www.esffranco.edu.pt
(2022/2023)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 11.º 19

3.º Período 29/05/2023 Duração: 90 minutos

Nome: ______________________________ N.º:

Classificação: ___ , ___ O professor:

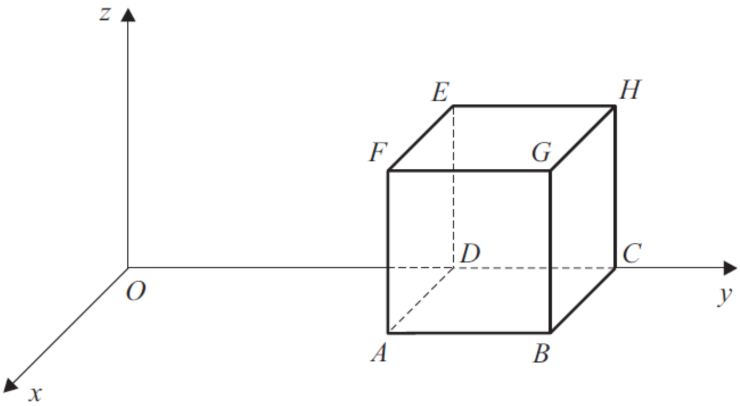
Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

---

1. Considera a progressão geométrica (v_n), monótona e tal que $v_2 = 72 \wedge v_4 = 8$.

Calcula a soma de todos os termos de (v_n).



2. Na figura junta, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy;
- a aresta $[CD]$ está contida no eixo Oy;
- o vértice E tem coordenadas $(0,4,2)$.

2.1. Qual das condições seguintes define a superfície esférica inscrita no cubo $[ABCDEFGH]$?

(A) $(x+1)^2+(y+5)^2+(z+1)^2=1$ **(B)** $(x-1)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=1$

(C) $(x+1)^2+(y+5)^2+(z+1)^2=4$ **(D)** $(x-1)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=4$

2.2. Considera:

- o plano α definido pela equação $4x-2y-3z+1=0$;
- a reta r, perpendicular ao plano α e que contém o vértice E.

Determina as coordenadas do ponto de interseção entre a reta r com o plano xOz.

2.3. Admite que um ponto P se desloca ao longo do semieixo positivo Oz, nunca coincidindo com a origem O do referencial.

Seja p a função que faz corresponder, à cota z do ponto P, o perímetro do triângulo $[OPD]$.

2.3.1. Mostra que $p(z) = z + 4 + \sqrt{z^2+16}$.

2.3.2. Determina, usando processos analíticos, a cota do ponto P de modo que o perímetro do triângulo $[OPD]$ seja igual a 14.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática A, 2.ª fase de 2017

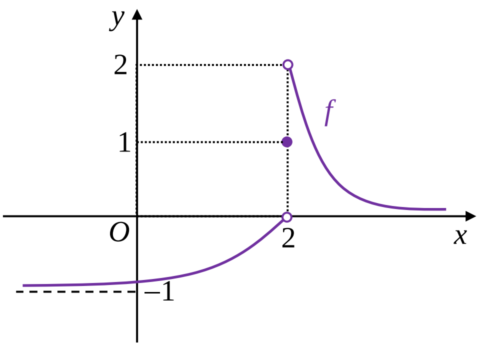
3. Os lucros de um certo banco, em milhões de euros, são dados, t meses após o início de 2022, pela função definida por

$$l(t)=\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{3}t^2+t+14,\text{ com } 0\le t\le 9.$$

Qual foi o aumento médio dos lucros do banco, em milhões de euros por mês, nos primeiros seis meses de 2022?

(A) 28 **(B)** 24 **(C)** 14 **(D)** 12

4. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.



