

11

Metaproblemas

Un "metaproblema" es un problema relativo a otro problema. Así, por ejemplo, en el capítulo sobre ajedrez retrógrado hemos resuelto, como quien no quiere la cosa, el pequeño metaproblema de determinar que el problema de la pieza añadida es, aunque no lo parezca, un problema de análisis retrospectivo; es decir, hemos resuelto el problema (no siempre sencillo) de clasificar un problema.

Cualquier problema no formulado expresamente, pero con sus elementos a la vista, plantea el metaproblema de su formulación precisa. (Como cuando vemos a alguien preocupado y no sabemos por qué, la pregunta clave sería: "¿Cuál es el problema?")

En este sentido, cualquier problema de ajedrez convencional se puede convertir en un metaproblema si no leemos su enunciado e intentamos, viendo sólo la disposición de las piezas, deducir dicho enunciado. Propongo a los lectores aficionados a los problemas de ajedrez que practiquen este interesante juego: se trata, simplemente, de tapar con la mano el pie del diagrama e intentar deducir qué es lo que se pide. Naturalmente, con los problemas convencionales del tipo "las blancas juegan y dan mate en *n*", la única dificultad añadida consiste en averiguar el valor de *n*. Pero con otros tipos de problemas el desafío (o metadesafío) puede ser muy estimulante.

Otra posibilidad es no mirar el diagrama y, leyendo la solución del problema, intentar reconstruir la posición correspondiente. O averiguar lo que se pide viendo sólo el diagrama de la solución, si lo hubiere.

Por ejemplo, supongamos que vemos el diagrama de la figura 87 y sabemos que es la solución de un problema. *¿Cuál es el problema?*

				393			
			126	141	126		
		30	45	51	45	30	
	4	10	16	19	16	10	4
	1	3	6	7	6	3	1
		1	2	3	2	1	
			1	1	1		
				0			

Figura 87.

Claro que al analizar un diagrama o una solución en busca del problema al que corresponde, podemos encontrar otro problema distinto del inicialmente planteado por el autor; pero esto, obviamente, no hace sino aumentar el interés del juego. Por ejemplo, la disposición de peones de la figura 88 nos podría venir dada como solución del problema de cubrir todo el tablero con el mínimo número de peones ("cubrir" en el sentido de que todas las casillas estén ocupadas o a tiro; dicho de otro modo: es imposible colocar en el tablero una pieza negra sin que pueda ser capturada inmediatamente). Pero también es solución de un problema muy distinto, en cierto modo opuesto. (¿De cuál?)

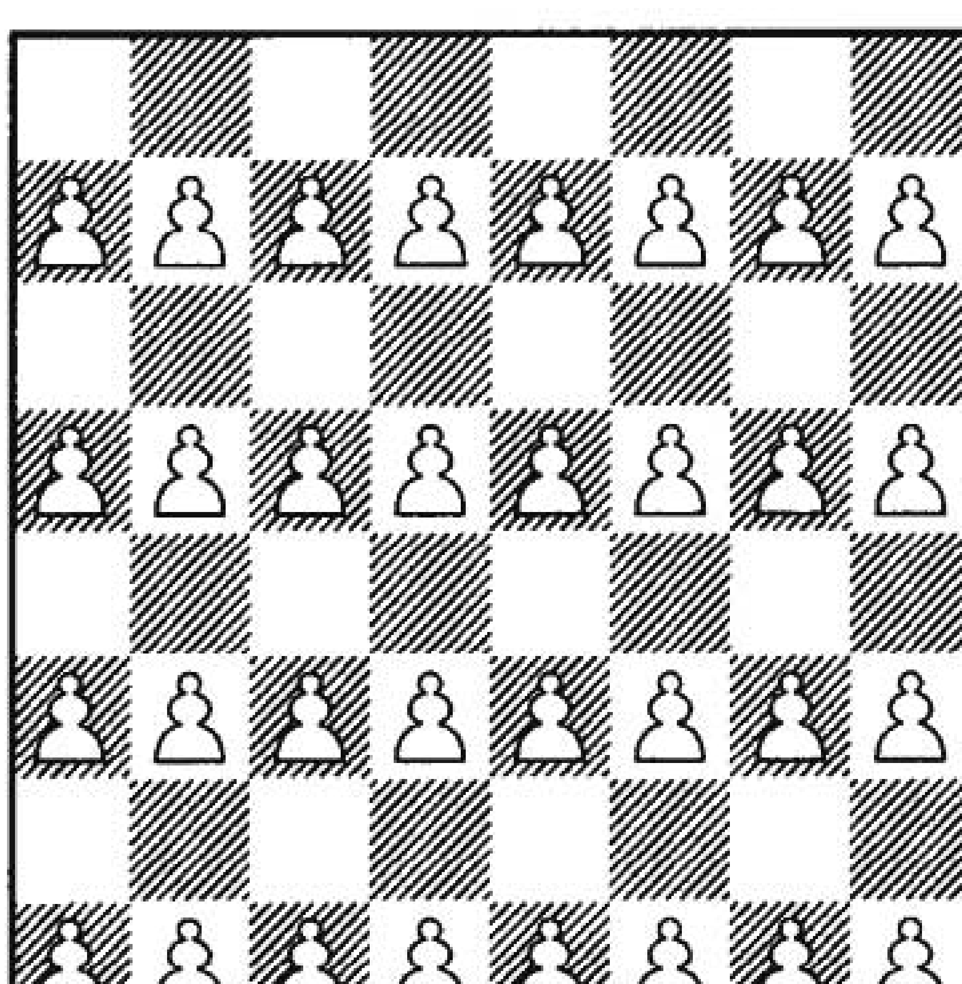


Figura 88.

En un sentido amplio del término, también se pueden considerar metaproblemas algunos problemas nacidos de otros problemas. No me refiero a las variaciones sobre un mismo tema (y menos aún a los plagios, por supuesto), sino a los problemas que toman otros problemas como punto de partida para desarrollar posibles secuelas que pasaron inadvertidas al propio autor o para plantear algo completamente distinto. Los dos grandes creadores de pasatiempos lógicos del siglo pasado, los inevitables Loyd y Dudeney, nos brindan un bello ejemplo. En la figura 52 (pág. 69) vemos la culminación de una notable partida hallada por Dudeney en la que, en 16 jugadas, el rey negro queda solo en el tablero y todas las piezas blancas ocupan sus casillas iniciales. Pues bien, analizando esta posición Loyd descubrió que, variando la casilla final del rey negro tal como se ve en la figura 89 (en la partida de Dudeney el rey podía terminar perfectamente en h4), las blancas pueden dar mate en tres jugadas. De este modo, Loyd convirtió la espectacular "tarea" de Dudeney en un problema convencional (aunque atípico) de mate en tres, cuya resolución dejo en manos del lector.

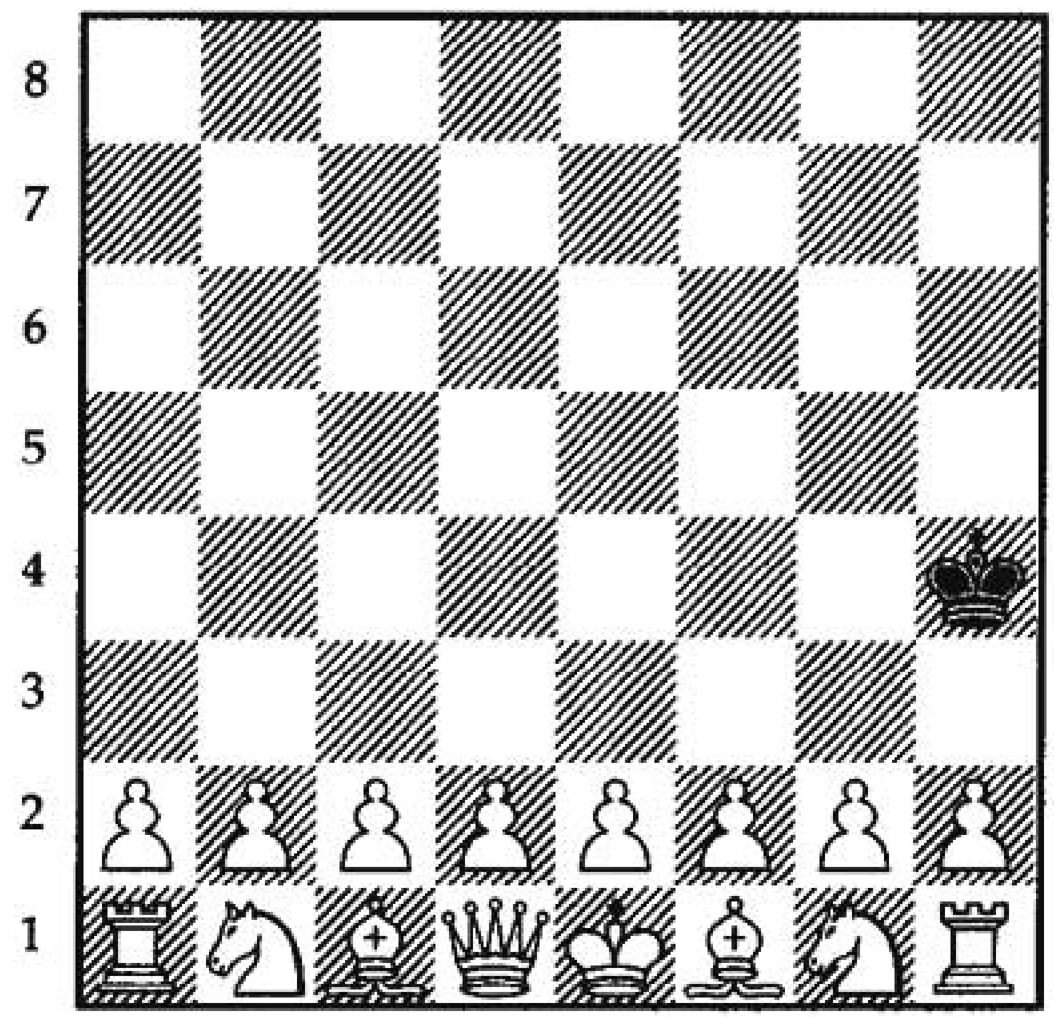


Figura 89. Las blancas juegan y dan mate en tres.

Podríamos seguir viendo ejemplos de metaproblemas, pero éste es un capítulo que, más que planteamientos concretos, pide metaplanteamientos (planteamientos generales sobre el tipo de planteamientos pertinentes). Y, aparte de los ya esbozados, sólo se me ocurre sugerirle al lector que haga una metalectura del libro y descubra, a partir de los diversos tipos de problemas propuestos, alguno de los innumerables metaproblemas latentes.

Por ejemplo, todos los problemas vistos hasta ahora (sin contar la alusión a la torre de Hanoi del primer capítulo) están relacionados, de forma más o menos directa, con el juego del ajedrez, excepto uno. ¿Cuál es? La solución, en el próximo capítulo.

Metasoluciones

Metasoluciones, sí, porque son soluciones relativas a otras soluciones de este mismo libro. El lector que lo haya leído con atención y goce de una memoria saludable, recordará que el diagrama de la figura 87 (idéntico al de la figura 12) resuelve el problema de determinar por cuántos caminos diferentes puede ir un rey de su casilla a la del rey contrario.

Paradójicamente, la disposición de 32 peones de la figura 88 (idéntica a la figura 54) es a la vez solución de un problema de "mínimos" y de uno de "máximos", como también recordará el lector aplicado, pues es el mayor número de peones que podemos colocar en el tablero de forma que ninguno ataque (o defienda, según se mire) a ningún otro, y a la vez es el menor número de peones con que se puede cubrir todo el tablero.

En el mate en tres de Loyd, la jugada clave consiste en avanzar dos casillas el peón de dama. El rey negro tiene que ir a g4 o a h5, lo que da lugar a dos posibles desarrollos:

1 d4, Rg4; 2 e4+, Rh4; 3 g3++.

1 d4, Rh5; 2 Dd3, Rg4 (o h4); 3 Dh3++.

Esta solución es mínima y única, en el sentido de que sólo con el rey negro en h4 pueden las blancas dar mate en tres.

12

El tablero roto

El único problema planteado hasta ahora que no tiene nada que ver con el *juego* del ajedrez es el de la "casilla sobrante", en el capítulo dedicado a Lewis Carroll; todos los demás se basan en las reglas del juego (cuando menos, en la forma de mover las piezas), mientras que en éste sólo cuentan las características geométricas del tablero. Si se planteara con una simple cuadrícula de 8×8 y sin hacer la menor alusión al ajedrez (de hecho, en muchos libros de matemática recreativa se plantea así), el problema sería exactamente el mismo.

Sin embargo, el ajedrez está tan arraigado en nuestra cultura y es tan grande su poder simbólico y evocador, que es casi imposible ver un "cuadrado cuadriculado" (aunque no sea de orden 8 ni tenga las casillas blancas y negras) sin pensar en el familiar damero. Por eso, como en el caso de "la casilla sobrante", muchos problemas geométricos o topológicos que podrían plantearse con una cuadrícula cualquiera, se refieren al tablero de ajedrez.

Por otra parte, el hecho de que el tablero sea un objeto material, además de geométrico, frecuentemente disponible y con las casillas alternativamente blancas y negras, facilita su manipulación (tanto mental como física) y lo hace especialmente idóneo para algunos problemas, como los de particiones y recubrimientos (aunque no le estoy sugiriendo al lector que rompa realmente su tablero para resolverlos). El primer problema de este tipo del que tuve noticia me impresionó vivamente, y tal vez fue la semilla de la que, más de treinta años después, nacería este libro. Procedía, cómo no, de la maravillosa sección de juegos matemáticos de Martin Gardner en *Scientific American*, y era el siguiente:

Tenemos un tablero de ajedrez y 32 fichas de dominó, cada una de las cuales puede cubrir exactamente dos casillas adyacentes del tablero; por tanto, las 32 fichas pueden cubrir totalmente las 64 casillas. Pero supongamos que eliminamos una ficha de dominó y las dos casillas de sendas esquinas opuestas del tablero, tal como se ve en la figura 90. ¿Se puede, con las 31 fichas restantes, cubrir las 62 casillas del tablero mutilado?

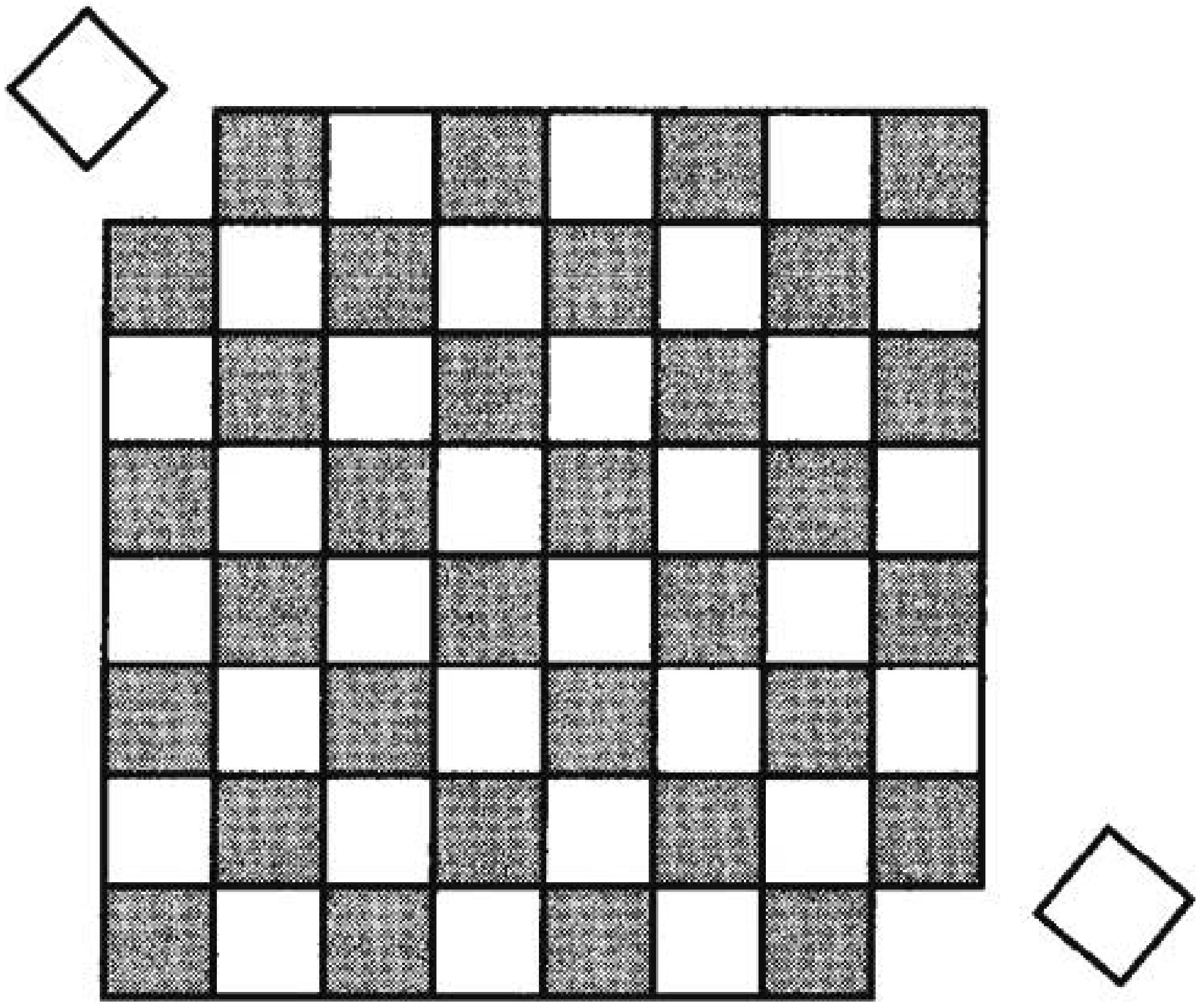


Figura 90.

En su libro *El ahorcamiento inesperado*, Gardner retoma este viejo problema y plantea una interesante alternativa: si en vez de eliminar dos casillas del mismo color quitamos una blanca y una negra (no necesariamente de las esquinas, sino de cualquier lugar del tablero), ¿se puede cubrir totalmente las 62 casillas restantes con 31 fichas de dominó?

También podemos plantearnos un problema en cierto modo inverso: ¿cuál es el mínimo número de casillas que tenemos que eliminar para que no pueda colocarse ninguna ficha de forma que cubra dos casillas?

El tablero demediado

Al hablar de particiones, sea cual fuere el objeto a dividir, lo primero que se nos ocurre es partirlo por la mitad. En el caso del tablero de ajedrez, dividirlo en dos partes iguales es una cuestión trivial; pero no lo es tanto averiguar de cuántas maneras diferentes se puede efectuar la división (dejando enteras todas las casillas, es decir, cortando sólo por las líneas que las delimitan).

Henry Dudeney fue el primero en plantear el problema, aunque sólo logró resolverlo para tableros de hasta 6 casillas de lado. Es obvio que el tablero de 2×2 sólo puede dividirse de una manera (en dos "dominós"). El de 3×3, como tiene un número impar de casillas, no puede dividirse en dos partes iguales, a no ser que eliminemos la casilla central, en cuyo caso se puede dividir también de una única manera (en dos "tetrominós" en forma de L). La cosa empieza a diversificarse a partir del tablero de 4×4, que se puede dividir en dos partes iguales de varias, aunque no muchas, formas distintas (invito al lector a hallar todas las biparticiones posibles). El tablero de 5×5, sin casilla central, se puede dividir de 15 formas distintas, y el de 6×6 admite 255 biparticiones, según demostró el propio Dudeney; pero para tableros de orden mayor no se conoce el número de soluciones.

