Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **|** **Data:**

Porto Editora

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja r um número real positivo.

Qual das seguintes equações define uma reta tangente à circunferência definida por $(x-1)^2+(y+3)^2=r^2$?

(A) $y=-3-2r$ **(B)** $y=3+r$

(C) $x=-1-2r$ **(D)** $x=1+r$

2. Quais são as coordenadas do ponto de interseção da reta definida por

$(x,y)=(4,6)+k(-2,3)\ ,\ k\in\mathbb{R}$

com o eixo das abcissas?

(A) $(5,0)$ **(B)** $(8,0)$ **(C)** $(0,12)$ **(D)** $(0,4)$

3. De dois vetores no plano $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabe-se que $\vec{u}(1,1)$ e $\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}=\sqrt{2}$.

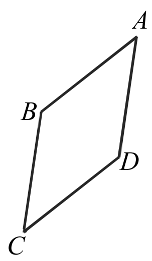
Qual das seguintes afirmações não é necessariamente verdadeira?

(A) $\|\vec{u}\|>\|\vec{v}\|$ **(B)** $\vec{u}=\sqrt{2}\,\vec{v}$

(C) $\|\vec{u}\|\leq\left\|-\sqrt{2}\,\vec{v}\right\|$ **(D)** $\vec{u}\neq\vec{v}$

4. No losango $[ABCD]$, representado na figura ao lado, sabe-se que $A(1,3)$ e $\overrightarrow{CB}(2,-5)$

Quais são as coordenadas de D?



(A) $(-1,8)$ **(B)** $(3,-2)$

(C) $(2,-15)$ **(D)** $(4,-3)$

5. Qual das seguintes condições define uma reta perpendicular ao plano yOz que passa pelo ponto de coordenadas $(1,-2,3)$?

(A) $y=-2\wedge z=3$ **(B)** $y=-2\vee z=3$

(C) $x=1$ **(D)** $x-2y+3z=0$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

6. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(-1, 2)$, $B(1, -3)$ e o vetor $\vec{u}(1, -2)$.

6.1. Calcule o valor de $\left\| \overrightarrow{AB} - 2\vec{u} \right\|$.

6.2. Determine as coordenadas do ponto C, de modo que $\overrightarrow{AC} = -3\vec{u}$.

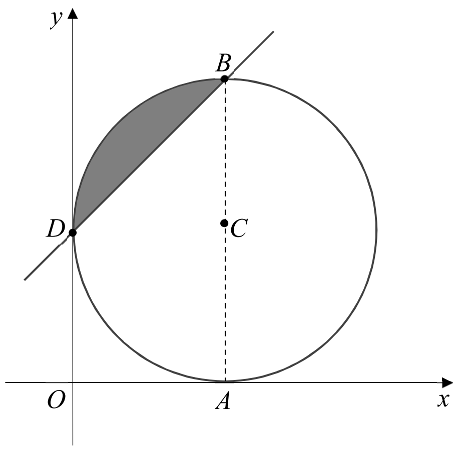
6.3. Considere o ponto $P(2a-3, -a+1)$, $a \in \mathbb{R}$.

Determine para que valor de a o ponto P pertence à reta definida por

$(x, y) = B + k\,\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$

7. Na figura estão representados, num referencial o. n. xOy, em que a unidade é o centímetro:

- a circunferência de centro C e tangente aos eixos coordenados em A e D;
- o ponto A de coordenadas $(2, 0)$;
- o ponto B da circunferência com a mesma abcissa de A;
- a reta BD.



