

## **DGIDC – Materiais de apoio ao Programa de Matemática**

Tema: Figuras no plano e sólidos geométricos

(versão de trabalho incompleta – 15/1/09)

Autores:

Ana Maria Roque Boavida

Ana Cristina Abreu

Fernanda Perez

Jorge Revez

Marta Procópio

## Índice das Tarefas

### 1º ano de escolaridade

| Designação                                              | Ideias e procedimentos a desenvolver                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Tempo previsível de exploração |
|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| <b>Tarefa 1: Agrupar objectos</b>                       | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Comparar e descrever objectos e sólidos geométricos identificando semelhanças e diferenças</li> <li>- Comparar e fazer classificações de objectos justificando os critérios utilizados</li> </ul>                                                                                                                                                                                    | 40 minutos                     |
| <b>Tarefa 2: À volta dos poliedros</b>                  | Identificar polígonos nos sólidos geométricos (poliedros) e representá-los.<br><ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar e nomear figuras planas</li> <li>- Desenvolver a capacidade de visualização</li> </ul>                                                                                                                                                                                                    | 60 minutos                     |
| <b>Tarefa 3: Quadrados e triângulos no geoplano 5x5</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Comparar e descrever quadrados e triângulos.</li> <li>- Desenvolver vocabulário associado a conceitos geométricos como lados, vértices, figura geométrica, interior, exterior e fronteira.</li> <li>- Apropriar-se de propriedades de figuras no plano, em particular do quadrado e do triângulo.</li> <li>- Realizar composições e decomposições de figuras geométricas.</li> </ul> | 80 minutos (60+20)             |

### 3º ano de escolaridade

| Designação                                        | Ideias e procedimentos a desenvolver                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Tempo previsível de exploração |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| <b>Tarefa 1: Famílias de Sólidos</b>              | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Comparar sólidos geométricos identificando semelhanças e diferenças.</li> <li>- Enunciar critérios de comparação, comunicando e justificando raciocínios</li> <li>- Desenvolver vocabulário associado a conceitos geométricos como face, aresta, vértice, plano, recta, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.</li> <li>- Analisar e descrever propriedades de sólidos geométricos.</li> <li>- Classificar sólidos geométricos de acordo com as suas propriedades.</li> </ul> | 90 minutos                     |
| <b>Tarefa 2: Como vemos os sólidos</b>            | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Desenvolver a capacidade de visualização espacial;</li> <li>- Identificar sólidos geométricos através das suas representações no plano a partir de diferentes pontos de vista.</li> <li>- Desenvolver a capacidade de concentração.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                    | 90 minutos                     |
| <b>Tarefa 3: Que figuras consegues descobrir?</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Reconhecer propriedades de figuras geométricas no plano e fazer classificações</li> <li>- Compreender a noção de ângulo</li> <li>- Comparar e classificar ângulos (recto, não recto)</li> <li>- Explicar e justificar raciocínios sobre os processos de obtenção de figuras geométricas (polígonos) e caracterização e classificação destas figuras</li> <li>- Resolver problemas envolvendo a visualização</li> </ul>                                                            | 90 minutos ou 60+60            |

## Agrupar objectos

Nas férias passadas, a sala do professor Pinto foi pintada, por isso, foi preciso juntar todos os materiais em caixotes e retirá-los da sala. Agora que as aulas recomeçaram, o professor Pinto decidiu arrumar tudo de novo nos seus sítios e,



para isso, pediu ajuda aos seus alunos. O João e a Sara ficaram responsáveis por um dos caixotes. O professor Pinto deu-lhes dois tabuleiros e pediu-lhes que agrupassem o conteúdo do caixote de acordo com as semelhanças nas formas dos materiais, colocando cada grupo num tabuleiro diferente.

Queres ajudar o João e a Sara a decidir como agrupar os objectos que estão dentro do caixote?

I. Em cima da mesa estão os objectos que o João e a Sara têm de agrupar.

1. Pega em cada um dos objectos e, juntamente com o teu colega do lado, decide em que tabuleiro vais colocá-lo.
2. Expliquem as vossas escolhas.

II. Os objectos estão agora agrupados em dois tabuleiros diferentes. Escolhe um dos tabuleiros.

1. Como descreverias os objectos que estão no tabuleiro que escolheste a alguém que não pudesse vê-los?
2. O que têm de semelhante entre si?
3. Compara-os com os objectos do outro tabuleiro. Em que se parecem? Que diferenças lhes encontras?
4. Se tivesses de colocar etiquetas nos tabuleiros de forma a identificar o seu conteúdo, o que escreverias?

## Tarefa 1: Agrupar objectos

Ano de escolaridade: 1º ano

Tempo previsto para a exploração: 40 minutos

### Materiais

- Caixote com:
- Objectos tridimensionais de uso corrente (por exemplo, caixas com formatos variados, bolas, latas de bombons ou conservas, pacotes de leite, etc – as figuras 1, 2 e 3 representam alguns desses objectos)
- Sólidos geométricos tais como cilindros, esferas, cones, prismas e pirâmides. (No total, o número de objectos e sólidos deve exceder o número de alunos da turma.)



**Figura 1**



**Figura 2**



**Figura 3**

- 2 tabuleiros
- Papel de cenário

### Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Comparar e descrever objectos identificando semelhanças e diferenças

### Ideias e procedimentos a desenvolver

- Comparar e descrever objectos e sólidos geométricos identificando semelhanças e diferenças
- Comparar e fazer classificações de objectos justificando os critérios utilizados

### **Sugestões para exploração**

Esta tarefa destina-se ao 1º ano de escolaridade e divide-se em dois momentos: um primeiro momento em que os alunos separam os objectos pelos dois tabuleiros, um segundo momento em que se discutem as razões dessa separação. A tarefa deve ser explorada em grande grupo.