El tablero cuarteado

El siguiente paso podría ser dividir el tablero en cuatro partes iguales e intentar averiguar de cuántas maneras distintas se puede realizar el "cuarteamiento". Evidentemente, la solución sigue siendo única para el tablero de 2×2 y el de 3×3 sin casilla central. (Invito al lector a hallar todas las cuatriparticiones posibles para los tableros de 4×4 y 5×5.)

Se desconoce de cuántas maneras diferentes se puede dividir en cuatro partes iguales el tablero normal de 8×8, aunque, como en el caso de las biparticiones, es evidente que son muchas y muy variadas (en la figura 91 vemos algunos ejemplos, incluidos los dos triviales), lo que hace muy difícil hallar un algoritmo que las sistematice y permita calcular su número exacto.

Para que una partición del tablero de ajedrez en cuatro partes iguales entrañe cierta dificultad, hay que añadir alguna condición suplementaria. Por ejemplo, en las particiones de la figura 91 todos los fragmentos tienen el mismo número de casillas blancas y negras, pero no tiene por qué ser siempre así. ¿Podría el lector hallar una cuatripartición en la que cada fragmento tuviera más del doble de casillas de un color que del otro?

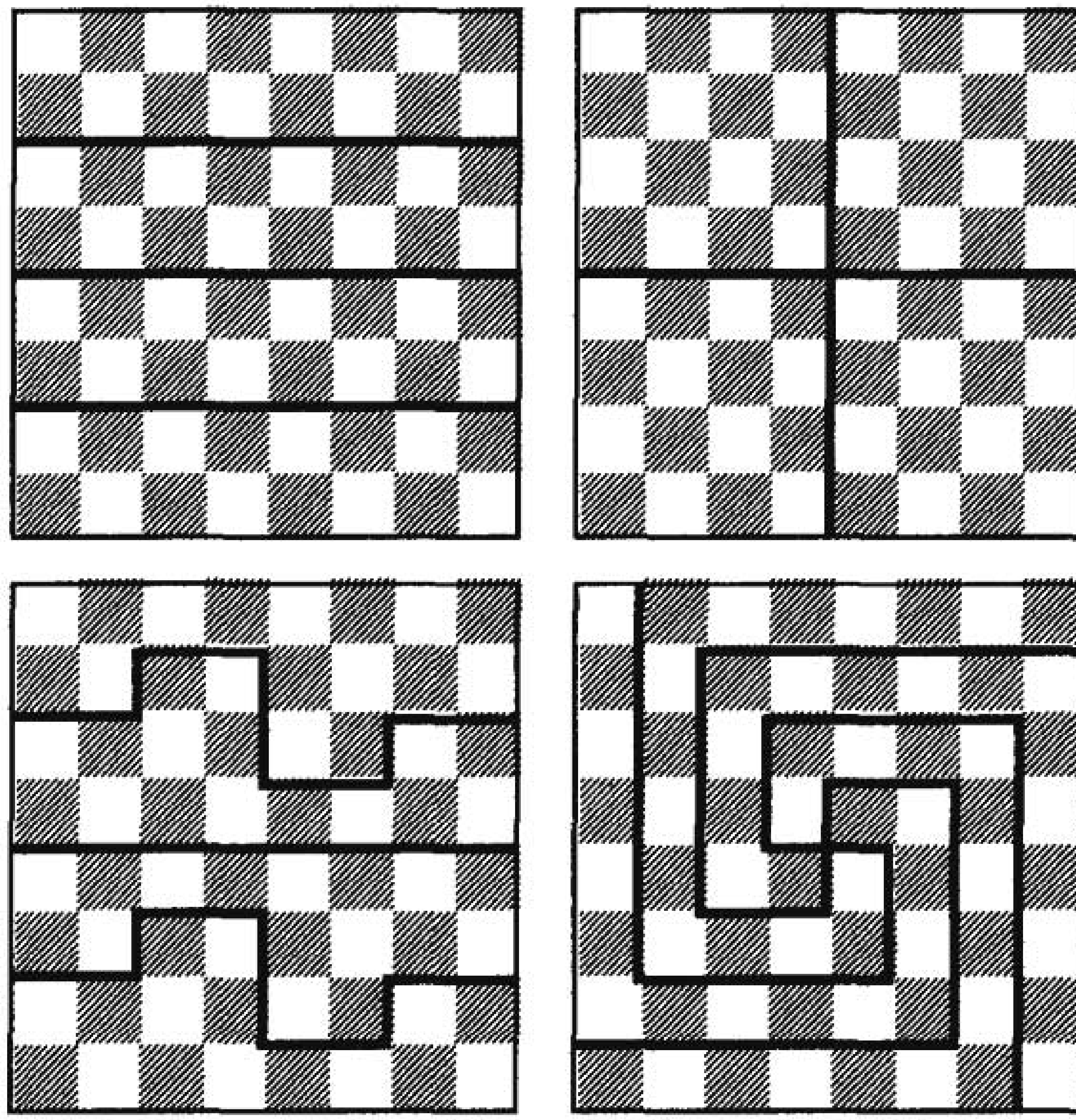


Figura 91.

Otra partición con dificultad añadida nos la plantea un conocido rompecabezas de Sam Loyd: dividir el tablero de la figura 92 en cuatro partes iguales de forma que haya un caballo en cada una de ellas.

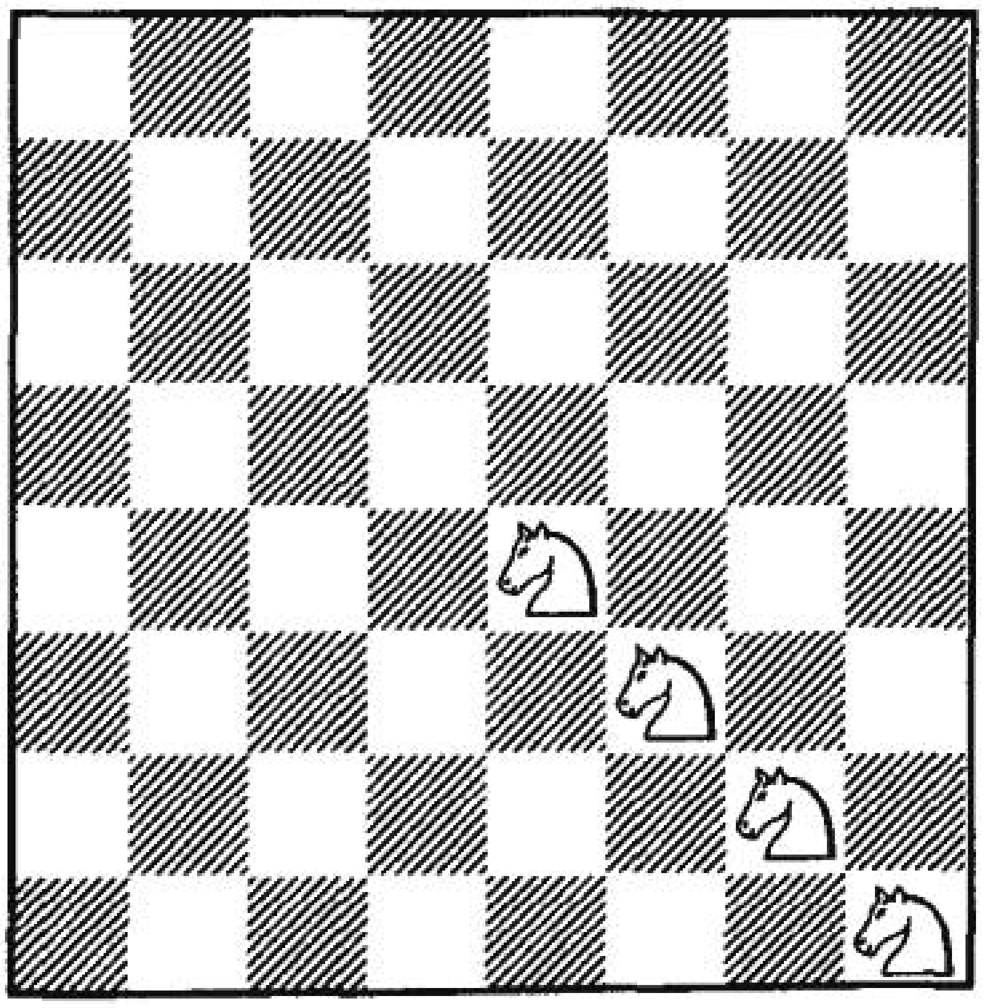


Figura 92.

El tablero atomizado

Como el tablero de ajedrez tiene 64 casillas, es decir, 2^6, sólo se puede dividir en n partes iguales si n es potencia de 2 (2, 4, 8, 16, 32 o 64). La división en 64 partes reduce el tablero a sus "átomos" (las casillas), y la división en 32 partes, a sus "moléculas" (los binomios casilla blanca-casilla negra.)

La división en 32 partes iguales nos lleva de nuevo al problema inicial del recubrimiento del tablero con fichas de dominó, pues son cuestiones equivalentes: preguntar de cuántas maneras diferentes podemos dividir el tablero en 32 partes iguales es, obviamente, lo mismo que preguntar de cuántas maneras diferentes podemos recubrirlo con 32 fichas de dominó. (Obsérvese que particiones distintas no significan trozos distintos —en este caso sólo hay un tipo de trozo posible— sino distintas configuraciones de las líneas de corte.)

No conozco (ni sé si se conoce) el número de diferentes maneras en que el tablero de 8×8 se puede dividir en (o recubrir con) 32 dominós, aunque en este caso, al tratarse de una combinatoria de piezas iguales, parece más fácil resolver el problema mediante búsqueda por ordenador, o incluso hallar un algoritmo. En cualquier caso, no voy a pedirle al lector que encuentre todas las particiones posibles, pero sí una con cierta característica.

En la partición de la figura 93 hay cuatro "líneas de fractura" (dos horizontales y dos verticales, indicadas con flechas), es decir, cortes rectos que van de un lado al otro del tablero y constituyen, por tanto, debilidades estructurales (si se tratara, por ejemplo, de una disposición de ladrillos, habría que evitar esas líneas de fractura). ¿Podría hallar el lector una partición en la que no hubiera ninguna línea de corte recta que cruzara el tablero de lado a lado?

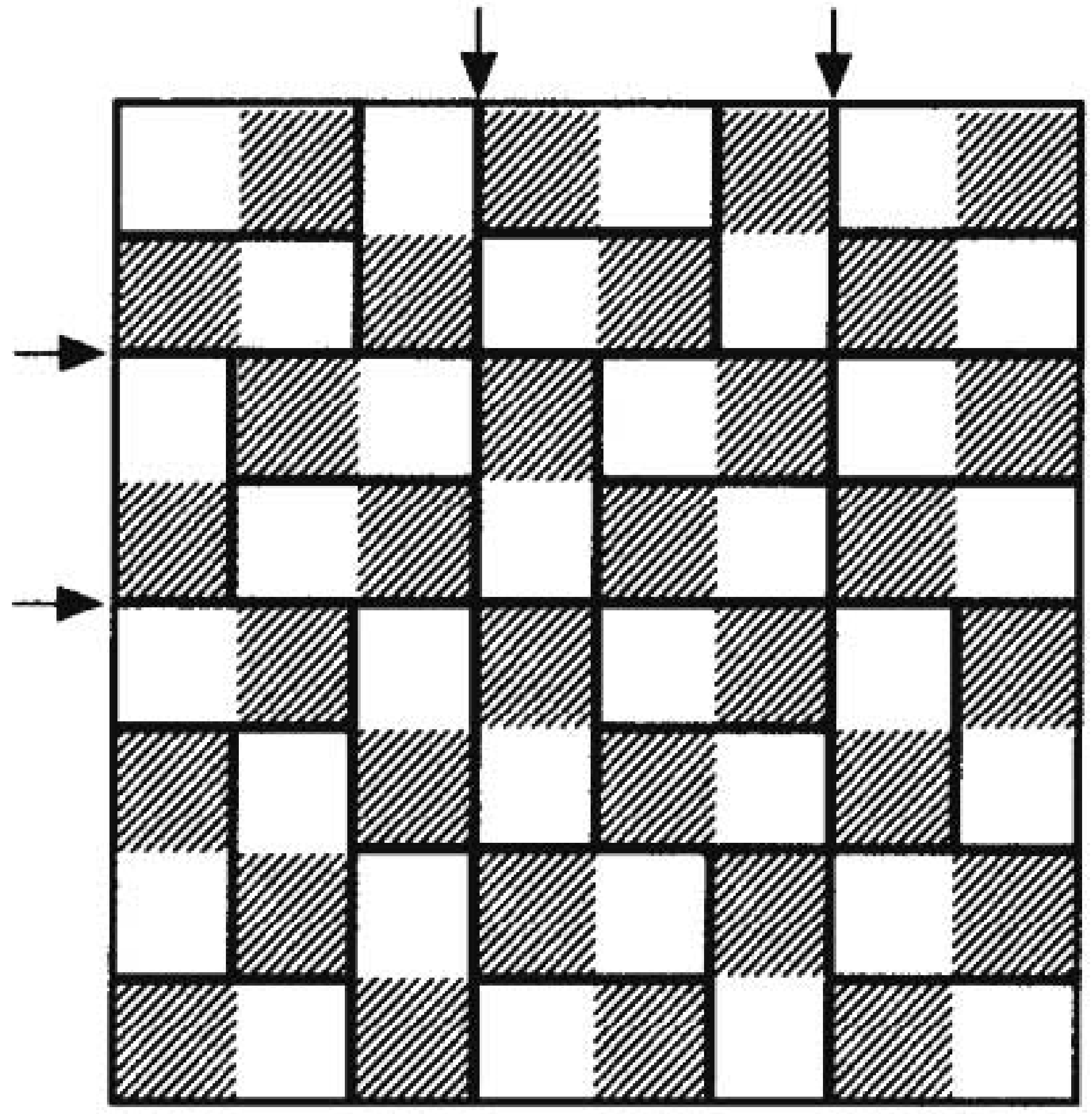


Figura 93.

Particiones irregulares

Naturalmente, no tenemos por qué limitarnos a dividir el tablero en partes iguales, y los problemas que plantean las particiones irregulares no son menos interesantes. Además, una partición en trozos desiguales permite plantear el problema de la recomposición (con trozos iguales el problema es trivial), en la línea de los *puzzles* tradicionales.

Uno de los más famosos rompecabezas de recomposición del tablero de ajedrez tiene que ver con una apócrifa partida entre el Delfín de Francia y el duque de Borgoña. Como el Delfín iba perdiendo (cuenta Sam Loyd, autor del problema), zanjó la cuestión rompiendo el tablero en la cabeza del duque. El tablero se rompió en los ocho trozos que vemos en la figura 94. ¿Podría recomponerlo el lector?

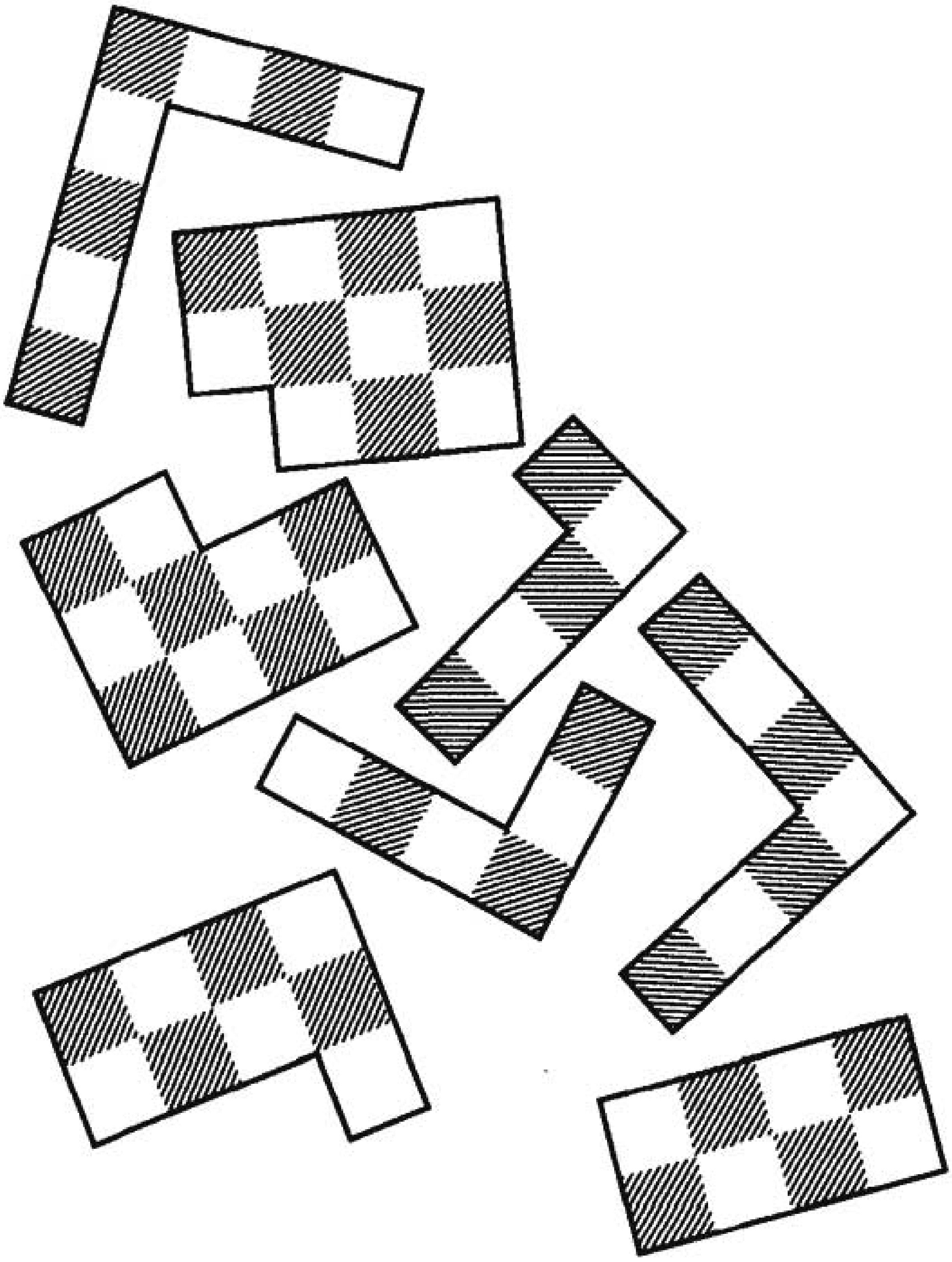


Figura 94.

Para mayor dificultad, el problema de la recomposición puede asociarse con el de la partición previa, partiendo, claro está, de una forma distinta del tablero. Como la de la figura 95, que corresponde a otro problema de Loyd. Se trata de dividir la figura en el menor número de trozos que puedan reagruparse formando un tablero de ajedrez.

