Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **|** **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Sabe-se que $(p \wedge q) \Rightarrow r$ é uma proposição falsa.

Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

(A) $\sim(p \vee r) \wedge q$

(B) $(p \wedge q) \wedge r$

(C) $\sim(p \wedge q) \vee \sim r$

(D) $\sim(p \wedge q) \wedge \sim r$

2. Qual das seguintes proposições é **falsa**?

(A) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 5 > 5$

(B) $\sim(\exists x \in \mathbb{N}:\ x \notin \mathbb{R})$

(C) $\sim(\forall x \in \mathbb{N},\ x \text{ é par})$

(D) $\exists x \in \mathbb{R}:\ x^2 - 3 < 0$

3. A negação da proposição $\forall x \in \mathbb{N},\ x < 2 \wedge x \geq -3$ é:

(A) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 2 \vee x < -3$

(B) $\exists x \in \mathbb{N}:\ x \leq 2 \wedge x \geq -3$

(C) $\exists x \in \mathbb{N}:\ x \geq 2 \vee x < -3$

(D) $\exists x \in \mathbb{N}:\ x > 2 \vee x \leq -3$

4. Considere as seguintes proposições:

***a* :** "A Juliana estuda Matemática regularmente."

***b* :** "A Juliana tem sucesso nos testes de Matemática."

A afirmação:

"Como a Juliana não estuda Matemática regularmente, não tem sucesso nos testes de Matemática."

pode ser traduzida por:

(A) $\sim b \Rightarrow \sim a$

(B) $\sim a \wedge \sim b$

(C) $\sim a \Leftrightarrow \sim b$

(D) $\sim a \Rightarrow \sim b$

5. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} : \; 2x - 5 < 12 \; \wedge \; x \text{ é ímpar} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Z} : \; x = (-1)^n + n \wedge x < 7, \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Em qual das opções seguintes está representado o conjunto $B \setminus A$?

(A) $\{3 , 5\}$

(B) $\{1 , 3 , 5 , 7\}$

(C) $\{0 , 2 , 4 , 6\}$

(D) $\{1 , 7\}$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Indique o valor lógico de cada uma das proposições justificando a sua resposta.

1.1. $2^3 = 8$ ou $2 + 2 + 2 = 8$

1.2. $0 < 1$ e $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

1.3. Se $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, então $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$.

1.4. Se o rio Tejo nasce em Portugal, então desagua em Coimbra.

2. Considere as seguintes proposições:

p : A equação $x^2 = 0$ tem solução em $\mathbb{N}$.

q : $\exists x \in \mathbb{Z}: \ 3x + 5 = 8$

r : Existem três números inteiros no intervalo $]-2\ ,\ 2[$.

Determine o valor lógico da seguinte proposição, justificando a sua resposta.

$$\sim(p \wedge q) \Rightarrow [\sim p \Leftrightarrow (q \vee r)]$$

3. Prove, utilizando uma tabela de verdade, que:

$$[p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

4. Utilizando as propriedades das operações lógicas, simplifique a expressão seguinte:

$$[\sim a \wedge (a \vee b)] \Rightarrow [\sim(a \vee \sim b) \vee (a \wedge b)]$$

5. Considere, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

$$p(x):\ x^2-4=0 \qquad q(x):\ x^2+5<3 \qquad r(x):\ |x|+1\geq 0$$

5.1. Classifique cada uma das condições.

5.2. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

5.2.1. $\forall x \in \{-2\ ,\ 2\},\ p(x)$

5.2.2. $\exists x \in \mathbb{Z}:\ q(x)$

5.2.3. $\exists x \in \mathbb{R}:\ p(x) \wedge (\sim q(x))$

5.3. Indique uma condição $a(x)$, possível mas não universal em $\mathbb{R}$, tal que a condição $a(x) \vee p(x)$ seja universal em $\mathbb{R}$ e $a(2)$ seja uma proposição verdadeira.

6. Considere os seguintes conjuntos *A*, *B* e *C* :

$$A=\{x\in\mathbb{Z}:\ -1\leq x<5\}\ ;\ B=\{x\in\mathbb{Z}:\ 3x-6\geq 2 \wedge x<6\}\ ;\ C=\{-2\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 6\}$$

Represente em extensão cada um dos conjuntos:

6.1. A

6.2. B

6.3. $A \cup B$

6.4. $C \setminus A$

6.5. $C \cap \overline{B}$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I – 40 pontos

1.	2.	3.	4.	5.
8	8	8	8	8

Grupo II – 160 pontos

1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	2.	3.	4.	5.1.	5.2.1.	5.2.2	5.2.3.	5.3.	6.1.	6.2.	6.3.	6.4.	6.5.
7	7	7	7	15	12	25	10	8	8	8	10	7	7	7	7	8

Proposta de resolução

Grupo I

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$ é uma proposição falsa.