O principal objectivo da tarefa é promover a observação de modelos de sólidos geométricos, separando os que têm superfícies planas (poliedros) dos que têm superfícies curvas (não poliedros). A capacidade de decidir em função de critérios bem definidos pelo próprio aluno e a justificação dessas decisões, são outros objectivos da tarefa.

Os alunos poderão estar dispostos em U, de modo a que todos consigam ver os objectos que deverão ser colocados no centro da sala. Contudo, é de todo o interesse que os alunos trabalhem a tarefa a pares, pois é desejável que possam trocar impressões entre si, uma vez que essa partilha potencia, entre outros aspectos, a capacidade de justificar raciocínios e de comunicar matematicamente.

#### *Primeira parte*

A actividade inicia-se com o(a) professor(a) a colocar o primeiro objecto num dos tabuleiros, esclarecendo que todos os objectos colocados naquele mesmo tabuleiro devem ter, pelo menos, uma característica em comum com aquele. O facto de só existirem dois tabuleiros obriga a que os critérios de escolha vão sendo cada vez mais finos, de modo a possibilitar que um grande número de objectos tenham todos a mesma característica em comum.

De seguida, cada par de alunos deverá, à vez, retirar um objecto da colecção inicial e decidir em qual dos tabuleiros deverá colocá-lo. Esta decisão deverá ser explicada de imediato pelos alunos e, eventualmente, debatida no grande grupo. Nesta fase, o papel do(a) professor(a) deverá restringir-se ao de mediador(a) do debate, evitando ser ele(a) a decidir pelos alunos ou a justificar a decisão deles.

Após todos os alunos terem tido oportunidade de agrupar algum objecto, é chegado o momento de observar os grupos feitos e de tentar aprofundar as razões da composição de cada um deles.

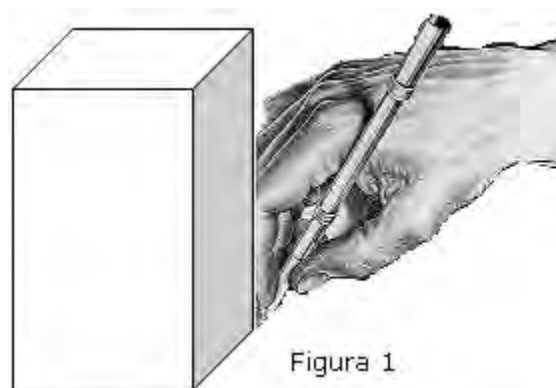
*Segunda parte*

Passa-se então ao segundo momento da tarefa, no qual os alunos, em grande grupo, deverão analisar as duas colecções obtidas, identificando semelhanças e diferenças entre todos os seus elementos. Nesta fase da discussão, o(a) professor(a) pode colocar perguntas como “qual será a semelhança entre os objectos deste grupo?” “Porque razão não pode este objecto pertencer ao outro grupo?”. Os alunos devem ter oportunidade de se manifestar, argumentando contra ou a favor de uma determinada afirmação. Ao professor cabe regular e validar os argumentos utilizados, devendo fomentar o uso de vocabulário próprio, progressivamente mais rigoroso.

Por fim, impõe-se uma síntese das principais conclusões, a qual deve ser acompanhada por um registo escrito. Sugere-se que este registo seja feito em papel de cenário e que consista, por exemplo, numa tabela ou num esquema, onde os objectos surjam ilustrados e classificados de acordo com as designações dadas pelos próprios alunos. É fundamental que tenha sido atingido o objectivo da tarefa e que as duas colecções de objectos sejam classificadas em função da existência de superfícies curvas, ou apenas de superfícies planas, nos seus vários elementos.

## À volta dos poliedros

Coloca um sólido geométrico sobre uma folha de papel, como mostra a figura 1.



1- Segura-o bem com uma mão, para que não deslize, e com o lápis, contorna as suas superfícies planas diferentes entre si.

2- Desenha e nomeia todas as faces que necessitas para construir o sólido.

3-

Dizem que estou “vestido” com quatro triângulos e um quadrado. Consegues descobrir-me?

## **Tarefa 2: À volta dos poliedros**

Ano de escolaridade: 1º ano

Tempo previsto para a exploração: cerca de 60 minutos

### **Materiais**

- Modelos de sólidos geométricos: cubo, paralelepípedo rectângulo, pirâmide quadrangular, pirâmide triangular (em número suficiente para haver um por aluno).
- 1 ficha de trabalho por aluno.
- Lápis, folhas brancas de papel e borracha.

### **Ideias disponíveis e em desenvolvimento**

- Reconhecer formas nos sólidos geométricos.
- Reconhecer superfícies planas.

### **Ideias e procedimentos a desenvolver**

- Identificar polígonos nos sólidos geométricos (poliedros) e representá-los.
- Identificar e nomear figuras planas
- Desenvolver a capacidade de visualização

### **Sugestões para exploração**

- O contorno das faces dos poliedros, deve ser realizado por cada aluno individualmente para que todos experienciem a actividade.
- O professor deve preparar uma caixa com sólidos diversificados e suficientes, assim como supervisionar a escolha dos mesmos pelos alunos, de forma a garantir que todos os tipos de sólidos sejam utilizados e de forma equitativa pela turma.
- Cada aluno coloca o modelo do sólido geométrico sobre uma folha de papel e contorna, com o lápis, a superfície plana que ficou assente sobre o papel. Repete este procedimento para uma face de cada forma que limita o poliedro.