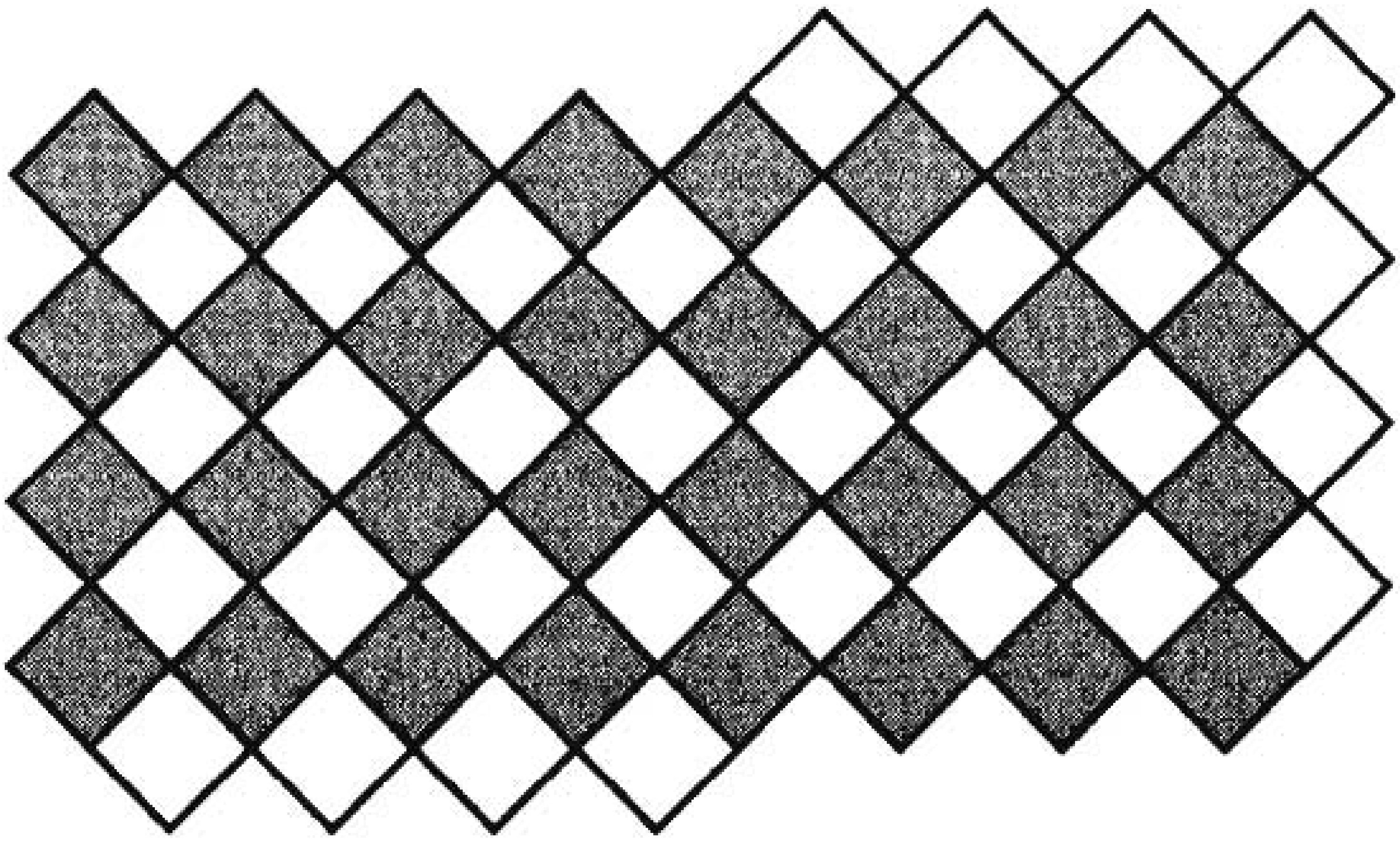


Figura 95.

Y, para terminar, un último rompecabezas de Loyd: dividir el tablero en el mayor número posible de trozos diferentes. En este caso también se consideran distintos los trozos que, aun siendo iguales en forma y tamaño, difieran en el color de sus casillas.

Soluciones

El tablero mutilado

Puesto que cada ficha cubre necesariamente una casilla blanca y una negra y ahora tenemos 30 casillas blancas y 32 negras, no se puede cubrir totalmente el tablero con 31 fichas.

Sin embargo, si quitamos una casilla blanca y una negra, cualesquiera que sean, el recubrimiento siempre es posible. En su libro, Gardner cita una elegante demostración debida a Ralph Gomory. Dibujamos sobre el tablero unos trazos gruesos como los que se ven en la figura 96, formando un circuito cerrado en el que se alternan las casillas blancas y negras. Al quitar una casilla blanca y una negra, el circuito queda dividido en dos tramos, en cada uno de los cuales hay el mismo número de casillas blancas y negras. Y puesto que cada ficha cubre una casilla blanca y una negra, podremos cubrir completamente ambos tramos. (Si las dos casillas eliminadas son adyacentes, en vez de dos tramos tendremos uno solo, y el razonamiento es el mismo.)

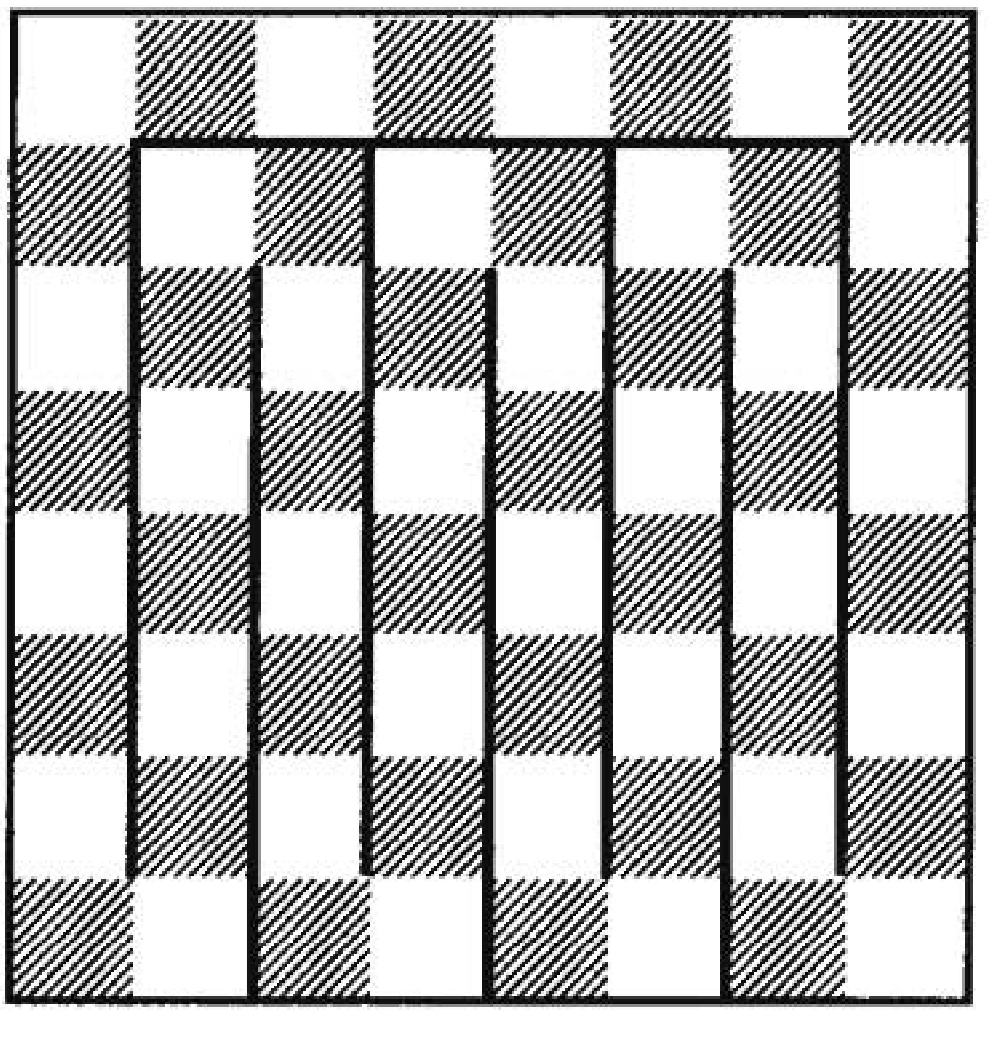


Figura 96.

Para que no se pueda colocar ninguna ficha, hay que quitar las 32 casillas de un color; 32 es el mínimo, ya que si quedaran 33 habría al menos dos adyacentes (pues al menos una sería de color distinto del de las demás) y se podría colocar al menos una ficha.

El tablero demediado

El tablero de 4 × 4 puede dividirse en dos partes iguales de 6 maneras diferentes, como se ve en la figura 97.

Incluso en este caso tan sencillo, se puede apreciar la dificultad de establecer una pauta que pudiera permitirnos hallar un algoritmo.

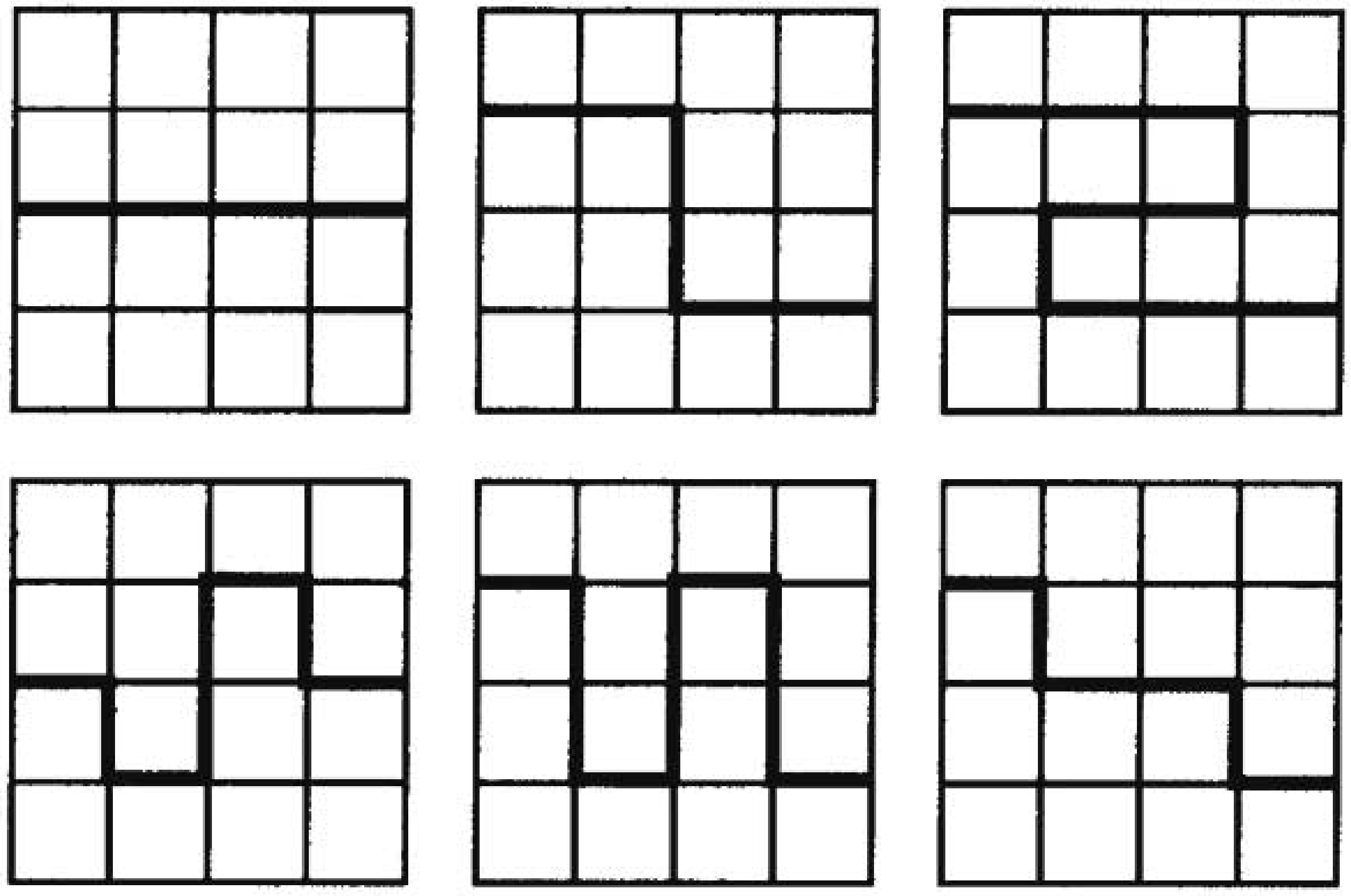


Figura 97.

El tablero cuarteado

El tablero de 4 × 4 se puede dividir en cuatro partes iguales de 5 maneras diferentes, tal como se ve en la figura 98.

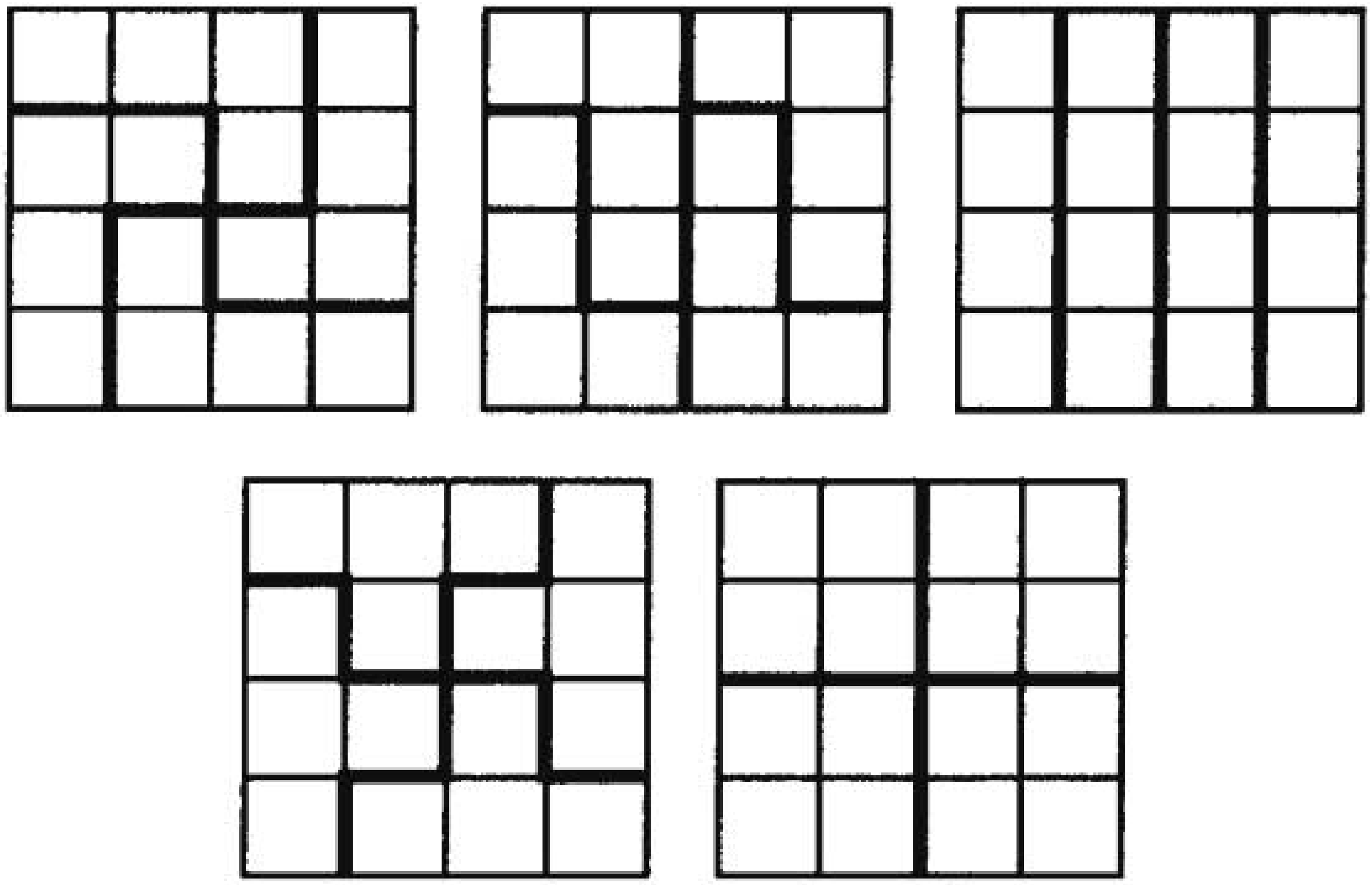


Figura 98.

El tablero de 5×5 sin casilla central se puede "cuartear" de 7 maneras diferentes, como se ve en la figura 99.

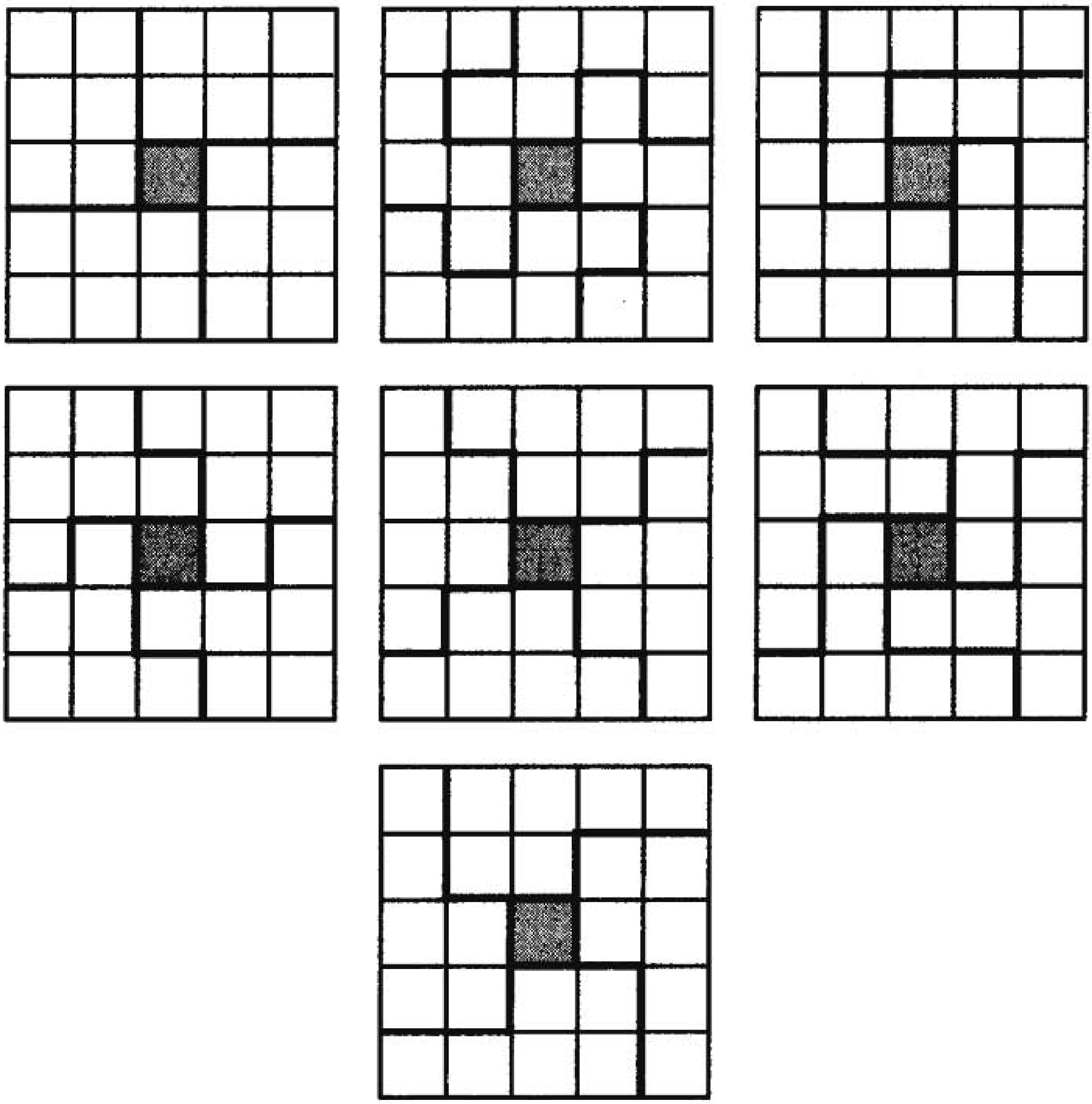


Figura 99.