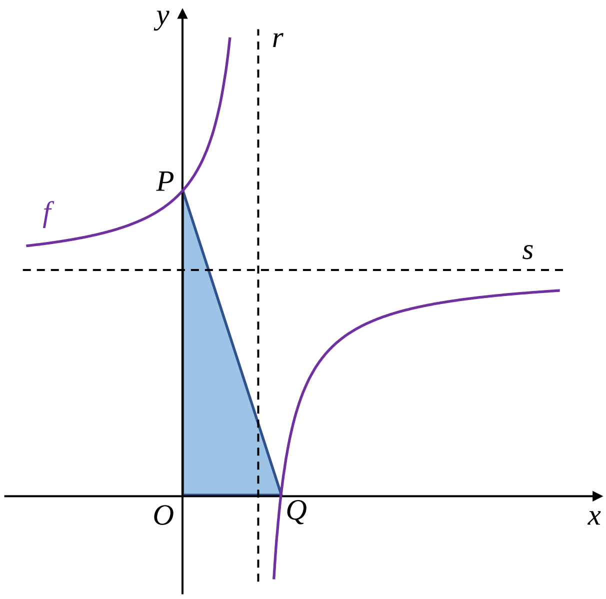
As retas de equações $y=-1$ e $y=0$ são assíntotas horizontais ao gráfico da função f.

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n=2-\frac{2000}{2^n}$.

A que é igual $\lim f(u_n)$?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** -1

5. Considera, na figura, o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, definida por $f(x)=\frac{4-3x}{1-x}$ e o triângulo $[OPQ]$.



Sabe-se que:

- o ponto P pertence ao gráfico de f e ao eixo Oy;
- o ponto Q pertence ao gráfico de f e ao eixo Ox;
- a reta r é a assíntota vertical do gráfico de f;
- a reta s é a assíntota horizontal do gráfico de f.

5.1. Quais são as equações de r e de s?

(A) $x=1$ e $y=-3$ **(B)** $x=-1$ e $y=-3$

(C) $x=1$ e $y=3$ **(D)** $x=-1$ e $y=3$

5.2. Determina a área do triângulo $[OPQ]$.

5.3. Resolve, analiticamente, a condição $f(x)>x$.

Apresenta o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

6. Sejam f e g as funções, de domínios, respetivamente, $\mathbb{R}$ e $[0,+\infty[$, definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{se } x<2 \\ 5 & \text{se } x=2 \\ \frac{6}{x} & \text{se } x>2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x)=\sqrt{x}.$$

Qual é a proposição falsa?

(A) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-7$ **(B)** $\lim\limits_{x\to 9}(f\circ g)(x)=2$

(C) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ **(D)** Não existe $\lim\limits_{x\to 0}(g\circ f)(x)$

7. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\begin{cases} \frac{3}{x} & \text{se } x\leq -1 \\ x^3-4x^2+2 & \text{se } x>-1 \end{cases}$.

7.1. Calcula, usando a definição de derivada num ponto, $g'(1)$.

7.2. Determina, recorrendo à calculadora gráfica, o contradomínio da função g.

Na tua resposta, deves:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função g que visualizares na calculadora (sugere-se a utilização da janela em que $x\in[-5,5]$ e $y\in[-10,10]$; nesse referencial:
  - assinala o ponto do gráfico de abcissa -1 e indica a sua ordenada;
  - assinala os pontos dos gráfico correspondentes aos mínimos relativos da função e indica as suas coordenadas, com arredondamentos às centésimas.
- apresentar o contradomínio da função g, usando a notação de intervalos de números reais.

8. Calcula, se existirem:

8.1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^4+5000x^2-50}{6000-3000x^3-2x^4}$;

8.2. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$, sendo g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\begin{cases} \frac{x}{6} & \text{se } x<1 \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{se } x>1 \end{cases}$;

8.3. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$, sendo h a função, de domínio $]-2,+\infty[$, definida por $h(x)=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x+2}\right)+\sqrt{x+2}}{x+2}$.

FIM

COTAÇÕES

Item																
Cotação (em pontos)																
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.1.**	**2.3.2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	
14	8	14	14	14	8	8	8	14	20	8	14	14	11	17	14	**200**

Formulário

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\dfrac{1-r^n}{1-r}$