- Os alunos devem comparar diferentes figuras obtidas, descrevendo as suas características comuns e referindo diferenças. Esta comparação deve atender à quantidade e ao comprimento dos lados (quantos no total? Quantos de cada comprimento?). Uma vez que os alunos não têm o conceito de ângulo, podem referir-se à disposição dos lados (por exemplo, se os lados que estão unidos num ponto, se afastam muito ou pouco). Para os lados paralelos ou concorrentes, pode perguntar-se o que acontece se se prolongarem lados não consecutivos e se as distâncias se mantêm ou não. Podem ainda agrupar as figuras de acordo com critérios pré definidos pelo professor ou criados por eles no momento.
- Os alunos devem identificar a forma e o número de figuras planas necessárias para cobrir um poliedro. Pode acontecer que não usem qualquer técnica de contagem das faces. O professor pode sugerir-lhe que escolham uma figura e encontrem no sólido todas as faces com essa forma, marcando as que já contaram, para não as repetir.
- Além disso, os alunos devem ser sensibilizados para aproveitarem ao máximo a folha de papel, não desenhando a primeira figura ao centro da folha, mas deixando espaço para o desenho das seguintes, não só por razões ecológicas, mas também por questões relacionadas com o desenvolvimento da organização espacial.

### Tarefa 3: Quadrados e triângulos no geoplano 5x5

Ano de escolaridade: 1º ano

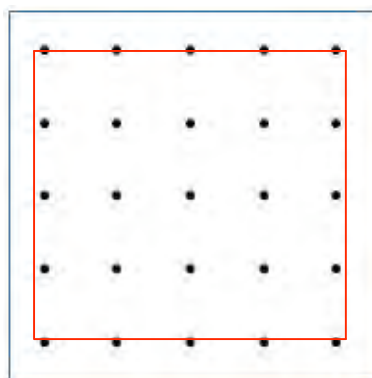
Tempo previsto para a exploração: 80 minutos (20 + 60)



I. Usando elásticos de cor diferente, faz um desenho a teu gosto no geoplano.

Desenhaste figuras geométricas? Mostra quais e diz como se chamam.

II. Desenha, no teu geoplano, uma figura tal como a da imagem:

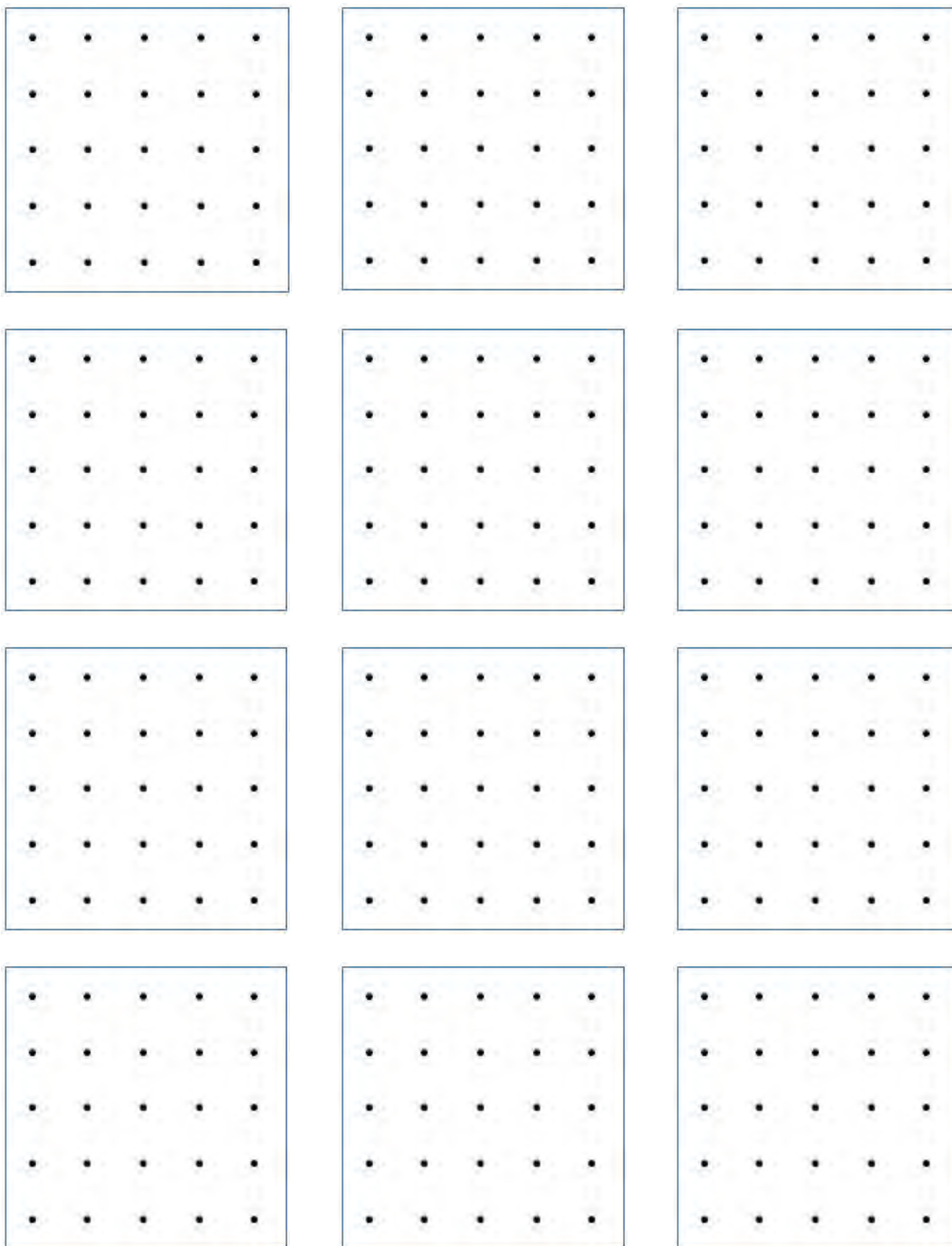


1. Descreve a figura que desenhaste? Como se chama?
2. Quantos são os *pins* no interior da figura? E na sua fronteira?
3. Com um elástico de cor diferente, desenha o maior quadrado possível no interior da figura. Regista o teu desenho na folha de papel pontado e explica como pensaste.  
(Recorda que não podes usar os *pins* da fronteira.)
4. Consegues desenhar mais algum quadrado usando apenas *pins* do interior da figura inicial? Justifica a tua resposta.