En la figura 100 vemos dos cuatriparticiones del tablero en las que en cada trozo hay más del doble de casillas de un color que del otro.

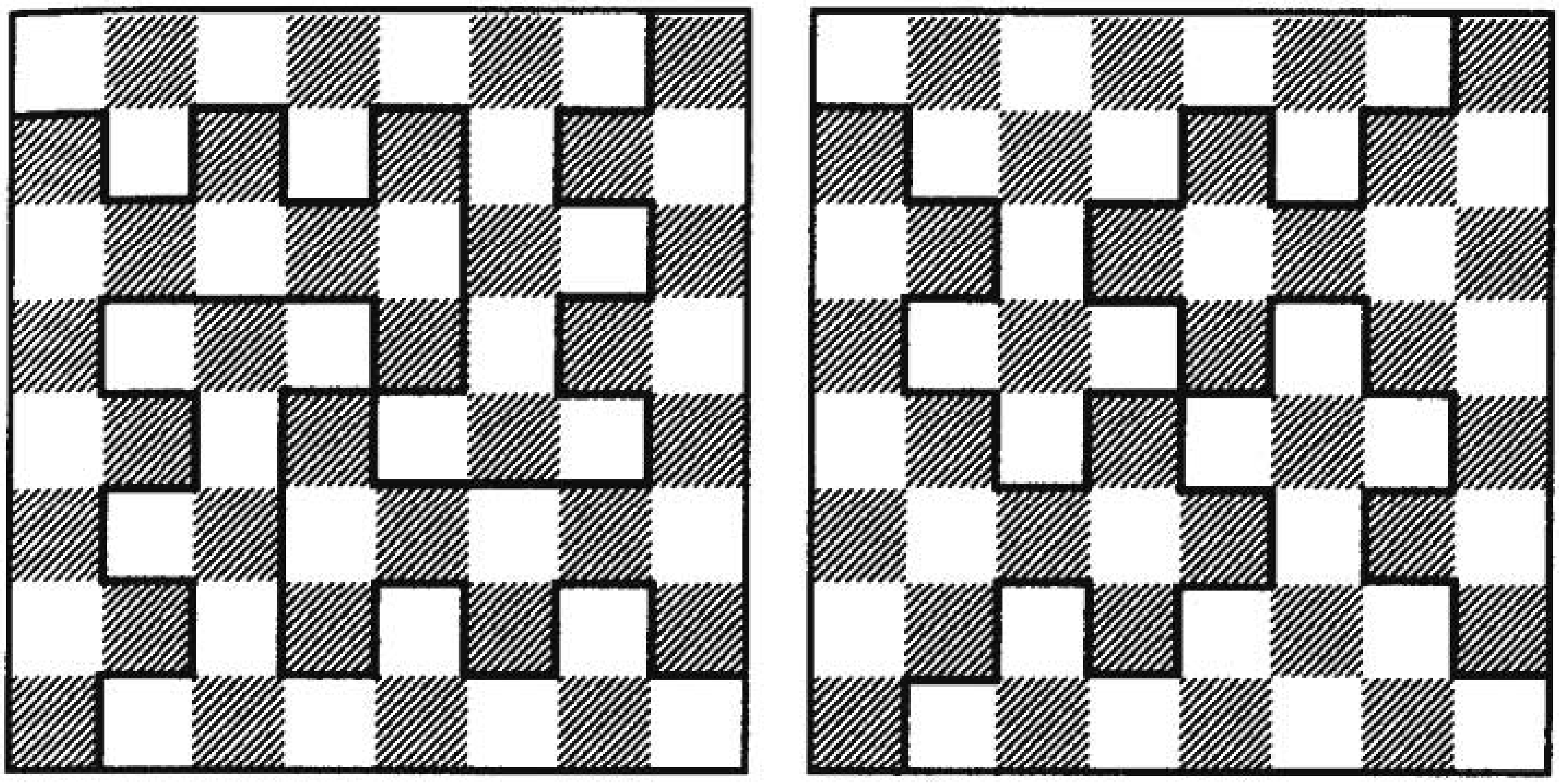


Figura 100.

En la figura 101 vemos la cuatripartición en espiral de Loyd... que es una de las ofrecidas como ejemplo en la figura 91 (para que el lector despistado pueda decir aquello de "tenía la solución delante de las narices").

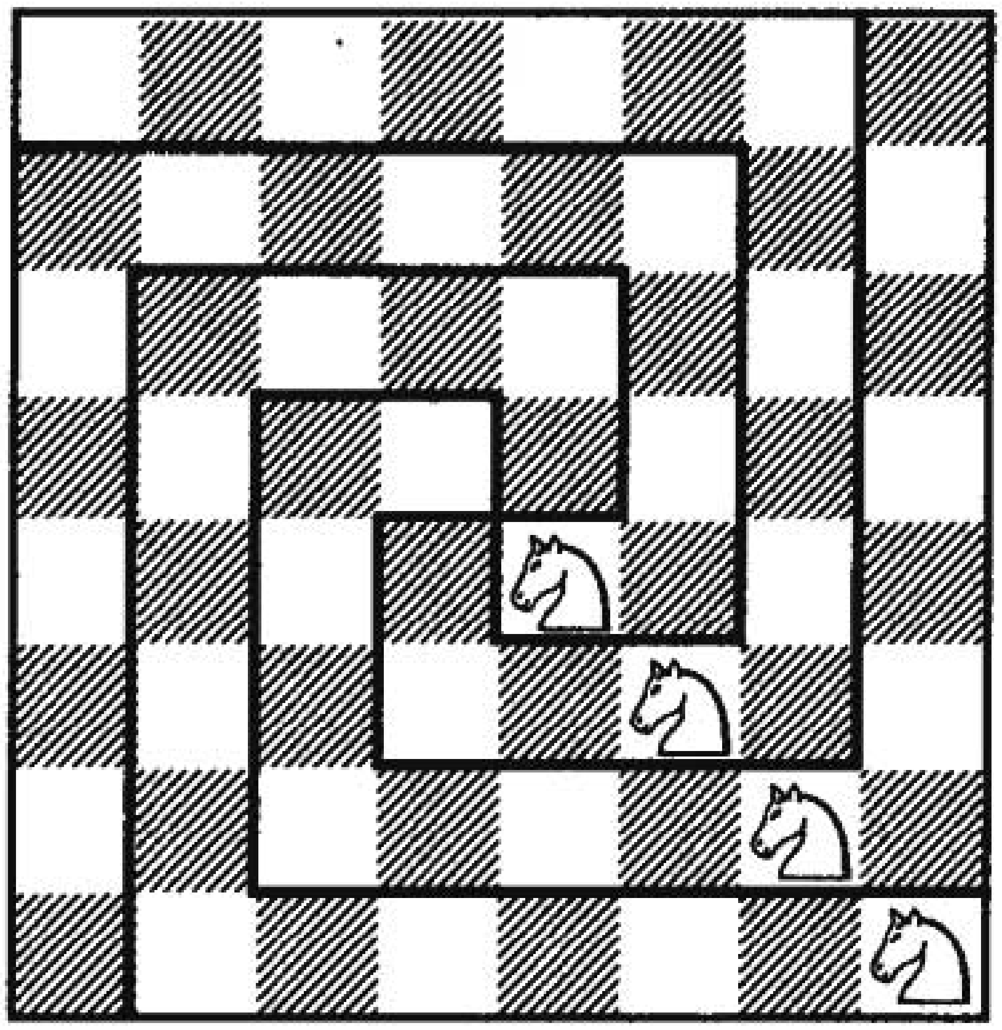


Figura 101.

El tablero atomizado

En la figura 102 vemos un tablero dividido en 32 dominós sin líneas de fractura.

En *Nuevos pasatiempos matemáticos* Martin Gardner dedica un interesante capítulo a los recubrimientos con "poliominós" (que

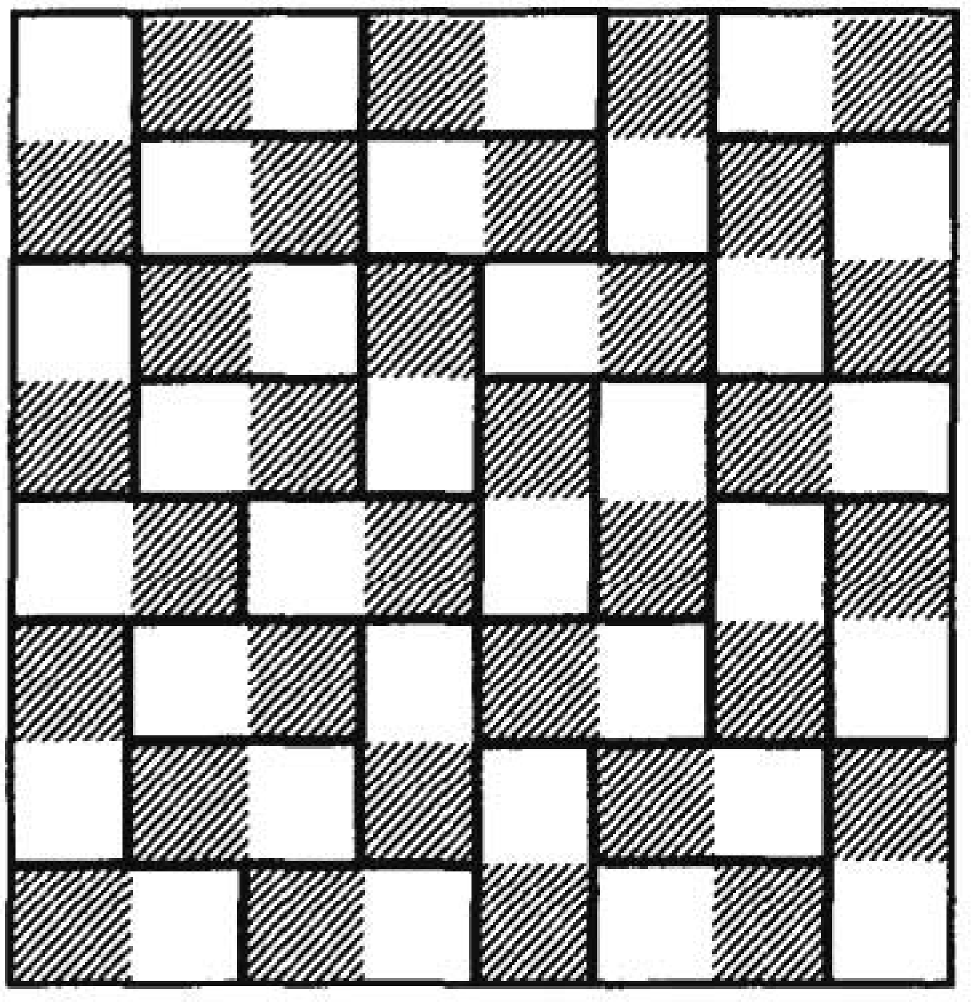


Figura 102.

constituyen una ampliación del concepto de dominó) y a los rectángulos de dominós sin líneas de fractura.

Particiones irregulares

En la figura 103 vemos el tablero del Delfín reconstruido a partir de los ocho trozos.

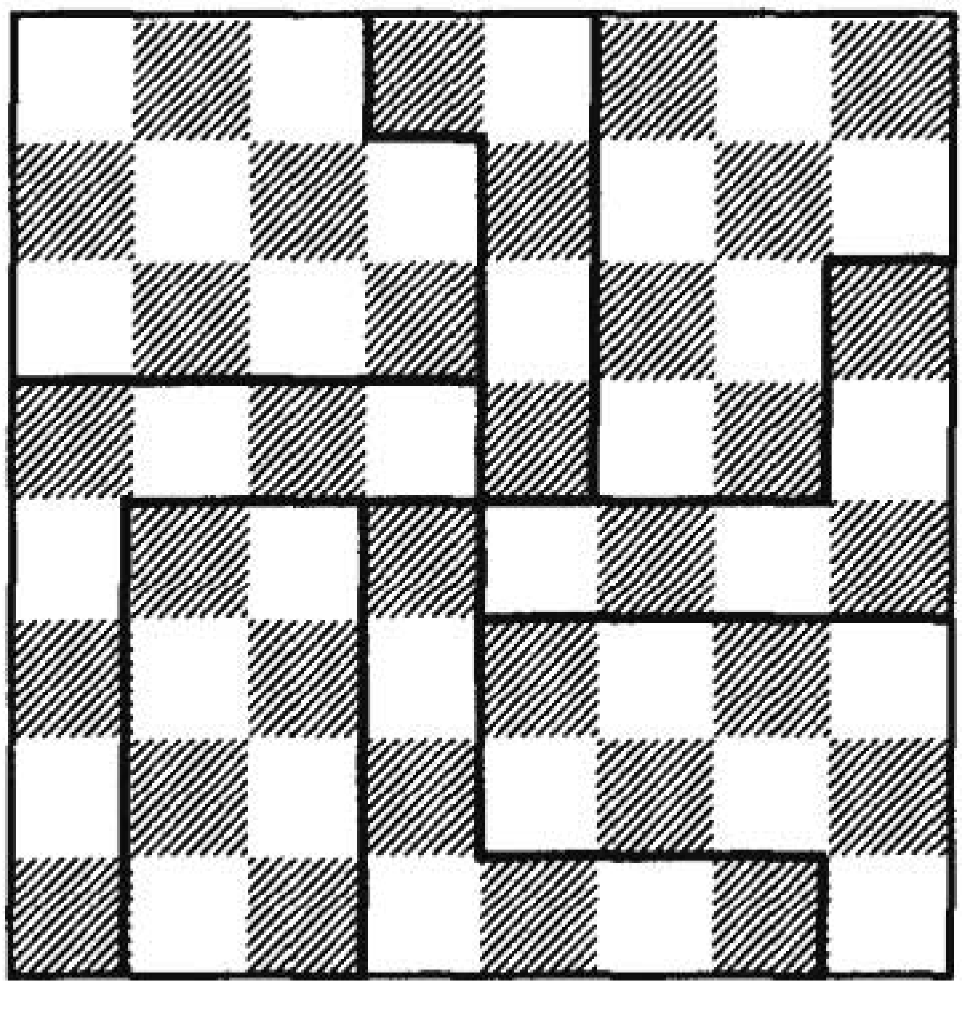


Figura 103.

Hay que dividir la forma de perímetro quebrado en tres trozos mediante dos cortes rectilíneos, tal como se ve en la figura 104.

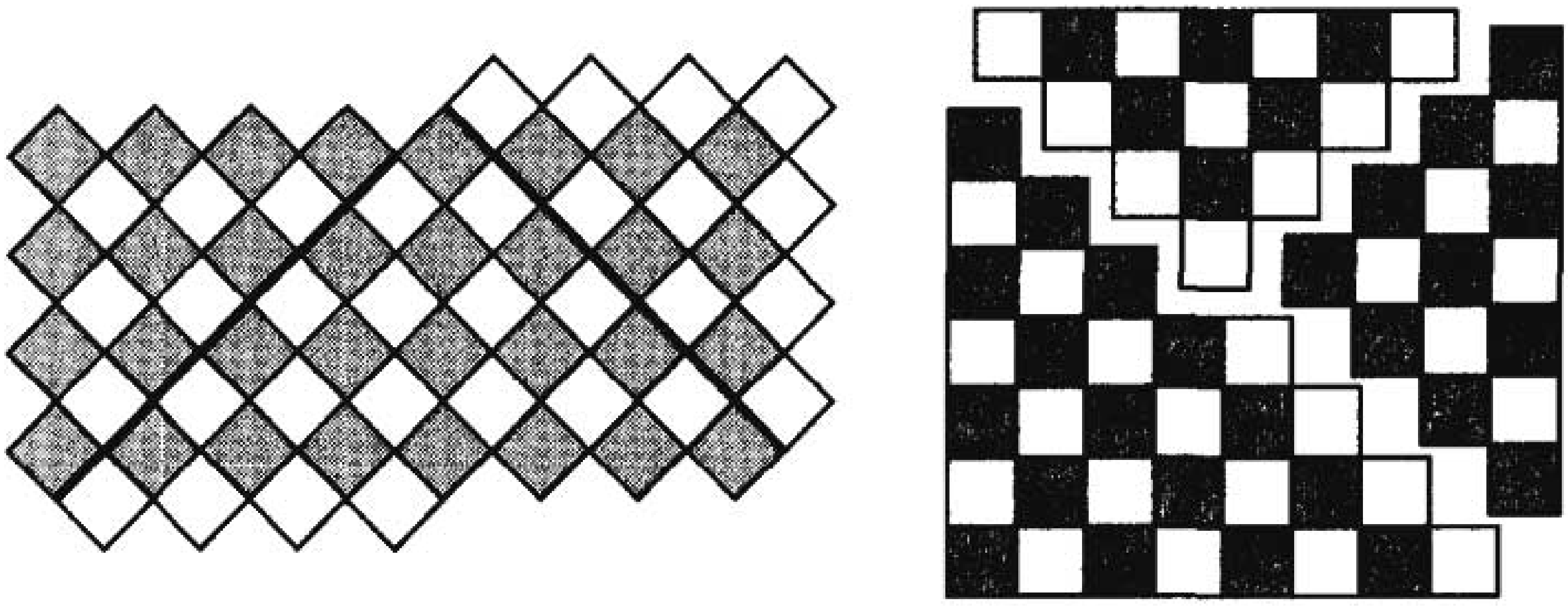


Figura 104.

El máximo número de trozos distintos en que se puede dividir el tablero es 18. En la figura 105 vemos dos posibles soluciones (ambas simétricas respecto del eje horizontal). En la primera no hay ningún trozo de más de 5 casillas. En la segunda hay un trozo de 8 casillas, que es el más grande que puede haber en una partición de este tipo.