Logo, $p \wedge q$ é verdadeira e r é falsa pelo que $p \Leftrightarrow \text{V}$, $q \Leftrightarrow \text{V}$ e $r \Leftrightarrow \text{F}$.

$\sim (p \vee r) \wedge q \Leftrightarrow \sim (\text{V} \vee \text{F}) \wedge \text{V} \Leftrightarrow \sim \text{V} \wedge \text{V} \Leftrightarrow \text{F} \wedge \text{V} \Leftrightarrow \text{F}$

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow (\text{V} \wedge \text{V}) \wedge \text{F} \Leftrightarrow \text{F}$

$\sim (p \wedge q) \vee \sim r \Leftrightarrow \sim (\text{V} \wedge \text{V}) \vee \sim \text{F} \Leftrightarrow \text{F} \vee \text{V} \Leftrightarrow \mathbf{V}$

$\sim (p \wedge q) \wedge \sim r \Leftrightarrow \sim (\text{V} \wedge \text{V}) \wedge \sim \text{F} \Leftrightarrow \sim \text{V} \wedge \text{V} \Leftrightarrow \text{F} \wedge \text{V} \Leftrightarrow \text{F}$

Resposta: **(C)**

2. $0^2 + 5 = 5$. Logo, a proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 5 > 5$ é falsa.

Resposta: **(A)**

3. $\sim (\forall x \in \mathbb{N},\ x < 2 \wedge x \geq -3) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}:\ \sim (x < 2 \wedge x \geq -3) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}:\ x \geq 2 \vee x < -3$

Resposta: **(C)**

4. **“**A Juliana não estuda Matemática regularmente.” $\Leftrightarrow \sim a$

“A Juliana não tem sucesso nos testes de Matemática.” $\Leftrightarrow \sim b$

A afirmação:

“Como a Juliana não estuda Matemática regularmente, não tem sucesso nos testes de Matemática.”

pode ser traduzida por $\sim a \Rightarrow \sim b$.

Resposta: **(D)**

5. $A = \{x \in \mathbb{N}:\ 2x - 5 < 12 \wedge x \text{ é ímpar}\} = \{x \in \mathbb{N}:\ 2x < 17 \ \wedge x \text{ é ímpar}\} = \{x \in \mathbb{N}:\ x \leq 8 \ \wedge\ x \text{ é ímpar}\}$

$A = \{1, 3, 5, 7\}$

$B = \left\{x \in \mathbb{Z}:\ x = (-1)^n + n \wedge x < 7,\ n \in \mathbb{N}\right\}$

Para $n = 1$, $x = (-1)^1 + 1 = -1 + 1 = 0$

Para $n = 2$, $x = (-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3$

Para $n = 3$, $x = (-1)^3 + 3 = -1 + 3 = 2$

Para $n = 4$, $x = (-1)^4 + 4 = 1 + 4 = 5$

Para $n = 5$, $x = (-1)^5 + 5 = -1 + 5 = 4$

Para $n = 6$, $x = (-1)^6 + 6 = 1 + 6 = 7 \notin B$

Para $n = 7$, $x = (-1)^7 + 7 = -1 + 7 = 6$

$B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B \setminus A = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{1, 3, 5, 7\} = \{0, 2, 4, 6\}$

Resposta: **(C)**

GRUPO II

1.1. $2^3 = 8 \vee 2+2+2 = 8$

$\text{V} \vee \text{F} \Leftrightarrow \text{V}$

A proposição é verdadeira.

1.2. $0 < 1 \wedge \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\text{V} \wedge \text{F} \Leftrightarrow \text{F}$

A proposição é falsa.

1.3. $(\text{V} \Rightarrow \text{V}) \Leftrightarrow \text{V}$

A proposição é verdadeira.

1.4. $\text{F} \Rightarrow \text{F} \Leftrightarrow \text{V}$

A proposição é verdadeira.

2. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

A proposição p é falsa: $p \Leftrightarrow \text{F}$

$3x + 5 = 8 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \in \mathbb{Z}$

A proposição q é verdadeira: $q \Leftrightarrow \text{V}$

-1, 0 e 1 são os números inteiros do intervalo]–2 , 2[.