5. Usando agora qualquer *pin* do teu geoplano, decompõe o quadrado inicial em dois triângulos. Regista a solução que encontraste na folha de papel pontado e explica como pensaste.
6. Descobre duas maneiras diferentes de decompor o quadrado inicial em três triângulos e regista-as na folha de papel pontado.
7. Será possível decompor o quadrado inicial em quatro triângulos iguais entre si? Explica como sabes que os triângulos são iguais entre si.  
(Não te esqueças de registar as tuas soluções na folha de papel pontado, caso as tenhas encontrado.)
8. E em quatro triângulos diferentes entre si? Explica como pensaste.  
(Não te esqueças de registar as tuas soluções na folha de papel pontado, caso as tenhas encontrado.)
9. E em cinco triângulos?
10. E em seis? E em sete?...

Nome: \_\_\_\_\_ Ano/Turma: \_\_\_\_\_

**Tarefa 3: Quadrados e triângulos no geoplano 5x5**



**Materiais**

- 1 enunciado da tarefa por aluno
- 1 folha de papel pontado por aluno (frente e verso)
- 1 geoplano e vários elásticos coloridos de distintos tamanhos, por aluno.

**Ideias disponíveis e em desenvolvimento**

- Identificar e nomear figuras geométricas como quadrado, rectângulo, triângulo e pentágono.
- Reconhecer propriedades de figuras no plano, em particular do quadrado e do triângulo.
- Distinguir entre interior, exterior e fronteira de um domínio limitado por uma linha poligonal fechada.

**Ideias e procedimentos a desenvolver**

- Comparar e descrever quadrados e triângulos.
- Desenvolver vocabulário associado a conceitos geométricos como lados, vértices, figura geométrica, interior, exterior e fronteira.
- Apropriar-se de propriedades de figuras no plano, em particular do quadrado e do triângulo.
- Realizar composições e decomposições de figuras geométricas.

**Sugestões para exploração**

Esta tarefa destina-se ao 1º ano de escolaridade, embora possa ser explorada, com algumas adaptações, no 2º ano. É composta por duas partes independentes uma da outra, sendo que a primeira pode servir de preparação para a segunda, na medida em que possibilita recordar/clarificar como se desenha no geoplano, aferir alguma terminologia e a rever alguns conceitos. As duas partes podem ser trabalhadas sequencialmente e pela ordem pela qual se apresentam, ou podem ser propostas separadamente e em dias diferentes.

O principal objectivo da tarefa é desenvolver, nos alunos, a capacidade de visualização e a compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano, em particular, do quadrado e do triângulo, bem como familiarizarem-se com vocabulário próprio da geometria.

O geoplano surge como material didáctico de suporte, pela facilidade de manuseamento e pelo potencial de experimentação, introduzindo uma componente lúdica na aprendizagem

da Matemática. É fundamental, no entanto, que o actividade realizada com o geoplano não se restrinja a esta componente.

Os alunos podem trabalhar a pares, mas é fundamental que cada um possa ter o seu próprio geoplano para fazer experiências. Ainda que o(a) professor(a) possa optar pelo trabalho individual, é desejável que os alunos possam trocar impressões entre si, uma vez que essa partilha potencia, entre outros aspectos, a capacidade de justificar raciocínios e de comunicar matematicamente.

Na exploração da tarefa é importante considerar três momentos fundamentais: a introdução, a realização/discussão e a síntese.

*Introdução.* O professor deverá fazer uma breve apresentação da tarefa e clarificar a metodologia de trabalho que seguirá com os alunos, tanto mais que, num primeiro ano, é natural que as questões tenham de ser colocadas oralmente, em momentos comuns a toda a turma. Um aspecto que pode ser pertinente é definir, *a priori*, o tempo reservado a cada questão ou conjunto de questões e estabelecer procedimentos relativamente aos alunos que se adiantam ou se atrasam muito em relação à maioria dos colegas. Por exemplo, é perfeitamente possível determinar, na primeira parte, que todos terminam ao mesmo tempo, de modo a passar à sua discussão em grande grupo. Contudo, é praticamente impossível fazê-lo na segunda parte, principalmente à medida que a ordem das questões vai avançando, dado o seu carácter exploratório. A este respeito, é fundamental que o(a) professor(a) tenha em conta a importância de os alunos poderem experimentar por si mesmos, buscando as soluções, e também que é natural que tenham ritmos distintos. Assim, cabe ao professor gerir o tempo de modo a possibilitar que todos possam pensar nas questões, sem, deixar, contudo, que percam a motivação. É do conhecimento geral que, nesta faixa etária, os alunos têm ainda reduzidos tempos de concentração.

*Realização/discussão.* A realização da tarefa por parte dos alunos deve decorrer alternando momentos em que os alunos tentam resolver as questões, sozinhos ou em colaboração com os seus respectivos pares, e momentos em que o(a) professor(a) solicita e discute, em grande grupo, as conclusões a que os alunos vão chegando. Uma primeira sugestão que consideramos vantajosa é separar a parte I da parte e II, ou seja, antes de se passar à segunda parte, haver uma discussão em grande grupo focada no trabalho realizado. Quanto à parte II, outra sugestão é agrupar as perguntas em pequenos conjuntos em função da relação entre elas. Por exemplo, parece natural agrupar as perguntas 3 e 4 e, noutro conjunto, as perguntas 7 e 8. Desta forma, o(a) professor(a) poderá optar por apresentar à

turma, num mesmo momento, as perguntas 3 e 4 em conjunto, de seguida dar algum tempo para que os alunos procurem resolvê-las e, antes de continuar, fazer a respectiva discussão. Só depois de concluída a discussão deste primeiro conjunto de perguntas, o(a) professor(a) proporia a questão, ou o conjunto de questões, seguinte, seguindo a mesma metodologia até ao final.