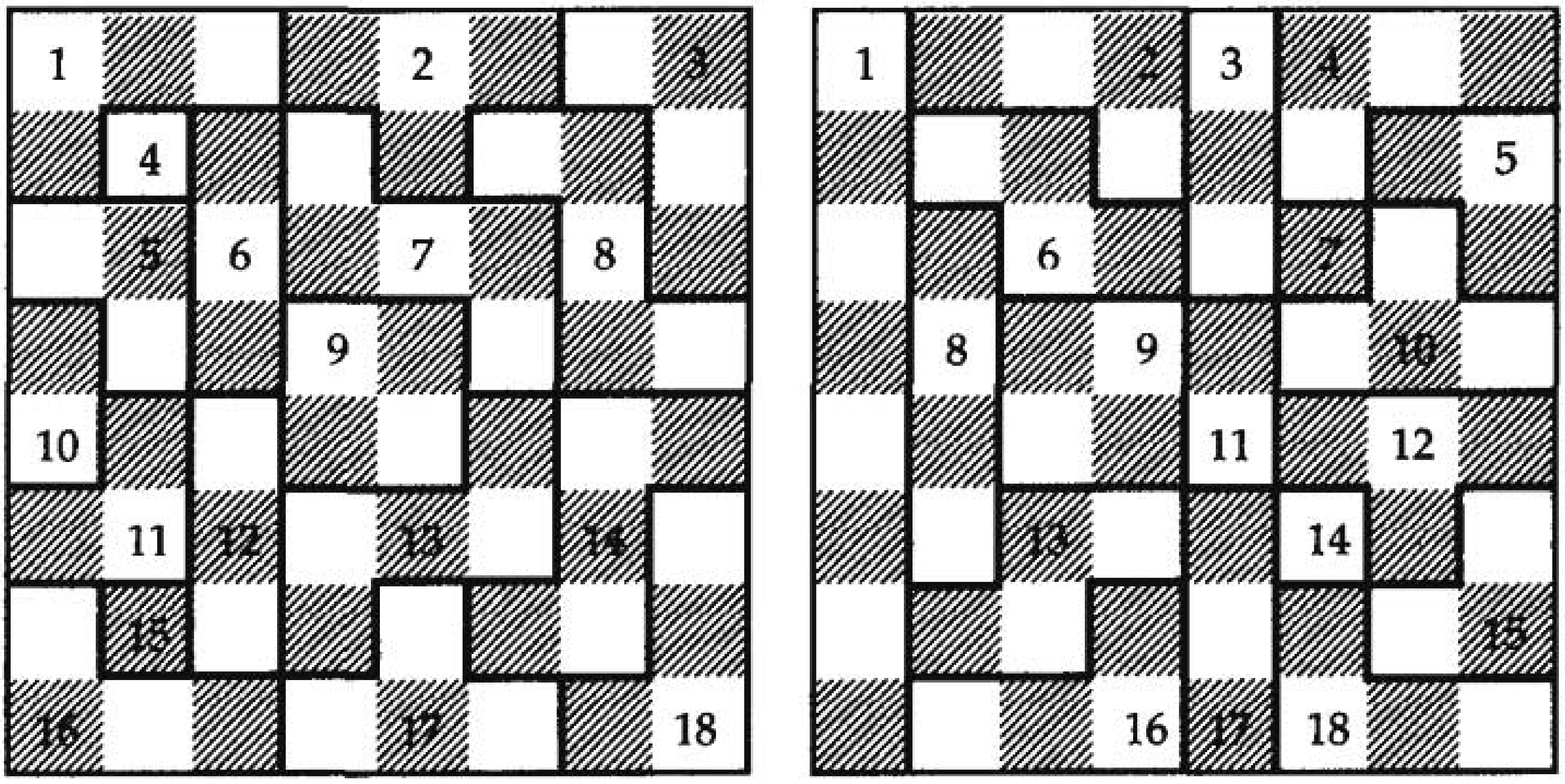


Figura 105.

13

El tablero usurpado

Como hemos visto al final del capítulo dedicado a él, Lewis Carroll inventó un interesante juego inspirado en la selección natural, el Lanrick, que se juega sobre un tablero de 8 × 8 y con fichas que se mueven como las damas del ajedrez.

Hay muchos juegos que utilizan como campo de batalla el tradicional damero y como ejércitos fichas que se mueven como alguna de las piezas del ajedrez; otros sólo utilizan el tablero, y sus fichas se mueven a su propia manera o no se mueven en absoluto. Se podría decir que, a partir del rey de los juegos, ha evolucionado toda una variedad de especies más o menos discrepantes del modelo original, desde los parientes próximos que son las distintas modalidades de ajedrez heterodoxo, hasta descendientes tan alejados como puedan estarlo las aves de sus antepasados reptiles.

El más conocido de los juegos que utilizan el tablero de 8 × 8 es el de las damas, del que no vamos a ocuparnos (precisamente por eso, por sobradamente conocido) sino para señalar que sus versátiles fichas (todas iguales y redondas y planas como monedas, blancas las de un bando y negras las del otro) pueden servir para una gran variedad de juegos que ocasionalmente usurpan el cuadriculado reino del ajedrez. Veamos algunos ejemplos.

Las damas chinas

Las damas chinas se suelen jugar en un tablero en forma de estrella de seis puntas; pero hay una versión simplificada que se juega sobre el tablero de ajedrez y partiendo de la disposición típica de las damas tradicionales, es decir, ocupando un bando las casillas negras de las tres primeras filas y el otro las de las tres últimas. También como en las damas tradicionales, las fichas se desplazan diagonalmente una casilla a la vez. Además, una ficha puede saltar tanto sobre las fichas contrarias como sobre las propias, y en una misma jugada puede efectuar tantos saltos consecutivos como le sea posible. Las fichas por encima de las cuales se salta no son retiradas del tablero, sino que siguen en su lugar, pues en este juego no se trata de eliminar al ejército contrario sino de ocupar, con las fichas propias, sus 12 casillas de partida (el primero que lo consigue, gana). Se puede mover y saltar hacia atrás, y no es obligatorio saltar siempre que se pueda hacerlo. En cada turno se mueve una sola ficha, ya sea para desplazarla a una casilla contigua libre o para saltar sobre otra ficha o varias en cadena.

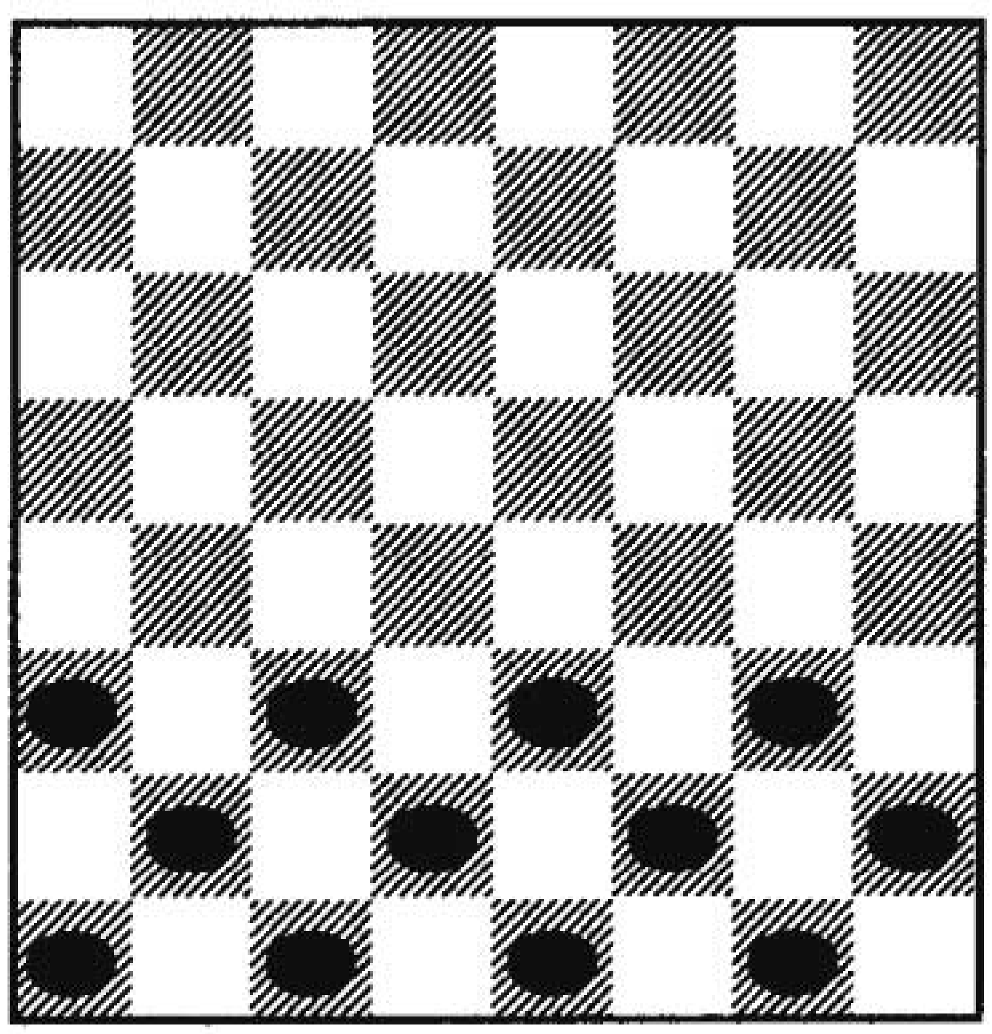


Figura 106.

Para familiarizarse con la interesante combinatoria de las damas chinas, el lector puede disponer en el tablero de ajedrez las 12 fichas de uno de los bandos, como se ve en la figura 106, e intentar llevarlas a las tres últimas filas en el menor número de jugadas. Tras varios intentos, aprenderá a utilizar las cadenas de fichas para efectuar saltos múltiples e irá reduciendo el número de jugadas necesarias; pero si logra hacerlo en 20 no intente mejorarlo: es el mínimo.

El halma

Las damas chinas son una variante de un juego más antiguo, llamado halma, que fue muy popular en Inglaterra a finales del siglo pasado.

Originariamente, el halma se jugaba en un tablero de 16 × 16. Los dos jugadores (aunque también podían jugar cuatro) disponían de 19 fichas cada uno, que situaban en las casillas de dos esquinas opuestas del tablero. Pero actualmente se suele jugar en el tablero normal de 8 × 8, con 10 fichas por bando inicialmente dispuestas como se ve en la figura 107.

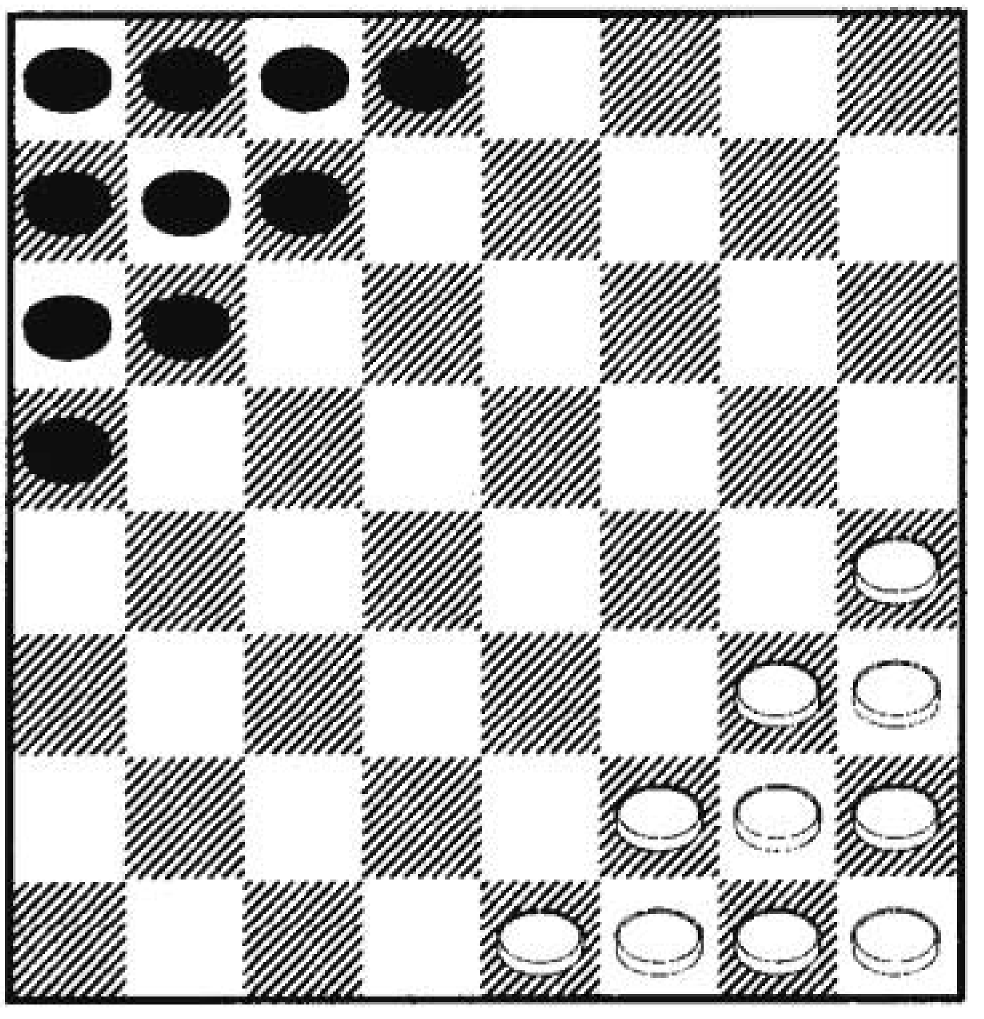


Figura 107.

El objetivo, como ya se ha señalado, es ocupar con las propias fichas las 10 casillas que inicialmente ocupan las fichas del contrario. Las fichas pueden moverse y saltar tanto diagonal como ortogonalmente (o sea que, cuando no saltan, se mueven como los reyes del ajedrez).

El experto en juegos y rompecabezas Michio Matsuda planteó un interesante problema basado en una variante del halma sobre el tablero de ajedrez japonés, que tiene 9 casillas de lado: se trata de llevar las 9 fichas de la figura 108 a la esquina opuesta del tablero (de forma que ocupen las casillas sombreadas) en el menor número de movimientos (una pista: hay que intentar alinear las fichas a lo largo de la diagonal principal, y el mínimo número de jugadas necesarias es 16).

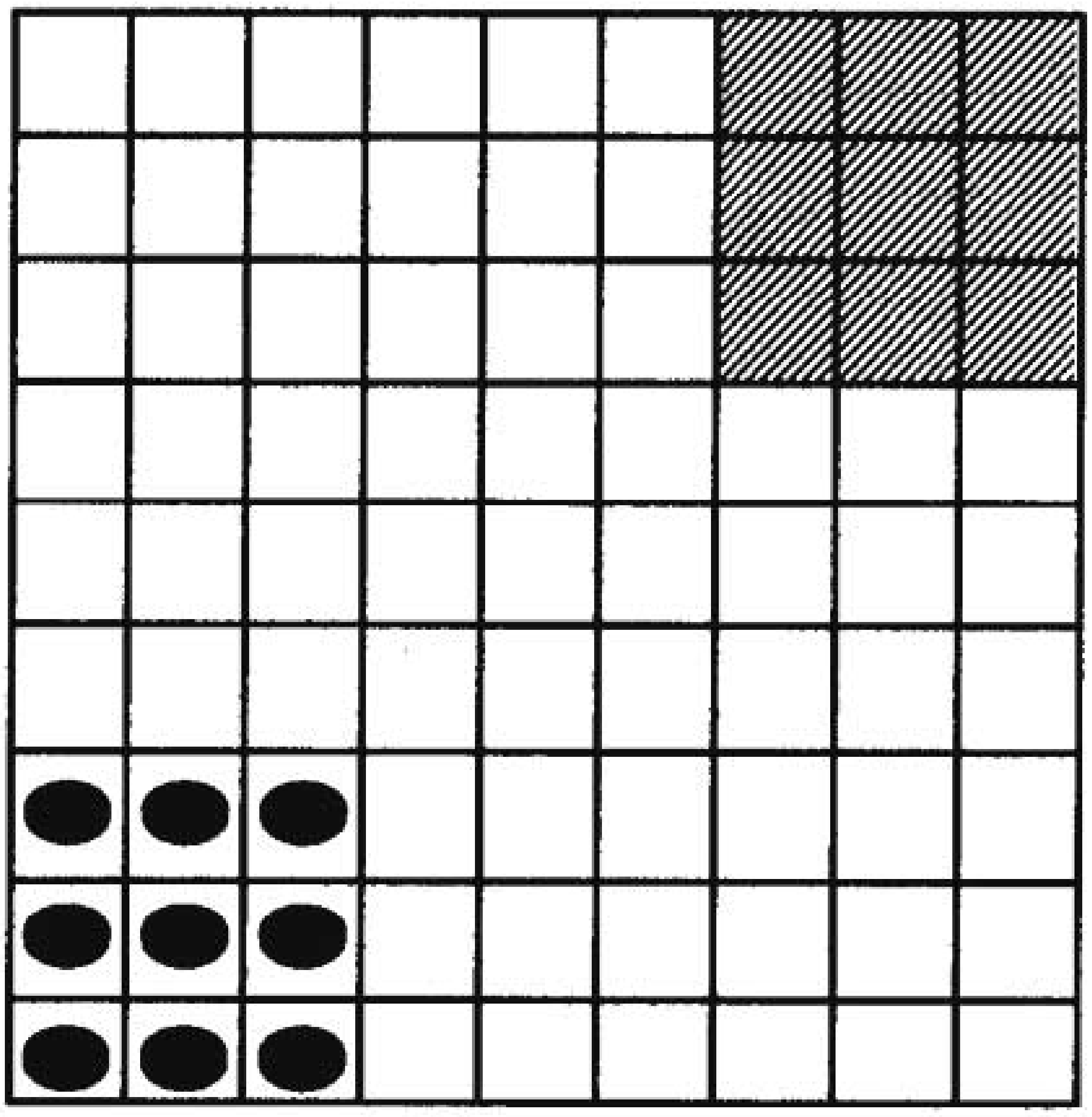


Figura 108.

El nim

El nim, del que se practican numerosas variantes, es un conocido juego para dos jugadores que consiste en ir retirando alternativamente las fichas (cerillas, monedas, guijarros, etc.) de varias hileras hasta que uno de los dos se lleva la última (con lo que, según las versiones, gana o pierde).

Una variante del nim se puede jugar sobre el tablero de ajedrez de la siguiente manera: un jugador coloca 8 fichas blancas en la primera fila y el otro 8 fichas negras en la última, como se indica en la figura 109. Luego, por turno, cada jugador mueve una de sus fichas hacia adelante tantas casillas como desee; cuando la ficha blanca y la negra de una misma columna llegan a casillas contiguas, ninguna de las dos puede seguir moviendo. Gana el jugador que hace el último movimiento.

Evidentemente, el juego equivale a ir quitando casillas de 8 hileras de 6 casillas cada una; cada jugador, cuando es su turno, tiene que eliminar, moviendo una de sus fichas, entre una y todas las casillas de una columna comprendidas entre su ficha y la del contrario.

El nim, en todas sus versiones, es un juego de los denominados "de estrategia segura", lo que significa que, jugando adecuadamente, uno de los jugadores (el primero o el segundo en mover,

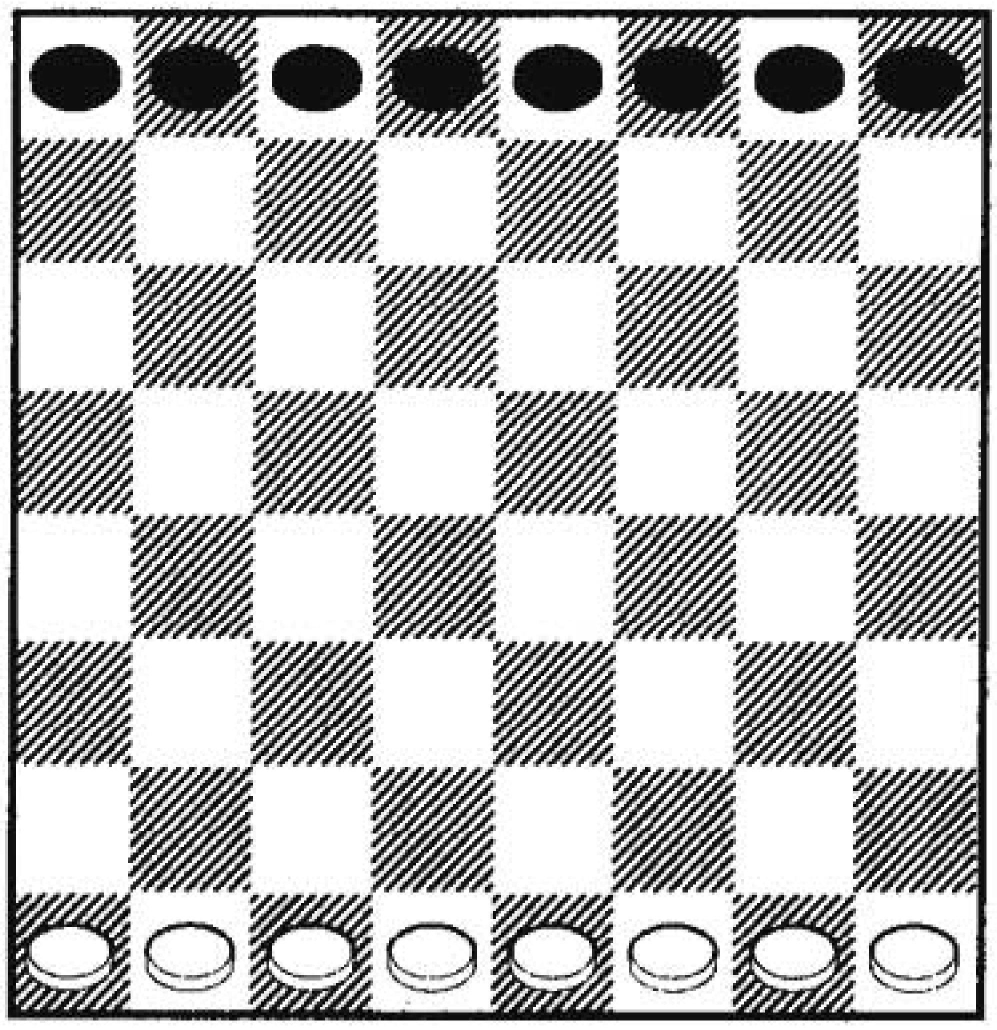


Figura 109.

según los casos) tiene asegurada la victoria. En esta variante concreta, el segundo en mover gana siempre siguiendo una sencilla estrategia (¿puede hallarla el lector?).