7.1. Escreva a equação reduzida da circunferência representada.

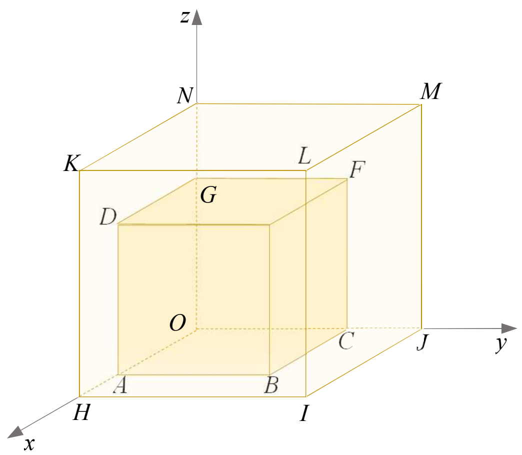
7.2. Determine as coordenadas de um vetor diretor da reta BD que tenha norma igual a 4.

7.3. Prove que:

a) a mediatriz de $[BD]$ é paralela à reta de equação $(x, y) = k(-\pi, \pi)$, $k \in \mathbb{R}$;

b) a área da região a sombreado é igual a $(\pi - 2)\ \text{cm}^2$.

8. No referencial o. n. $Oxyz$ da figura, encontram-se representados dois cubos.



Sabe-se que:

- os vértices A, H, C, J, G e N pertencem aos semieixos positivos do referencial;
- as faces $[ABCO]$ e $[HIJO]$ estão contidas no plano xOy;
- $d(A,H) = \dfrac{d(O,H)}{3}$

8.1. Prove que, para quaisquer cubos nas condições enunciadas, a razão entre o volume do cubo maior e o volume do cubo menor é igual a $\dfrac{27}{8}$.

8.2. Considere que $d(O,H) = 6$.

Escreva uma condição que defina:

a) o plano LIJ;

b) a reta AB.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
8	8	8	8	8	**40**

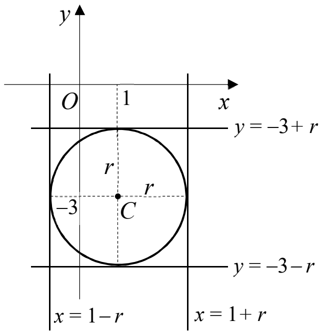
Grupo II

6.1.	6.2.	6.3.	7.1.	7.2.	7.3.a)	7.3.b)	8.1.	8.2.a)	8.2.b)	Total
15	15	20	10	20	25	15	20	10	10	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. $C(1,-3)$; Raio: r



Resposta: **(D)**

2. Eixo das abcissas: ordena nula.

$(x,0)=(4,6)+k(-2,3)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-2k\\0=6+3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-2\times(-2)\\k=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\k=-2\end{cases}$$

O ponto tem coordenadas $(8,0)$

Resposta: **(B)**

3. Como $\vec{u}(1,1)$, $\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{\|\vec{v}\|}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}=\sqrt{2}\|\vec{v}\|\Leftrightarrow\|\vec{v}\|=1$$

Assim, se, por exemplo, $\vec{v}(1,0)$, vem que $\|\vec{v}\|=1$ e $\sqrt{2}\,\vec{v}=\sqrt{2}(1,0)=\left(\sqrt{2},0\right)\neq(1,1)$.

Logo, neste caso, não é verdadeiro que $\vec{u}=\sqrt{2}\,\vec{v}$.

Resposta: **(B)**

4. $D=A+\overrightarrow{AD}=A+\overrightarrow{BC}=(1,3)+(-2,5)=(-1,8)$ $\quad\left|\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}=(-2,5)\right.$

Resposta: **(A)**

5. Se a reta é perpendicular ao plano yOz, então pode ser definida por uma condição do tipo $y=b\wedge z=c$ (as ordenadas e as cotas dos pontos dessa reta são constantes). Como a reta passa em $(1,-2,3)$, pode ser definida pela condição $y=-2\wedge z=3$.