O(a) professor(a) pode optar, se assim o entender, por reduzir a tarefa a apenas algumas questões ou por dividi-la em vários momentos de aula a realizar em dias diferentes, desde que a sequência das perguntas não seja desvirtuada, tendo em conta o objectivo específico de cada uma. Importa realçar que algumas das questões, nomeadamente a partir da sexta, têm um grau de dificuldade elevado, pelo que cabe ao/a professor(a) decidir quais as que deve propor, em função das características da sua turma.

#### Parte I

O desenho livre tem por objectivo, como já foi referido, aferir alguma terminologia, bem como reconhecer e distinguir formas geométricas já trabalhadas, como sejam o rectângulo, o quadrado, o triângulo ou o pentágono. A intenção não é forçar os alunos a referir exaustivamente as figuras geométricas que desenharam no geoplano, mas percorrer várias figuras, reconhecendo, por exemplo, diferentes triângulos ou quadrados em diferentes posições.

#### Parte II

Aborda, consolidando, os conceitos de interior e fronteira de um domínio limitado por uma linha poligonal fechada, introduz o conceito de decomposição de uma figura, permite o confronto entre figuras geométricas com o mesmo número de lados, mas em posições diferentes e com múltiplas formas. Trabalha a noção de igualdade geométrica a partir das justificações nomeadamente nas questões 7 e 8, permite uma primeira familiarização com o conceito de vértice, diagonal do quadrado e comprimento dos lados de um polígono.

De notar que, na apresentação da pergunta 5, o(a) professor(a) deve ser rigoroso na explicação do que se entende por decomposição de uma figura, sob risco de os alunos desenharem, por exemplo, dois triângulos dentro do quadrado inicial deixando espaço entre eles ou sobrepondo-os.

*Síntese.* Embora, nesta tarefa em particular, seja pedagogicamente vantajoso que o trabalho de pares/individual esteja entrelaçado com a realização de discussões com toda a turma, é fundamental prever um último momento no qual é feita uma síntese do trabalho realizado,



com destaque para as conclusões de carácter mais geral. Não se pretende, nesta síntese, passar em revista, resumindo, as diferentes respostas exploradas, mas antes sistematizar conclusões, tais como, por exemplo, “o quadrado tem quatro vértices e o triângulo três”, “é sempre possível decompor um quadrado em dois triângulos a partir das suas diagonais”, “esses triângulos são geometricamente iguais”.

Aconselha-se que a exploração da tarefa não ultrapasse os 80 minutos, caso o(a) professor(a) opte por realizá-la integralmente. Se optar por propô-la em dois momentos distintos, uma sugestão é dedicar cerca de 20 minutos à primeira parte e 60 minutos à segunda.

## Famílias de Sólidos

Em cima da mesa têm vários sólidos geométricos.

1. Separem-nos em grupos de tal modo que todos os sólidos do mesmo grupo tenham, *pelo menos*, uma característica em comum. Vamos designar cada um destes grupos por uma “família de sólidos”. Expliquem como pensaram.

2. Formem outras famílias de sólidos. Como pensaram?



## **Tarefa 1: Famílias de Sólidos**

Ano de escolaridade: 3º ano

Tempo previsto para a exploração: 90 minutos

### **Materiais**

- 1 enunciado da tarefa por aluno
- 1 conjunto de sólidos geométricos composto por 1 cilindro, 1 esfera, 1 cone, 1 prisma triangular, 1 prisma quadrangular, 1 prisma pentagonal, 1 pirâmide triangular, 1 pirâmide quadrangular e 1 pirâmide pentagonal, por grupo de trabalho.

### **Ideias disponíveis e em desenvolvimento**

- Identificar figuras geométricas como círculo, quadrado, rectângulo, triângulo e pentágono.
- Identificar polígonos e círculos nos sólidos geométricos.
- Comparar e descrever sólidos geométricos identificando semelhanças e diferenças

### **Ideias e procedimentos a desenvolver**

- Comparar sólidos geométricos identificando semelhanças e diferenças.
- Enunciar critérios de comparação, comunicando e justificando raciocínios
- Desenvolver vocabulário associado a conceitos geométricos como face, aresta, vértice, plano, recta, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.
- Analisar e descrever propriedades de sólidos geométricos.
- Classificar sólidos geométricos de acordo com as suas propriedades.

### **Sugestões para exploração**

A tarefa destina-se ao 3.º ano de escolaridade e tem por objectivo comparar e classificar sólidos geométricos a partir da análise das suas propriedades. Outros objectivos desta tarefa são a organização dos sólidos em grupos, em função de critérios de comparação pré-estabelecidos pelos alunos e proporcionar o desenvolvimento de vocabulário

associado a conceitos geométricos, nomeadamente face, base, aresta, vértice, plano, recta, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

A exploração da tarefa pode subdividir-se em três momentos distintos.

*Introdução.* O(A) professor(a) faz uma breve apresentação da tarefa de modo a clarificar o que significa agrupar sólidos com, pelo menos, uma característica em comum. É neste momento que deve realçar que as “famílias de sólidos” formadas dependem do(s) critério(s) de comparação estabelecido(s).