La zorra y los gansos

Una de las muchas variantes de este juego de origen medieval se juega sobre el tablero de ajedrez. Las fichas, como en las damas, sólo se mueven por las casillas negras. Uno de los jugadores tiene una sola ficha, la "zorra", que mueve en diagonal una casilla a la vez, en cualquier dirección; el otro jugador tiene 4 "gansos", que mueven también en diagonal y una casilla a la vez, pero sólo hacia adelante. No se come ni se salta por encima de otras fichas. El objetivo de los gansos es acorralar a la zorra hasta que no pueda moverse, mientras que ésta tiene que intentar abrirse paso entre ellos. La disposición de partida es la que se ve en la figura 110.

Hay toda una familia de juegos asimétricos de este tipo, en los que un jugador tiene varias fichas y el otro sólo una (o dos, o tres, pero en franca minoría), más poderosa; suelen tener nombres de animales, como "corderos y tigres", "vacas y leopardos" o "cuervos y buitres". En general, son juegos de estrategias sencillas y fácilmente analizables, y el lector deducirá sin dificultad, en el caso concreto de la zorra y los gansos, quién lleva las de ganar.

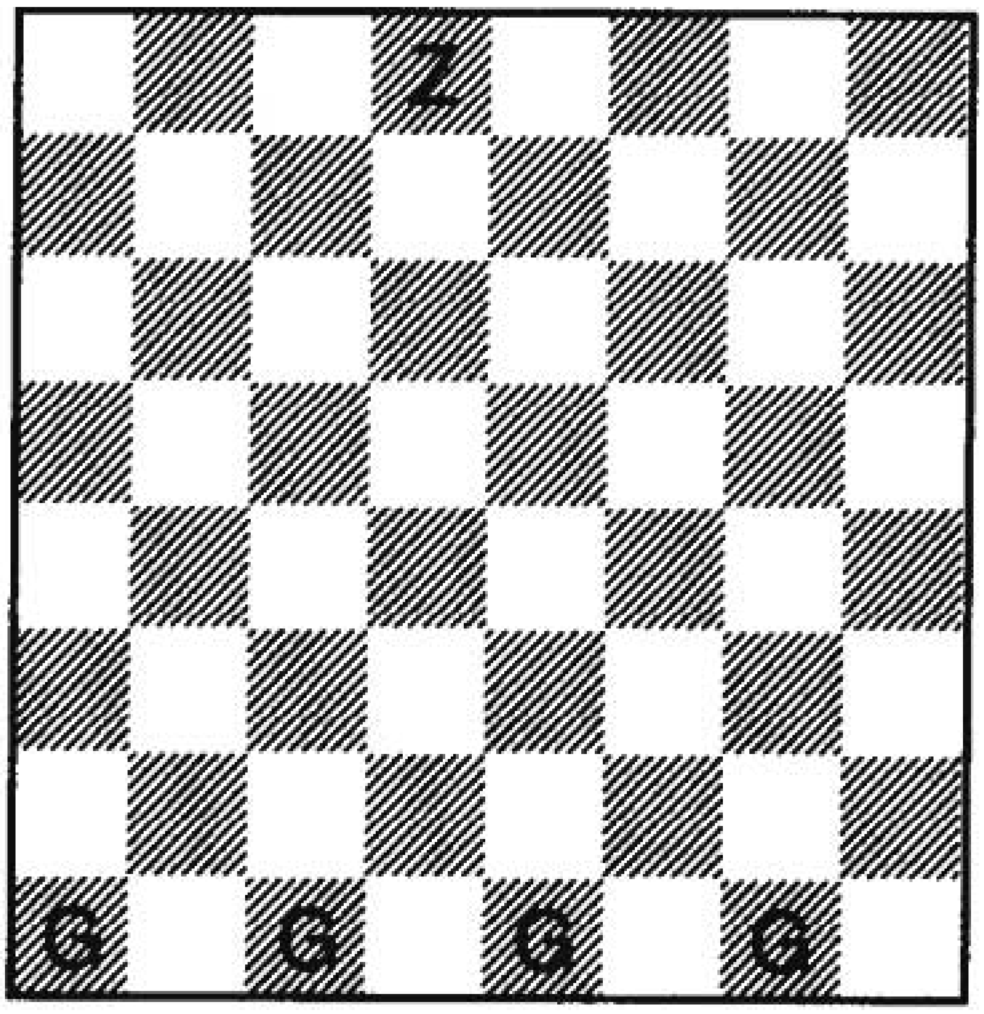


Figura 110.

El ambiguo maharajá

Los juegos de una sola ficha contra varias, como "la zorra y los gansos", tienen un claro exponente en el "maharajá", que ya vimos al hablar de ajedrez heterodoxo, y que constituye una prueba elocuente de que es imposible establecer una frontera nítida entre ajedrez de fantasía y juegos derivados del ajedrez: siguiendo con el símil evolucionista esbozado al principio del capítulo, podríamos considerarlo el "eslabón perdido" entre ambas especies. Por una parte, el maharajá se puede considerar una variante del ajedrez: de hecho, uno de los bandos dispone de las 16 piezas habituales y las mueve de forma ortodoxa; pero, por otra parte, el bando contrario dispone de una sola pieza, con lo que la alteración de la normalidad ajedrecística es tan drástica que casi cabe hablar de *otro* juego, más que de una variante del ajedrez.

En cualquier caso, esta ambigüedad taxonómica es un buen pretexto para volver a ocuparnos del escurridizo maharajá. Recordemos que el maharajá es a la vez dama y caballo (y también rey, si se quiere, pues el bando contrario ha de capturarlo para ganar la partida), y que al comienzo del juego puede colocarse en cualquier casilla libre (y no amenazada, puesto que el otro bando hace la primera jugada; para una revisión completa de las reglas, remito al lector a la página 86). Imaginemos, pues, que la partida comienza con la posición de la figura 111, con el maharajá en e4. ¿Cuál es la partida más breve en la que las blancas atacan sin parar (es decir, dan jaque al maharajá en todas las jugadas?) ¿Puede el lector encontrar otras partidas de duración mínima, con el maharajá en la misma u otra situación inicial? Ya se ha comentado que, si se juega correctamente, el maharajá lleva las de perder; pero ¿puede la partida terminar en tablas?

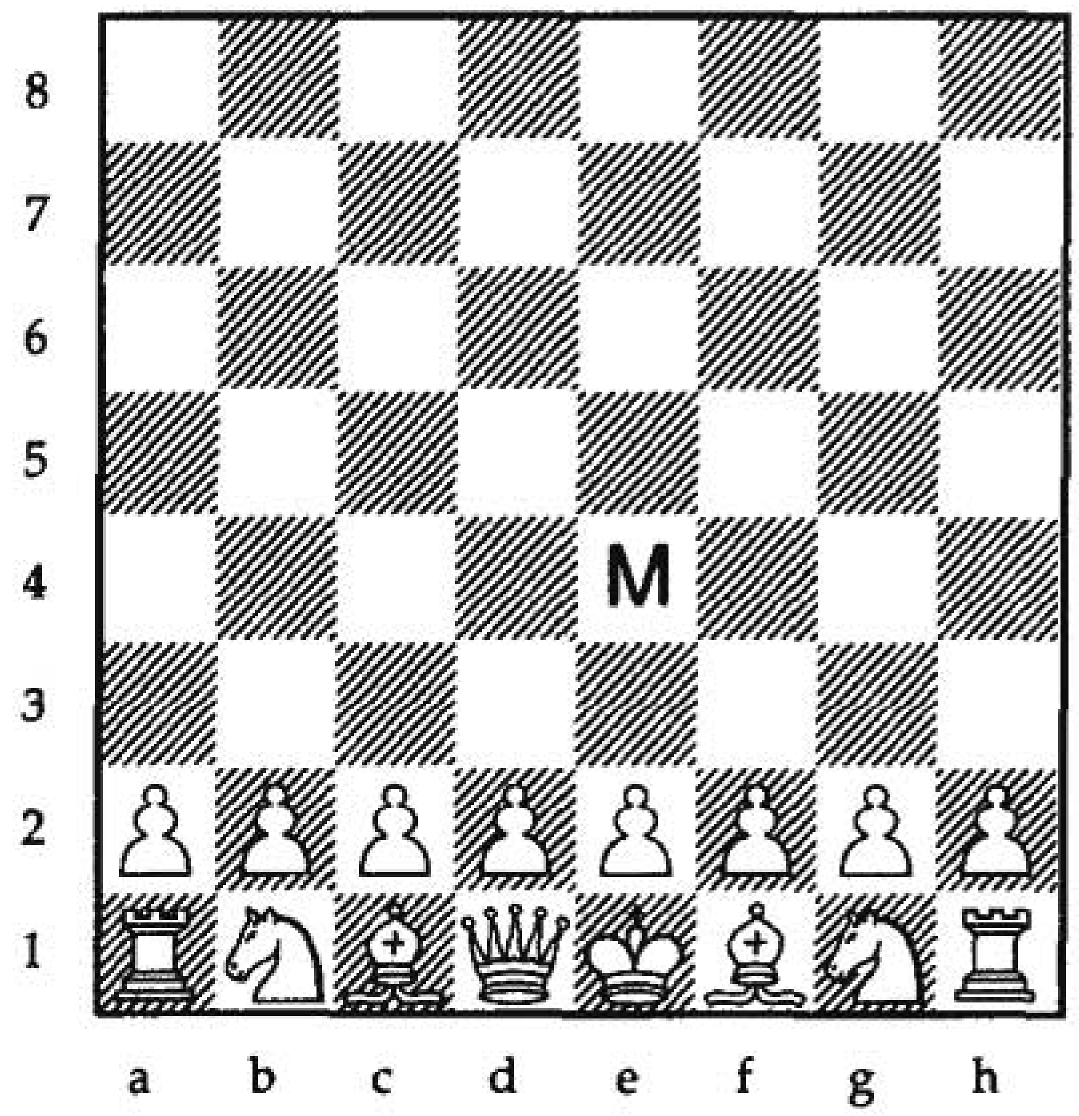


Figura 111.

Soluciones

Damas chinas

Hay varias soluciones en 20 movimientos. He aquí una de ellas (en cada movimiento se indica únicamente la casilla de salida y la de llegada, sin especificar los posibles saltos efectuados por la ficha):

1 a3-b4, 2 c1-c5, 3 b2-b6, 4 a1-b2, 5 b2-d4, 6 c3-c7, 7 b4-b8, 8 e1-e5, 9 d2-d6, 10 h2-f4, 11 c5-a7, 12 e3-e7, 13 d4-d8, 14 g1-g5, 15 f2-f6, 16 e5-g7, 17 g7-h8, 18 g3-g7, 19 f4-f8, 20 g5-h6.

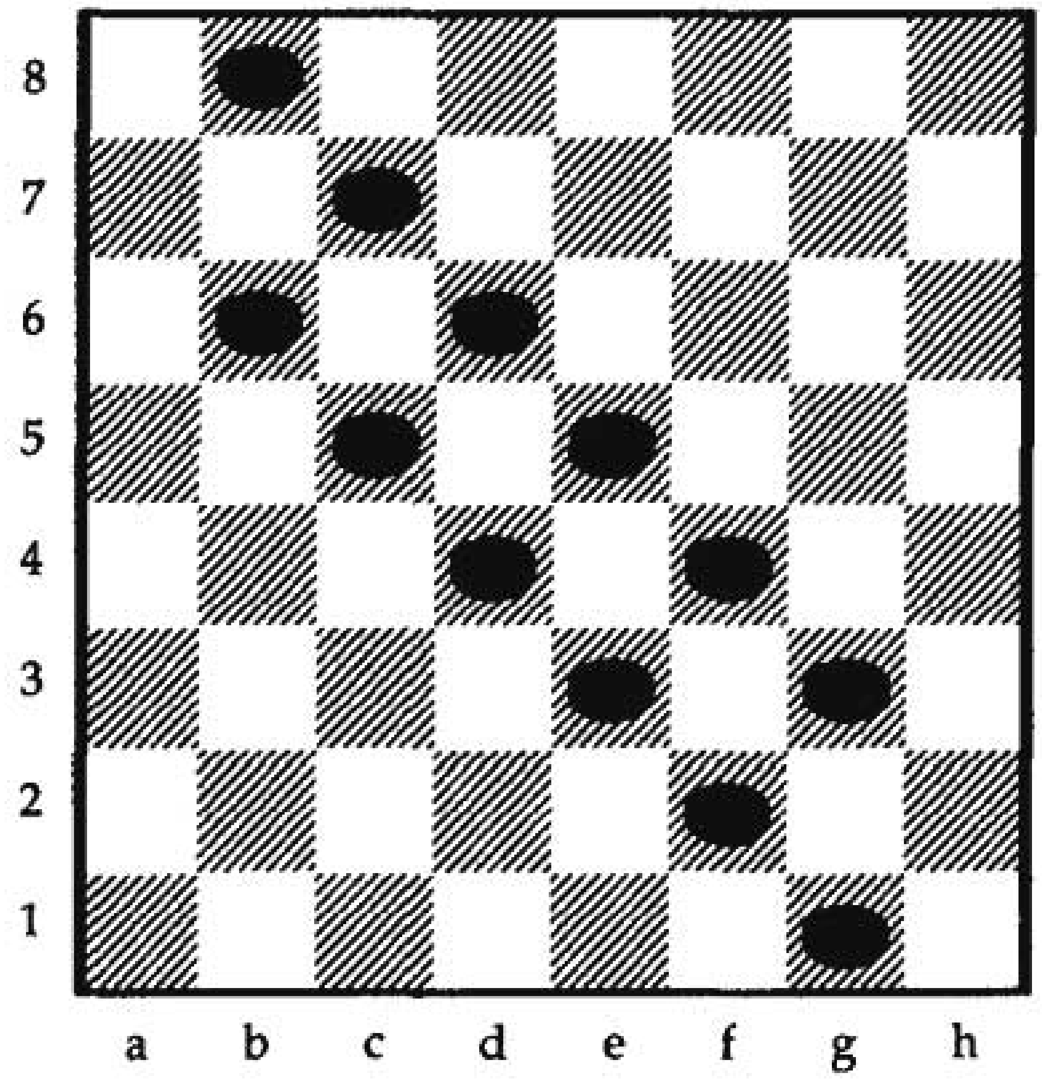


Figura 112. Posición después del décimo movimiento.

La solución es simétrica: con el décimo movimiento se llega a la posición de la figura 112, a la que evidentemente podríamos haber llegado desde el otro lado del tablero con los mismos movimientos, por lo que para completar el traslado no hay más que hacer, en sentido inverso, diez movimientos simétricos de los diez primeros.

Halma

En la figura 113 vemos la solución en 16 movimientos al problema de Matsuda.

En *Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas*, Martin Gardner dedica un capítulo al halma, donde comenta este problema y lo analiza en tableros de 6, 7 y 8 casillas de lado.

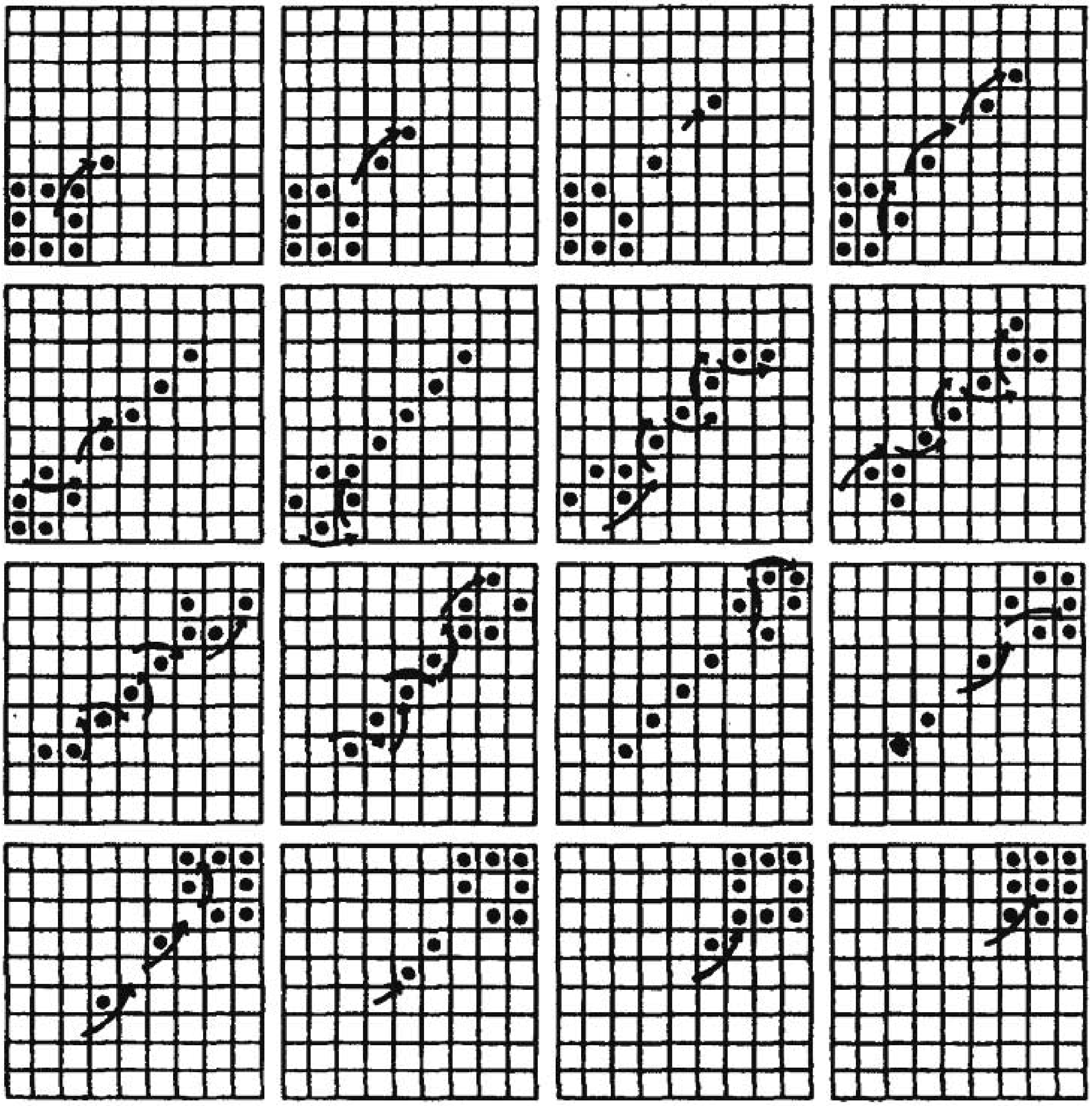


Figura 113.