Resposta: **(A)**

Grupo II

6.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,-3)-(-1,2)=(2,-5)$

$\overrightarrow{AB} - 2\vec{u} = (2,-5) - 2(1,-2) = (2,-5)-(2,-4)=(0,-1)$

$\left\| \overrightarrow{AB} - 2\vec{u} \right\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$

6.2. Seja $C(x,y)$.

$\overrightarrow{AC} = C - A = (x,y)-(-1,2)=(x+1,y-2)$

$-3\vec{u} = -3(1,-2) = (-3,6)$

$\overrightarrow{AC} = -3\vec{u} \Leftrightarrow x+1=-3 \wedge y-2=6 \Leftrightarrow x=-4 \wedge y=8$

$C=(-4,8)$

6.3. $(2a-3,-a+1)=(1,-3)+k(1,-2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3=1+k \\ -a+1=-3-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2a-4 \\ -a+1=-3-2(2a-4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=2a-4 \\ -a+1=-3-4a+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2a-4 \\ 3a=-3+8-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2a-4 \\ a=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$a=\dfrac{4}{3}$

7.1. $C(2,2)$; $r=2$; $r^2=2^2=4$

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

7.2. $\overrightarrow{BD} = D - B = (0,2)-(2,4)=(-2,-2)$

Pretende-se determinar as coordenadas de um vetor $\vec{u}$, colinear com $\overrightarrow{BD}$, tal que $\|\vec{u}\|=4$;

- $\vec{u} = k\overrightarrow{BD} = k(-2,-2)=(-2k,-2k)$;
- $\|\vec{u}\|=4 \Leftrightarrow \sqrt{(-2k)^2+(-2k)^2}=4 \Leftrightarrow \sqrt{4k^2+4k^2}=4 \Leftrightarrow \sqrt{8k^2}=4$.

  Como ambos os membros da equação são positivos, tem-se que

  $8k^2=4^2 \Leftrightarrow 8k^2=16 \Leftrightarrow k^2=2 \Leftrightarrow k=\pm\sqrt{2}$

  Existem dois vetores nessas condições:

  Se $k=\sqrt{2}$, $\vec{u}\left(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right)$.

  Se $k=-\sqrt{2}$, $\vec{u}\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$.

7.3. **a)** Sendo $P(x\,,\,y)$ um ponto da mediatriz de $[DB]$, tem-se que:

$$(x-2)^2+(y-4)^2=(x-0)^2+(y-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-8y+16=x^2+y^2-4y+4$$

$$\Leftrightarrow -8y+4y=4x-16 \Leftrightarrow -4y=4x-16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{4}{-4}x-\frac{16}{-4} \Leftrightarrow y=-x+4$$

O declive da mediatriz de $[DB]$ é -1 .

O declive da reta dada é: $\frac{\pi}{-\pi}=-1$

Como os declives são iguais, as duas restas são paralelas.

b) A área pedida é igual à diferença entre a área de um quarto do círculo e a área do triângulo $[DCB]$.

Área de um quarto de círculo: $\frac{\pi\times 2^2}{4}=\pi$

Área do triângulo $[DCB]$: $\frac{\overline{DC}\times\overline{CB}}{2}=\frac{2\times 2}{2}=2$

Área da região sombreada: $(\pi-2)\,\text{cm}^2$

8.1. Pretende-se determinar o valor de:

$$\frac{V_{\text{cubo maior}}}{V_{\text{cubo menor}}}=\frac{[d(O\,,H)]^3}{[d(O\,,A)]^3}=\left[\frac{d(O\,,H)}{d(O\,,A)}\right]^3$$

$$d(A\,,H)=\frac{d(O\,,H)}{3} \Leftrightarrow d(O\,,H)-d(O\,,A)=\frac{d(O\,,H)}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3d(O\,,H)-3d(O\,,A)=d(O\,,H) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2d(O\,,H)=3d(O\,,A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{d(O\,,H)}{d(O\,,A)}=3 \Leftrightarrow \frac{d(O\,,H)}{d(O\,,A)}=\frac{3}{2}$$

Assim:

$$\left[\frac{d(O\,,H)}{d(O\,,A)}\right]^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$$

8.2. **a)** $LIJ: y=6$

b) $d(A\,,H)=\frac{6}{3}=2$, logo, $d(O\,,A)=6-2=4$

$AB: x=4 \wedge z=0$