*Realização.* Os alunos são organizados em grupo e é distribuído um conjunto igual de sólidos geométricos por cada grupo. Por observação dos sólidos, os alunos devem identificar uma ou mais características comuns e registar o(s) critério(s) de comparação que pretendem usar. Em seguida formam as “famílias de sólidos” que daí decorrem e fazem o respectivo registo (por exemplo, através do desenho dos sólidos ou sua descrição). Além disso, o grupo deve preparar-se para justificar as suas opções perante os colegas.

É importante que o(a) professor(a) circule por todos os grupos de modo a apoiar o trabalho dos alunos interpelando-os, nomeadamente sobre o(s) critério(s) que o(s) leva a juntar determinados sólidos. É ainda desejável que regule a linguagem utilizada pelos alunos durante a troca de ideias no seio dos grupos, de modo a que seja utilizado vocabulário apropriado tanto na oralidade como nos registos escritos.

*Discussão.* Após a realização da tarefa é feita uma discussão em grande grupo, onde cada grupo mostra aos colegas como formou as “famílias” justificando a sua escolha de acordo com os critérios usados e em que esta escolha é debatida. É importante que o professor disponha de um conjunto de sólidos geométricos que permita aos alunos ilustrar o trabalho realizado. Durante este debate, o professor deve fazer emergir as propriedades dos sólidos geométricos o que favorecerá a sua classificação.

No final, deve ser feita uma síntese sobre a classificação de sólidos em poliedros e não poliedros, bem como sobre a classificação de prismas e pirâmides de acordo com o número de bases e a sua forma. É desejável que esta síntese fique registada de uma forma visível por toda a turma e permaneça exposta na sala de aula durante o tempo que o(a) professor(a) considerar adequado.

### **Possíveis caminhos a seguir pelos alunos**

Durante a realização da tarefa os alunos podem perguntar ao/à professor(a) se determinado sólido pode ser de certa família, ao que o(a) professor(a) deve responder

com outra questão: “Qual o critério que estão a utilizar para formar essa família de sólidos?” Deste modo, os grupos vão percebendo que alguns critérios inicialmente definidos podem ser muito abrangentes e pouco relevantes do ponto de vista matemático, podendo incluir quase todos os sólidos (por exemplo, ter muitos bicos). Várias outras questões podem surgir, como, por exemplo: “Se os prismas têm duas bases iguais, que estão em cima e em baixo, então o cilindro também pode ser um prisma?” O(a) professor(a) deve orientar o trabalho de modo a os alunos compreendam que para um sólido ser prisma é primeiramente necessário ser poliedro.

Na exploração da tarefa, os grupos de alunos podem começar por agrupar os sólidos não poliedros (não os designando necessariamente deste modo), explicando que todos rodam. Outros grupos podem excluir dessa família de sólidos a esfera, baseando-se na base circular que o cilindro e o cone possuem e a esfera não, colocando-a sozinha. Outra hipótese é surgirem os cones juntamente com as pirâmides pelo facto de também possuírem uma única base e um vértice a esta oposto.

Quanto aos poliedros, estes podem surgir apenas num grupo, sendo aqueles que não rolam, ou podem surgir agrupados de acordo com o número de bases, formando assim um grupo com as pirâmides e outro com os prismas. Pode ainda surgir uma divisão dos poliedros de acordo com a forma das suas bases.

A linguagem a usar nos registos pode ser uma preocupação sentida pela maioria dos alunos levando-os a questionar o(a) professor(a) sobre como se denomina este ou aquele sólido ou figura geométrica. Por exemplo, o facto de terem três prismas e três pirâmides diferentes pode suscitar dúvidas na nomeação dos sólidos. Uma alternativa vantajosa poderá ser descrevê-los de modo a que qualquer pessoa que leia o registo não tenha dúvidas sobre qual o sólido a que se refere.

Pode também ocorrer alguma confusão de nomenclatura espaço-plano, como designarem, erradamente, o paralelepípedo como sendo um rectângulo, ou uma pirâmide pentagonal como sendo um pentágono.

## Como vemos os sólidos

### Parte I

1 - Observa o sólido geométrico fornecido pelo(a) professor(a).

- Coloca a placa de acrílico perto do sólido de modo a poderes observá-lo através da placa, como mostra a figura 1.



Figura 1

- Tanto o sólido geométrico como a placa de acrílico, devem estar imóveis.
- Fecha um olho, certifica-te de que estás a observar todo o sólido através da placa de acrílico e não mexas a cabeça.
- Com uma caneta de quadro branco, desenha o que vês através da placa de acrílico, seguindo os contornos do sólido, como mostra a figura 1.

### 2

- Troca de lugar com o colega que está à tua direita e posiciona-te de modo a fazeres coincidir o desenho que ele fez, com os contornos do sólido. Conseguiu?

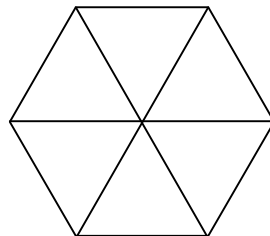
### 3

- Compara o teu desenho com os dos teus colegas de grupo.

Como explicas que, tendo todos desenhado o mesmo sólido, os desenhos sejam diferentes?

## Parte II

A Maria e o João não se entendem sobre o que representa esta imagem:



O João diz que é um cubo, mas a Maria não concorda.

O João usou uma caixa de lápis de cor e conseguiu convencer mesmo a Maria!!!

- Como farias tu para convencer alguém, de que, de facto, o desenho representa um cubo?

## **Tarefa 2: Como vemos os sólidos**

Ano de escolaridade: 3º ano

Tempo previsto para a exploração: cerca de 90 minutos

### **Materiais**

- Modelos de sólidos geométricos transparentes (variados). É importante que sejam transparentes para que se vejam todos os seus contornos e arestas (um modelo por grupo).

- 1 Cilindro (“deitado”);
- 1 Cubo;
- 2 Pirâmides quadrangulares (uma “deitada” e uma de “pé”);
- 2 Prismas triangulares (um “deitado” e um de “pé”).