Nim

Para ganar, el segundo jugador no tiene más que emparejar mentalmente las ocho columnas (lo más sencillo es emparejarlas especularmente: la 1ª con la 8ª, la 2ª con la 7ª, etc.) y repetir cada vez la jugada de su contrincante en la otra columna de la pareja. Si el primer jugador empieza avanzando 3 casillas su ficha de la 3ª columna, el segundo jugador avanzará 3 casillas su ficha de la 6ª columna; si luego el primer jugador adelanta 6 casillas su ficha de la 1ª columna, el segundo adelantará 6 casillas su ficha de la 8ª, y así sucesivamente. Por la simetría de la situación, el segundo jugador hará siempre el último movimiento.

La zorra y los gansos

Los gansos ganan siempre si siguen la estrategia correcta; sin embargo, el menor descuido permite que la zorra se escape entre ellos. Si las jugadas se piensan con detenimiento o si los jugadores tienen cierta práctica, el juego se vuelve trivial.

El maharajá

Con el maharajá en e4, podría producirse la fulminante y verosímil partida siguiente:

1 f3+, Mf5; 2 g4+, Mh4++.

Es el viejo "mate del tonto", que ya vimos en el primer capítulo, sólo que ahora el maharajá lo ha provocado astutamente invitando a los peones a acosarlo y situándose sorpresivamente en h4 gracias a su facultad de saltar como un caballo.

La condición equina del maharajá también permite otros desarrollos fulminantes distintos del "mate del tonto". Por ejemplo, se inicia la partida con el maharajá en d4 y las blancas adelantan su peón de rey a e3 para acosarlo a la vez que abren paso a sus piezas; el maharajá va a c5 y las blancas, incautamente, llevan su dama a e2 con intención de sacarla apoyada por el alfil; el maharajá come el peón de c2 y da jaque mate.

La partida puede terminar en tablas por ahogo del rey blanco, por ahogo del maharajá (su gran movilidad se ve compensada por el hecho de ser la única pieza de su bando) y por jaque continuo. En la figura 114 (juegan blancas) vemos una situación de tablas por ahogado.

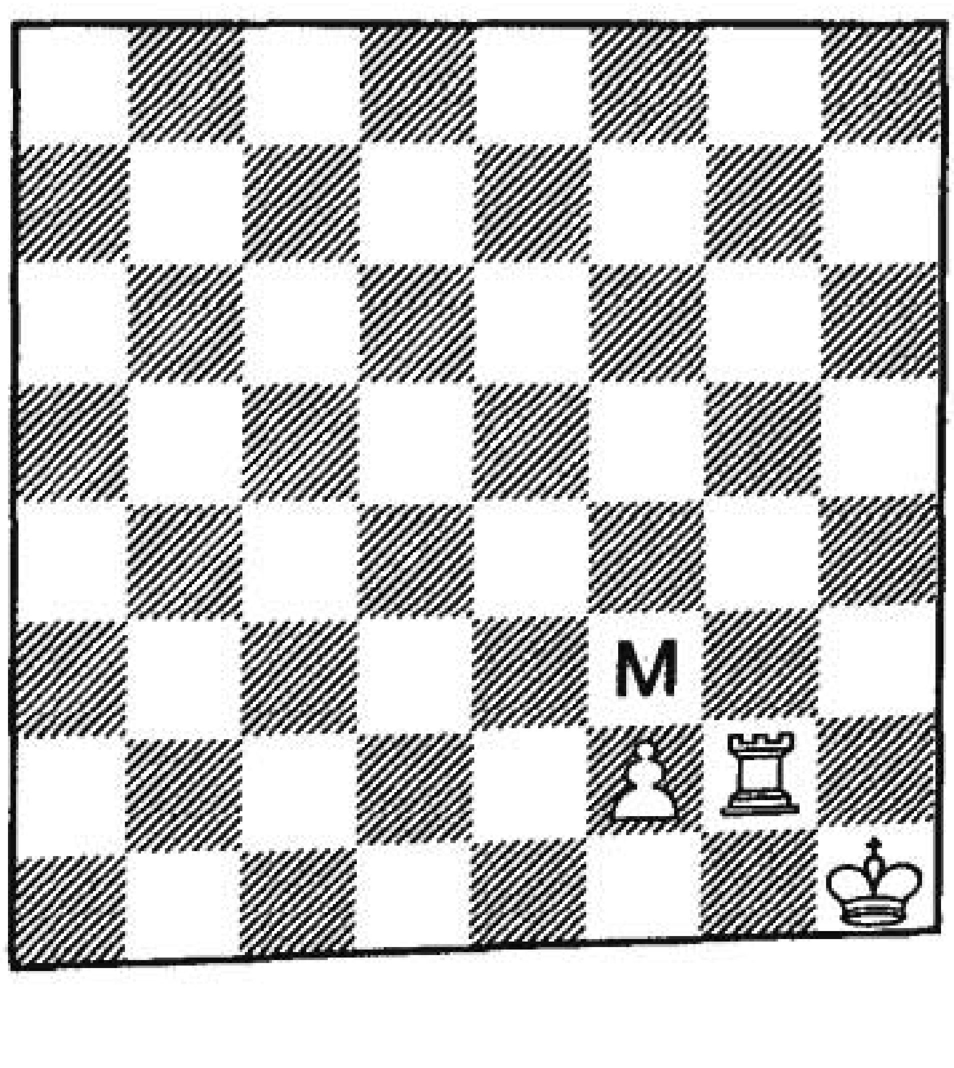


Figura 114.

14

El tablero inagotable

A lo largo del libro hemos ido viendo todo tipo de pasatiempos basados en el ajedrez: problemas convencionales (las blancas juegan y dan mate en *n*), "estudios" o "finales artísticos" (las blancas juegan y ganan), "tareas", coordinaciones de piezas, recorridos abiertos y cerrados, problemas heterodoxos y relativos a juegos derivados del ajedrez, particiones y recubrimientos del tablero, metaproblemas... Y con ello no hemos hecho más que dar un breve vistazo a la parte más conocida y sistematizable del ajedrez y sus aledaños. Pues si la enumeración anterior parece (y en cierto modo lo es) un intento de clasificación de los problemas basados en el ajedrez, en realidad deja fuera más de lo que consigna, ya que las posibilidades del tablero de 8 × 8 (más sus reducciones y ampliaciones) y los 32 trebejos (más sus híbridos y mutantes) son inagotables.

Para dar una vaga idea de lo mucho que ha quedado fuera de una clasificación que a primera vista podría parecer bastante completa, le propongo al lector una última y miscelánea tanda de problemas ajedrecísticos (o parajedrecísticos, si se prefiere) en los que, como en la guerra, de la que el ajedrez es símbolo y sublimación, todo vale.

Intercambio de caballos

Uno de los más antiguos problemas combinatorios basados en el ajedrez que se conocen fue compuesto por el italiano Guarini di Forli en 1512. En el tablero de 3 × 3 de la figura 115, hay que intercambiar las posiciones de los caballos blancos y negros (moviéndolos, naturalmente, de acuerdo con las reglas del ajedrez).

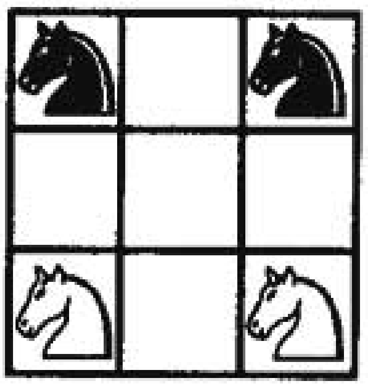


Figura 115.

Las 49 torres

En un tablero de 7×7 hay 49 torres, una en cada casilla. Hartas de estar siempre en el mismo sitio, deciden desplazarse, todas a la vez, cada una a una casilla contigua (naturalmente, puesto que son torres, no pueden mover en diagonal). ¿Cómo pueden hacerlo?

El tablero mal colocado

El francés Cognet compuso numerosos rompecabezas relativos a desplazamientos de las piezas por zonas restringidas del tablero, como el que vamos a ver a continuación.

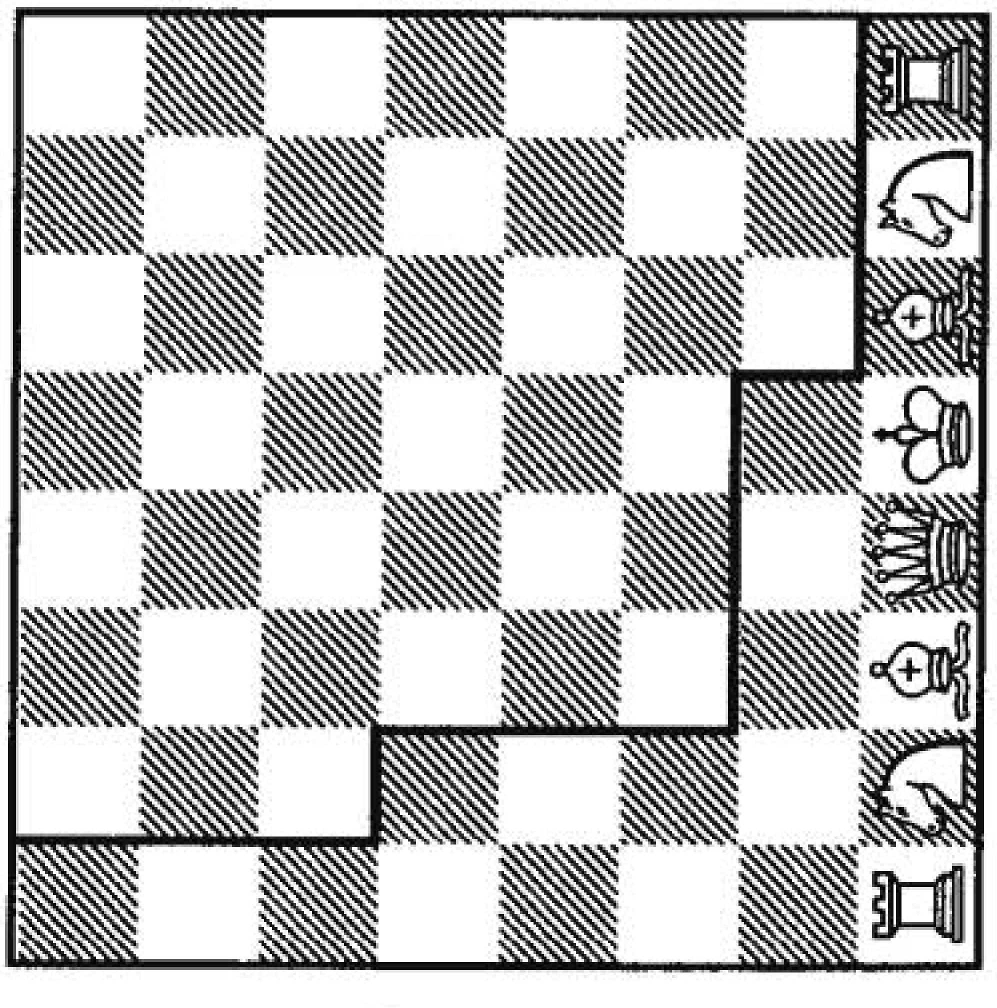


Figura 116.

Tras disponer las piezas blancas en el tablero, un ajedrecista se da cuenta de que las ha colocado mal, pues siempre hay que dejar una casilla blanca a la derecha. Entonces, como es un acérrimo partidario de la ley del mínimo esfuerzo, gira el tablero 90° y lo deja en la posición de la figura 116, para luego, con el menor número de movimientos, utilizando sólo la zona delimitada y moviendo cada pieza en una sola ocasión (aunque varias veces seguidas, si es necesario), dejar todas las piezas en su posición correcta. ¿Cuántos movimientos tiene que efectuar?

Una partida imprevisible

En vez de iniciar la partida con los ejércitos completos, dos jugadores, deseando introducir el azar en el ajedrez, van sacando de la caja de las piezas, sin mirar, una cada uno. Si las dos son blancas o las dos son negras, las ponen sobre el tablero en sus posiciones correspondientes; si son de distinto color, las descartan. ¿Cuál es la probabilidad de que al final de este curioso proceso haya sobre el tablero igual número de piezas blancas y negras?

Un círculo en el tablero

¿Cuál es el mayor círculo que podemos poner sobre un tablero de ajedrez de forma que su circunferencia pase solamente por casillas blancas?

Ecuación ajedrecística

En la figura 117, las cinco piezas blancas (rey, dama, torre, alfil y caballo) han sido sustituidas por letras. Los números en las casillas indican cuántas piezas amenazan a cada una, con lo que se plantea una sencilla seudoecuación. ¿A qué pieza corresponde cada letra?

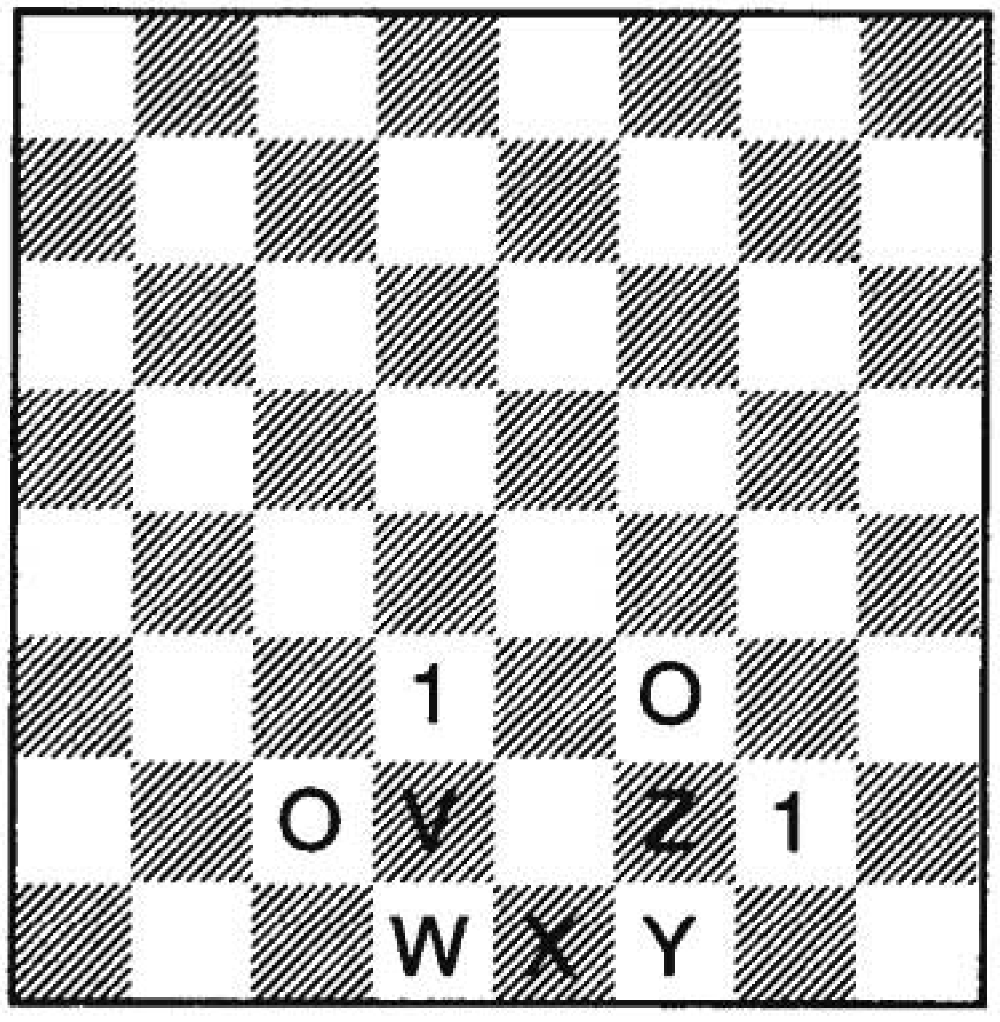


Figura 117.

Solitario unidimensional

El conocido solitario de la figura 118 (las fichas se comen saltando unas sobre otras y sólo ha de quedar la última, en el centro) y otros similares se pueden trasladar al tablero de ajedrez, usando todas sus casillas o (como en este caso) sólo una parte.

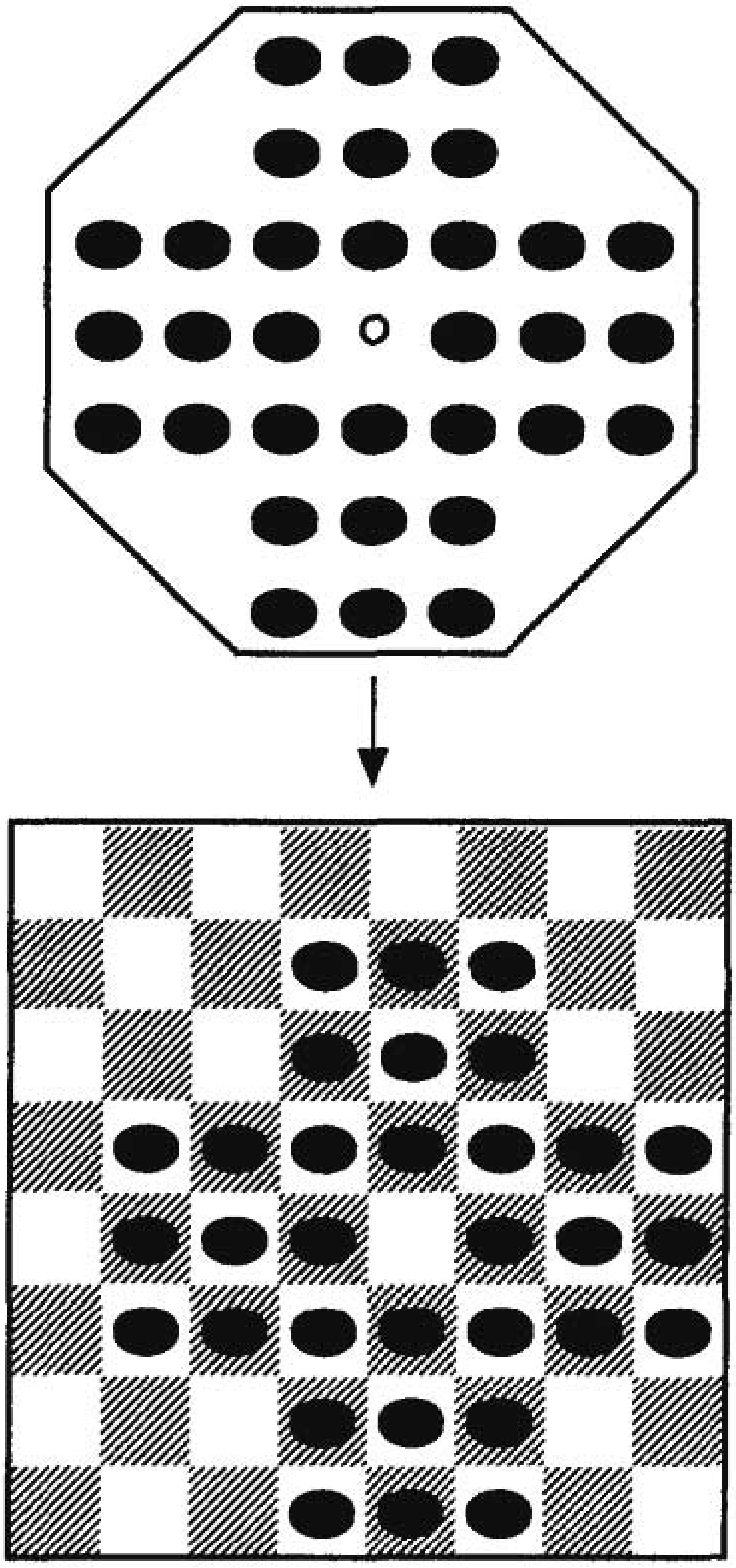


Figura 118.