A proposição r é verdadeira: $r \Leftrightarrow \text{V}$

$$\sim (p \wedge q) \Rightarrow [\sim p \Leftrightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim (\text{F} \wedge \text{V}) \Rightarrow [\sim \text{F} \Leftrightarrow (\text{V} \vee \text{V})] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\sim \text{F} \Rightarrow (\text{V} \Leftrightarrow \text{V})] \Leftrightarrow (\text{V} \Rightarrow \text{V}) \Leftrightarrow \text{V}$$

A proposição é **verdadeira**.

3.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$p \Rightarrow \sim (p \Rightarrow q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	**F**	F	F	**F**
V	F	F	V	**V**	F	V	**V**
F	V	V	F	**V**	V	F	**V**
F	F	V	F	**V**	V	V	**V**

Da igualdade entre as colunas indicadas, podemos concluir que:

$$[p \Rightarrow \sim (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

4. $\left[\sim a \wedge (a \vee b)\right] \Rightarrow \left[\sim (a \vee \sim b) \vee (a \wedge b)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[(\sim a \wedge a) \vee (\sim a \wedge b)\right] \Rightarrow \left[(\sim a \wedge b) \vee (a \wedge b)\right] \Leftrightarrow$ Distributividade, Leis de De Morgan e $\sim(\sim b) \Leftrightarrow b$

$\Leftrightarrow \left[\text{F} \vee (\sim a \wedge b)\right] \Rightarrow \left[(\sim a \vee a) \wedge b\right] \Leftrightarrow$ $\sim a \wedge a \Leftrightarrow \text{F}$ e distributividade

$\Leftrightarrow (\sim a \wedge b) \Rightarrow (\text{V} \wedge b) \Leftrightarrow$ F é elemento neutro para a disjunção e $\sim a \vee a \Leftrightarrow \text{V}$

$\Leftrightarrow (\sim a \wedge b) \Rightarrow b \Leftrightarrow$ V é elemento neutro para a conjunção

$\Leftrightarrow \sim (\sim a \wedge b) \vee b \Leftrightarrow$ $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\sim x \vee y)$

$\Leftrightarrow (a \vee \sim b) \vee b \Leftrightarrow$ Leis de De Morgan e $\sim(\sim a) \Leftrightarrow a$

$\Leftrightarrow a \vee (\sim b \vee b) \Leftrightarrow$ Associativa

$\Leftrightarrow a \vee \text{V} \Leftrightarrow$ $\sim b \vee b \Leftrightarrow \text{V}$

$\Leftrightarrow \text{V}$

5.1. $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

$p(x)$ é possível não universal.

$x^2 + 5 < 3 \Leftrightarrow x^2 < -2$

$q(x)$ é impossível.

$|x| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq -1$

$r(x)$ é universal.

5.2.1. A proposição é verdadeira porque –2 e 2 são soluções de $p(x)$.

5.2.2. A proposição é falsa porque, como $q(x)$ é impossível em $\mathbb{R}$, $q(x)$ é impossível em $\mathbb{Z}$.

5.2.3. $q(x)$ é impossível em $\mathbb{R}$. Logo $\sim q(x)$ é universal em $\mathbb{R}$.

Portanto, a proposição $\exists x \in \mathbb{R}: \ p(x) \wedge (\sim q(x))$ é verdadeira porque a conjunção de uma condição possível com uma condição universal é uma condição possível.

5.3. Seja a condição $a(x): \ x \neq -2$

Temos que:

$p(x) \vee a(x) \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \vee x \neq -2 \Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 2) \vee x \neq -2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Logo, $a(x) \vee p(x)$ é universal em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, $a(2) \Leftrightarrow 2 \neq -2$ é uma proposição verdadeira.

Assim, a condição $a(x): \ x \neq -2$ é tal que $a(x) \vee p(x)$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$ e $a(2)$ é uma proposição verdadeira.

6.1. $A = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x < 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

6.2. $B = \{x \in \mathbb{Z} :\ 3x - 6 \geq 2 \wedge x < 6\} = \left\{x \in \mathbb{Z} :\ x \geq \frac{8}{3} \wedge x < 6\right\} = \left\{x \in \mathbb{Z} :\ x \geq 2\frac{2}{3} \wedge x < 6\right\} = \{3, 4, 5\}$

6.3. $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

6.4. $C \setminus A = \{-2, -1, 0, 2, 3, 6\} \setminus \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} = \{-2, 6\}$

6.5. $C \cap \overline{B} = \{x : x \in C \wedge x \notin B\} = C \setminus B = \{-2, -1, 0, 2, 3, 6\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{-2, -1, 0, 2, 6\}$