- 1 Placa rígida de acrílico (por aluno)
- Base de fixação para a placa de acrílico, sobre a mesa
- Canetas de quadro branco.

### **Ideias disponíveis e em desenvolvimento**

- Comparar e descrever sólidos geométricos identificando semelhanças e diferenças
- Reconhecer figuras nos sólidos geométricos.

### **Ideias e procedimentos a desenvolver**

- Desenvolver a capacidade de visualização espacial;
- Identificar sólidos geométricos através das suas representações no plano a partir de diferentes pontos de vista.
- Desenvolver a capacidade de concentração.

### **Sugestões para exploração**

Esta tarefa tem, na sua origem, a constatação de que as imagens de sólidos geométricos com que habitualmente os alunos são confrontados ao longo do seu percurso escolar, apresentam estes sólidos quase sempre na mesma posição dando-lhes apenas o mesmo



ponto de vista de um determinado sólido o que é limitador para a construção de conceitos geométricos. Esta ideia tem eco no novo programa de Matemática pois salienta-se que aí que os alunos devem ter oportunidade de “desenhar objectos partindo de diferentes ângulos de visão” (Ponte et al., 2007, p.20).

Sendo o propósito principal do ensino da Geometria “desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização” (idem) esta tarefa assume um papel importante na apropriação e interpretação das imagens bidimensionais, de sólidos geométricos e objectos tridimensionais com que são confrontados.

*Apresentação da tarefa.* Nesta fase o professor deve começar por organizar os alunos em grupos de cerca de 4 elementos e pedir-lhes que se sentem, à volta de uma mesa. No centro de cada mesa, coloca um modelo de um dos sólido geométricos indicados na secção Materiais e nas posições aí referidas. Cada aluno deve ter a sua placa de acrílico à sua frente como mostra a figura 1 e posicionar-se de modo a observar o sólido através da placa de acrílico como se do vidro de uma janela se tratasse.

A disposição dos alunos de cada grupo à volta do sólido, deve garantir que o ponto de vista de cada um é diferente em relação ao mesmo e não permita a existência de dois desenhos iguais. Por esta razão, optou-se por sugerir a observação do cilindro “deitado” e não “de pé”.

*Realização da tarefa.* Os alunos desenharam no acrílico, a imagem que observam do sólido, seguindo os seus contornos (com uma caneta de quadro branco) – projecção no plano. É importante que o professor os sensibilize para a necessidade de estarem imóveis durante a fase de desenho, de modo a serem o mais fiéis possível ao que observam, pois qualquer movimento implica um erro no desenho. É, também, relevante que os alunos tenham um olho fechado para perderem a sensação de profundidade e se concentrarem na imagem do sólido recolhida por apenas um olho. No final de cada desenho, deve ser possível a qualquer pessoa, tomar a posição do aluno autor do desenho e fazer coincidir o desenho com os contornos do sólido desenhado – “esconder” o sólido atrás do desenho. Por fim, os alunos devem comparar o desenho que fizeram com o sólido que desenharam e identificarem cada linha do desenho, no sólido.

Numa segunda fase, cada aluno deve trocar de lugar com os colegas de grupo (tomando os seus pontos de vista) e comparar os desenhos dos colegas com o seu,

procurando semelhanças e diferenças e identificando a razão dessas diferenças, sem esquecer que todos os desenhos são do mesmo sólido.

Além disso, os alunos podem trocar de lugar com colegas de outros grupos e compararem os vários desenhos, dentro de cada grupo, entre si e com o sólido desenhado de modo a tomarem contacto visual com vários desenhos de outros sólidos, sob pontos de vista variados.

*Discussão.* Neste fase é importante que, em primeiro lugar, todos alunos da turma tenham acesso às representações dos vários sólidos feitas de modo a poderem comparar perspectivas diferentes do mesmo sólido. Uma hipótese é, previamente, o professor solicitar aos alunos que passem os desejos feitos no acrílico para um acetato ou outro tipo de papel transparente e começar por afixar em papel de cenário as diversas representações de cada um dos sólidos agrupando-as por sólido. Pode juntar a estas representações as que habitualmente surgem nos manuais escolares. É importante que ao pé de cada grupo de representações fique o respectivo o sólido representado.

Os desenhos feitos no papel de cenário funcionarão como referente comum de discussão colectiva sobre o porquê das diferenças existentes nas representações de cada sólido.

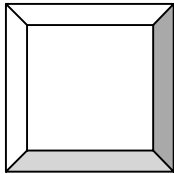
### **Notas complementares**

- Os sólidos podem ser colocados sobre outros objectos de modo a que fiquem elevados, no exterior da sala junto às janelas mas podendo ser vistos do interior. Os desenhos podem ser feitos em folhas de acetato, previamente afixadas aos vidros, com fita-cola e que podem posteriormente ser removidas sem perder os desenhos. A variedade de pontos de vista fica limitada nesta variante da actividade, mas mesmo assim é uma boa solução, na falta de placas de acrílico. Há possibilidade de, depois de cada desenho realizado, outro aluno desenhar o mesmo sólido noutra folha de acetato afixada noutra zona do vidro da janela de modo a obter uma perspectiva diferente da primeira.
- Para aumentar a quantidade e variedade de imagens planas obtidas a partir dos sólidos tridimensionais, o professor ou os alunos podem fotografar os sólidos

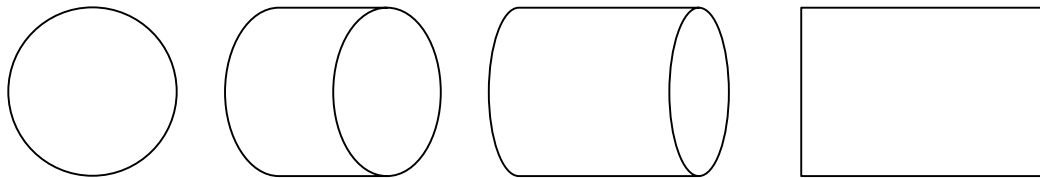
transparentes de pontos de vista diferentes e visualizar essas imagens no computador ou projectadas na tela para discussão em grande grupo.