Veamos un sencillo ejemplo de "solitario unidimensional" que se desarrolla linealmente en una única fila del tablero. Se colocan 3 peones blancos y 3 negros como se ve en la figura 119, dejando una casilla vacía entre ellos (la primera casilla de la izquierda no se usa). Los peones pueden desplazarse a una casilla contigua (si está vacía, claro) o saltar por encima de un peón de distinto color, y se trata de intercambiar las posiciones de los peones blancos y negros en el menor número de movimientos.

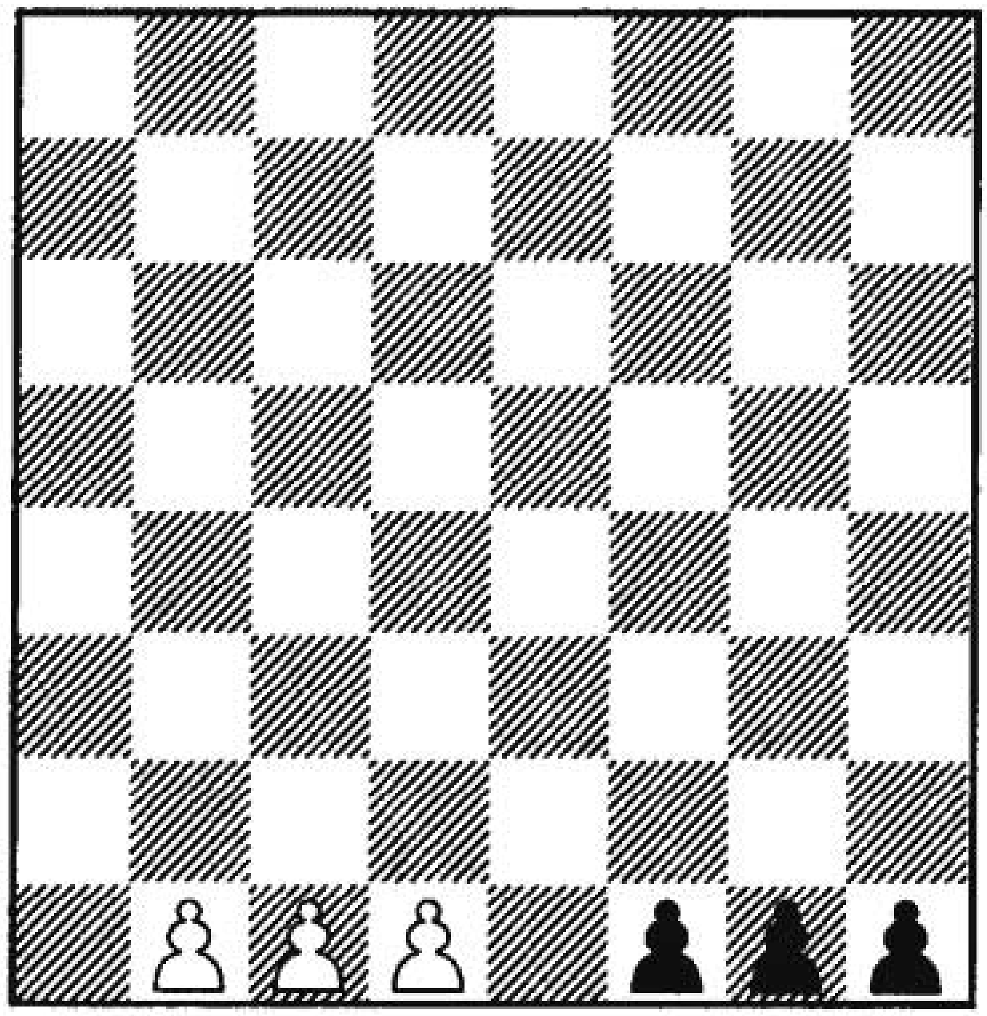


Figura 119.

Antiproblema

Y, para terminar, nada mejor que este curioso "antiproblema" (pues es exactamente lo contrario del problema de ajedrez convencional) del especialista alemán Karl Fabel (el ya mencionado coautor de *Ajedrez y matemáticas*). En la posición de la figura 120, las blancas juegan y *no* dan mate.

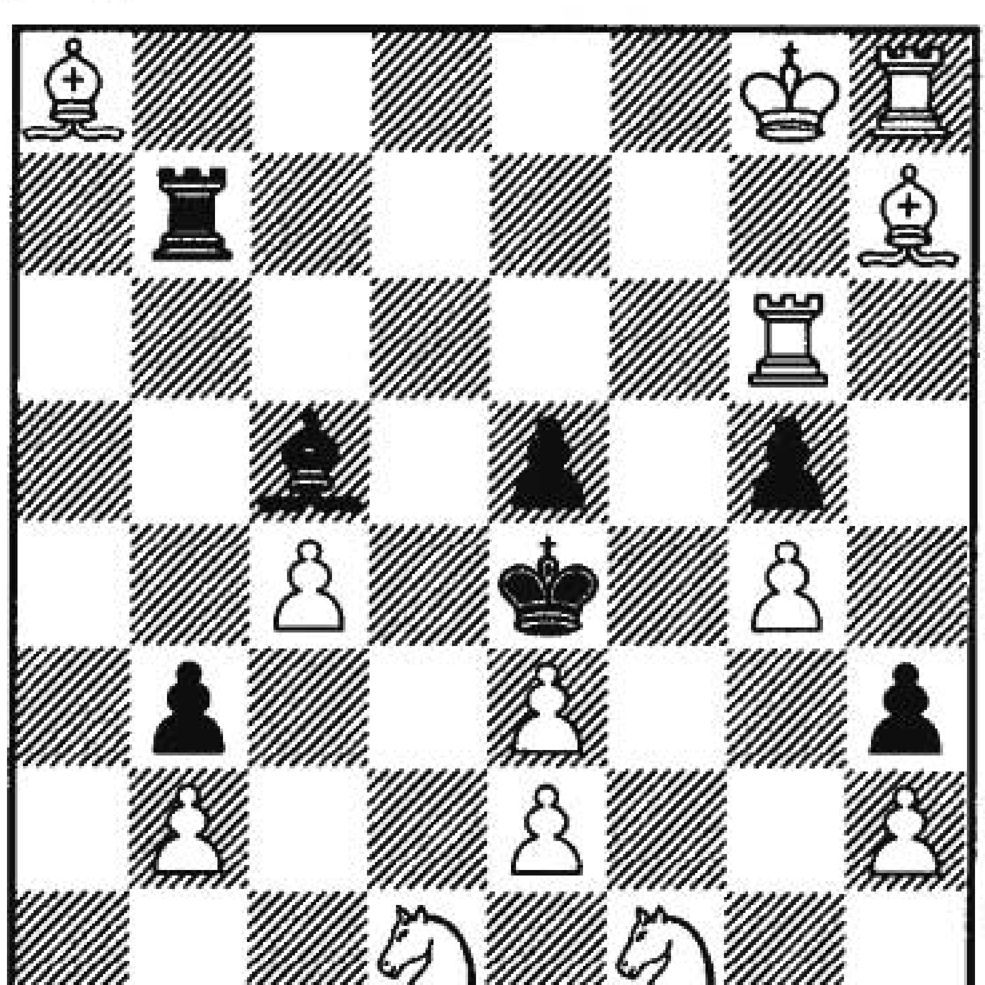
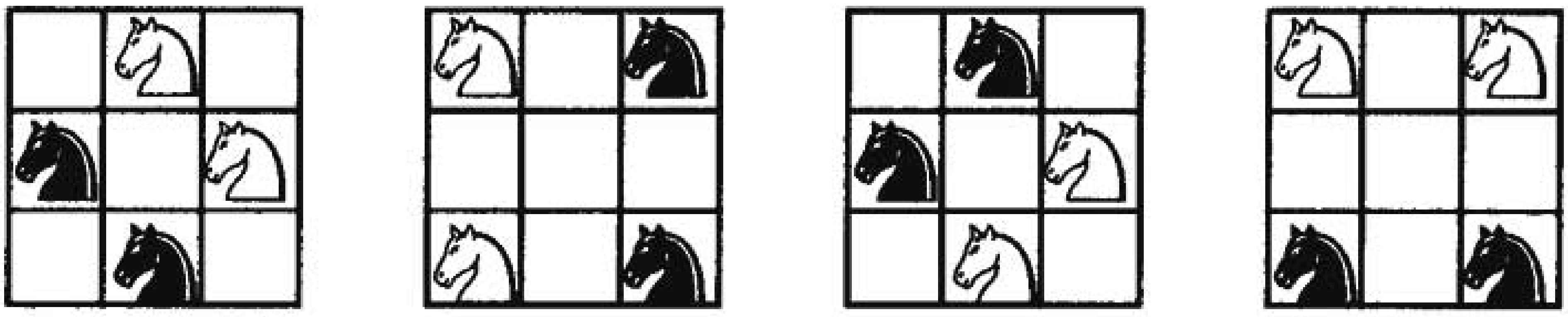


Figura 120. Las blancas juegan y no dan mate.

Intercambio de caballos

En la figura 121 vemos las cuatro fases de la solución: se trata de hacer que todos los caballos "giren" alrededor del minitablero en la misma dirección.



Fgura 121.

Como en cada fase se mueven los cuatro caballos, hace falta un total de 16 movimientos para completar el intercambio.

Las 49 torres

No pueden. Las casillas contiguas ortogonalmente son de distinto color, por lo que en el desplazamiento general planteado todas las torres cambiarían el color de su casilla. Pero en el tablero de 7 × 7 hay 25 casillas de un color y 24 del otro, por lo que tal intercambio es imposible.

El tablero mal colocado

La serie de movimientos mínima es la siguiente: Ta1; Cf1, Cd2, Cb1; De1, Dd2; Af1; Cg5, Ch3, Cg1; Ag5, Ah4, Ae1, Ad2, Ac1; Rh4, Rg3, Rf2, Re1; Th1. Son necesarios, pues, 20 movimientos.

Una partida imprevisible

La probabilidad es 1, es decir, hay certeza total: puesto que cada vez se descartan juntas una pieza blanca y una negra, siempre se descartará igual número de cada color, luego también habrá igual número en el tablero.

Un círculo en el tablero

Tomando como centro el de una casilla blanca, se puede trazar una circunferencia como la de la figura 122, que sólo pasa por casillas blancas y es la mayor que cumple esta condición.

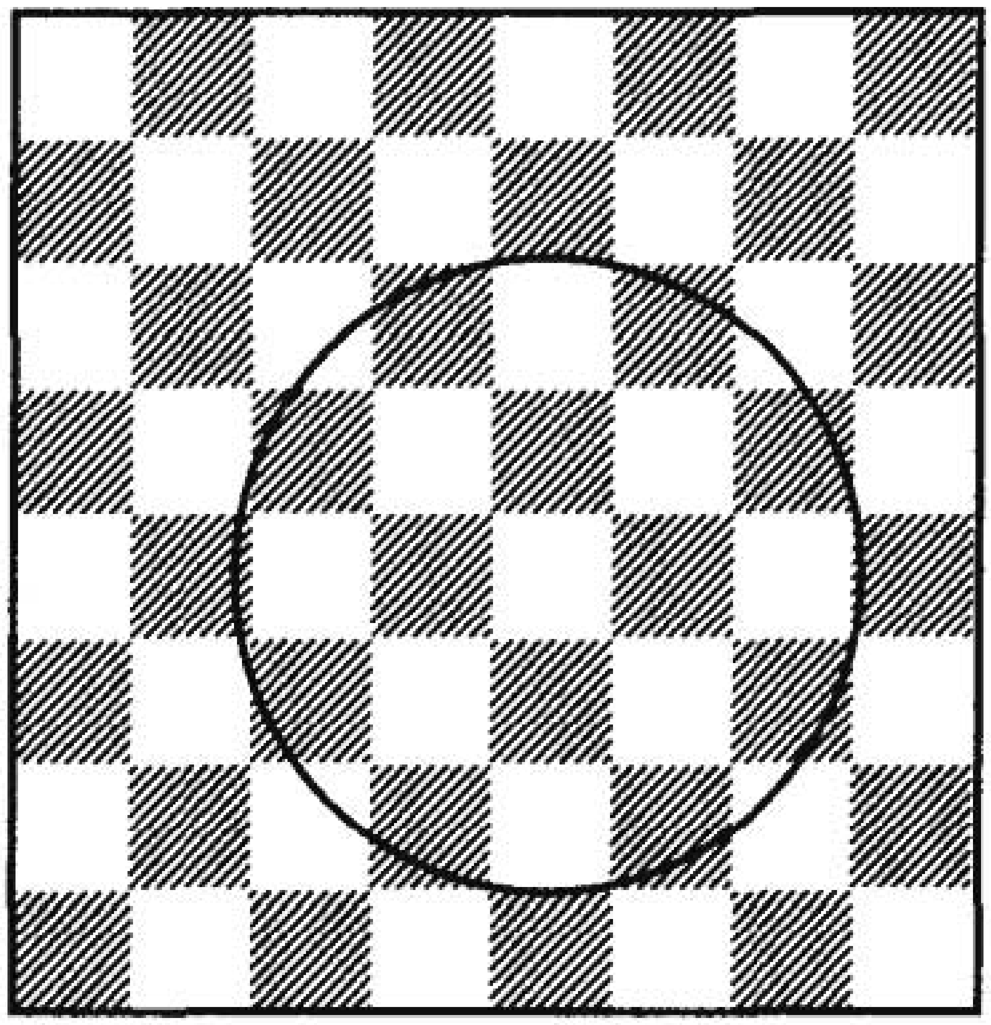


Figura 122.

Ecuación ajedrecística

La *V* es el alfil, la *W* la torre, la *X* la dama, la *Y* el rey y la *Z* el caballo.

Solitario unidimensional

Si numeramos las casillas de 1 a 7, una solución mínima (en 15 movimientos) es la siguiente: 356421357642354 (los números indican la casilla que queda vacía en cada movimiento).

Antiproblema

La única jugada de las blancas que no implica jaque mate es Tc6. De esta manera dan jaque al rey negro con el alfil, pero las negras pueden tomarlo con su torre.

Bibliografía esencial

Como he señalado en el prólogo, en la mayoría de los libros de matemática recreativa hay algún problema relacionado con el ajedrez, y también es frecuente que en los tratados de ajedrez se aluda de pasada a alguno de los temas aquí expuestos; sin embargo, son muy escasos los libros que les prestan una atención especial, por lo que, a la hora de redactar una bibliografía, me he visto en el dilema de consignar sólo unos pocos títulos básicos o de ofrecer una larga lista de libros en la mayoría de los cuales la aportación a la materia que nos ocupa no pasa de una página o dos. Me he decidido sin muchas dudas por la primera opción, ya que la segunda, más que ayudar al lector, habría contribuido a desorientarlo.

Me he limitado, pues, a dar la referencia bibliográfica completa de los títulos ya citados a lo largo del libro más unos pocos de interés general: en total, una veintena (ocho de los cuales son de Martin Gardner, lo cual da una idea de mi deuda con él), pero casi todos ellos asequibles y sustanciosos. Más que una bibliografía, es una lista de lecturas recomendadas y libros de referencia imprescindibles.

Bell, Robbie y Cornelius, Michael. *Board Games Round the World*. Cambridge University Press, 1988. (*Juegos con tablero y fichas*. Labor, Barcelona, 1990.)

Bonsdorff, Fabel y Riihimaa. *Schach und Zahl*. Walter Rau Verlag, Düsseldorf, 1971. (*Ajedrez y matemáticas*. Martínez Roca, Barcelona, 1974.)

Borrell, Máximo. *Ajedrez brillante*. Bruguera, Barcelona, 1975.

Caputto, Zoilo R. *El arte del estudio de ajedrez*. Eseuve, Madrid, 1992.

Dudeney, Henry E. *Amusements in Mathematics*. Thomas Nelson, Londres, 1917.

Fisher, John. *The Magic of Lewis Carroll*. Thomas Nelson, Londres, 1973. También en Penguin Books, 1975.

Gamow, George. *One, Two, Three... Infinity*. The Viking Press, Nueva York, 1947. (*Uno, dos, tres... infinito*. Espasa Calpe, Madrid, 1948 y 1969.)

Gardner, Martin. *Mathematical Puzzles and Diversions*. Simon and Schuster, Nueva York, 1959.

— *The Annotated Alice*. Clarkson N. Potter, Nueva York, 1960. También en Penguin Books, 1970, edición revisada. (*Alicia anotada*. Akal, Madrid, 1984.)

— *New Mathematical Diversions*. Simon and Schuster, Nueva York, 1966. (*Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza, Madrid, 1972.)

— *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*. Simon and Schuster,

Nueva York, 1969. (*El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos*. Alianza, Madrid, 1991.)
— *Mathematical Carnival*. Alfred A. Knopf, Nueva York, 1975. (*Carnaval matemático*, Alianza, Madrid, 1980.)
— *Mathematical Circus*. Alfred A. Knopf, Nueva York, 1979. (*Circo matemático*, Alianza, Madrid, 1983.)
— *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*. W. H. Freeman, Nueva York, 1983. (*Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas*. Labor, Barcelona, 1985.)
— *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*. W. H. Freeman, Nueva York, 1988. (*Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*. Labor, Barcelona, 1988.)

Ignatiev, E.I. *En el reino del ingenio*. Mir, Moscú, 1979.

Karpov, Anatoli y Guik, Eugeni. *Mosaico ajedrecístico*. Raduga, Moscú, 1984.

Loyd, Sam. *Cyclopaedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums*. Bigelow, Nueva York, 1914.

Smullyan, Raymond. *The Chess Mysteries of Sherlock Holmes*. Alfred A. Knopf, Nueva York, 1979. (*Juegos y problemas de ajedrez para Sherlock Holmes*. Gedisa, Barcelona, 1986.)
— *The Chess Mysteries of the Arabian Knights*. Alfred A. Knopf, Nueva York, 1981. (*Juegos de ajedrez y los misteriosos caballos de Arabia*. Gedisa, Barcelona, 1986.)

Wells, David. *The Penguin Book of Curious and Interesting Puzzles*. Penguin Books, Londres, 1992.

El ajedrez no sólo es el rey de los juegos sino que, además, ha fascinado desde siempre a matemáticos, lógicos y autores de problemas de ingenio.

El tablero mágico es una recopilación sistemática de los diversos tipos de juegos, pasatiempos y rompecabezas, surgidos alrededor de ese «cuadrado mágico» que es el tablero de ajedrez y de esos ejércitos en miniatura que son sus piezas.

juegos

No es un libro dirigido sólo (ni siquiera principalmente) a los ajedrecistas: para entender y disfrutarlo, así como para resolver los problemas que en cada capítulo se propone al lector basta con conocer las reglas básicas del juego.

«El problema de las ocho damas», «Alicia en el tablero de las maravillas», «El tablero roto» o «El tablero usurpado» son algunos de los temas que dejan entrever la clase de aventura con que el autor nos sorprenderá.

Carlo Frabetti, quien se define como discípulo y admirador de **Martin Gardner y Raymond Smullyan**, fue director de la sección «El juego de la lógica» de la revista científica *Algo* y es autor de numerosos textos de divulgación lógica y científica, dedicada en buena parte al ámbito escolar.

gedisa
editorial

Cod. Int. 0820