- Algumas das **representações** que se podem obter ao desenhar os sólidos geométricos são, por exemplo:

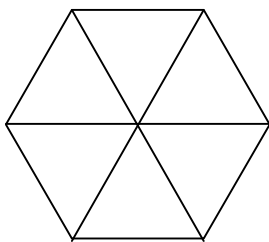
#### Cubo



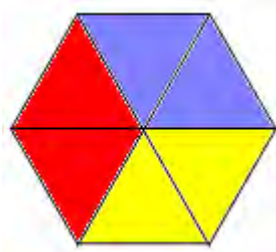
#### Cilindro – perspectivas



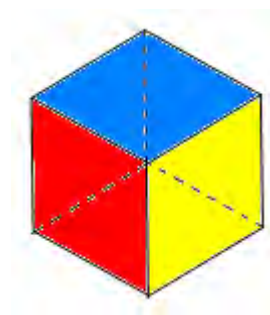
- A sequência de imagens a seguir apresentada, pretende tornar mais fácil a identificação da primeira imagem como sendo o desenho de um cubo. No entanto, aconselha-se o uso real de um cubo transparente e tentar posiciona-lo de modo a ocultar um vértice com o outro vértice diametralmente oposto.



A



B



C

A- Perspectiva pouco comum de um cubo

B- Colorir as faces visíveis torna mais fácil perceber que se trata de um cubo.

C- Se o colocarmos na posição frequentemente adoptada, ainda se torna mais fácil.

## Que figuras consegues descobrir?<sup>1</sup>

Na figura podes observar dois quadrados iguais feitos em material transparente: um encarnado e outro verde. Um dos quadrados foi colocado sobre o outro de modo a haver uma zona de sobreposição. Na figura, esta zona, representada a castanho, é um rectângulo.



Há outras maneiras de sobrepor os quadrados de modo a obter rectângulos diferentes deste? E como podes obter um quadrado? E um triângulo? Que outras figuras consegues encontrar?

---

<sup>1</sup> Adaptada de Taya, C. (2005). What's the overlap? *Teaching Children Mathematics*, 12 (1), 41-2.

### **Tarefa 3: Que figuras consegues descobrir?**

Ano de escolaridade: 3º ano

Tempo previsto para a exploração: cerca de 90 minutos (ou 60 minutos + 30 minutos)

#### **Materiais**

- 2 quadrados feitos em material transparente, por aluno.
- 1 ficha de trabalho por aluno (aspecto facultativo, dependendo da modalidade adoptada para a apresentação da tarefa)
- Retroprojector

#### **Ideias disponíveis e em desenvolvimento**

- Reconhecer de polígonos, suas designações e características
- Compreender intuitivamente a noção de ângulo
- Comparar ângulos
- Reconhecer polígonos, suas designações e características.

#### **Ideias e procedimentos a desenvolver**

- Reconhecer propriedades de figuras geométricas no plano e fazer classificações
- Compreender a noção de ângulo
- Comparar e classificar ângulos (recto, não recto)
- Explicar e justificar raciocínios sobre os processos de obtenção de figuras geométricas (polígonos) e caracterização e classificação destas figuras
- Resolver problemas envolvendo a visualização

#### **Sugestões para exploração**

Esta tarefa destina-se ao 3º ano de escolaridade, embora possa ser explorada, com um maior grau de profundidade, em níveis de ensino posteriores. Tem potencialidades significativas para desencadear uma actividade de investigação cujo cerne é a exploração e discussão de figuras geométricas, concretamente polígonos, o que favorece a compreensão e/ou reforço das definições e características destas figuras. Além disso, a motivação para descobrir figuras com características diferentes de outras já encontradas,

é propícia à sensibilização dos alunos para a importância de explorar informação (neste caso modos de sobrepor dois quadrados) de uma forma sistemática e organizada. Acresce, ainda, que as tentativas feitas para descobrir figuras à medida que se vão movimentando os quadrados, são favoráveis ao desenvolvimento, pelos alunos, da sua capacidade de visualizar e reconhecer figuras. Por último, o facto desta tarefa exigir poucos conhecimentos prévios, permite que todos os alunos tenham algum sucesso na sua exploração, o que contribui para um acréscimo de confiança nas suas capacidades para resolver problemas matemáticos.

Os alunos podem trabalhar em grupos, mas é essencial que cada aluno possua um par de quadrados feitos em material transparente. Uma boa hipótese é desenhar quadrados em acetato e recortá-los. Se os quadrados forem coloridos com cores diferentes, torna-se mais fácil observar a zona de sobreposição, mas esta não é uma condição imprescindível. Uma alternativa é usar o vulgar acetato transparente e desenhar os quadrados de modo a que os seus lados sejam bem visíveis.

Na exploração da tarefa é importante haver três fases principais: Apresentação, realização pelos alunos e discussão.

*Apresentação.* Nesta fase o fundamental é o professor ajudar os alunos a compreenderem a tarefa. Pode optar por entregar-lhes uma ficha de trabalho com o enunciado ou apresentá-la apenas oralmente. Em qualquer dos casos, é importante modelar para a turma o que significa sobreposição e destacar que a figura que interessa observar corresponde à “zona” resultante da sobreposição. Uma hipótese é ter dois quadrados feitos em acetato, preferencialmente de cores diferentes, e usar um retroprojector para mostrar quadrados não sobrepostos e também diferentes formas de sobrepor os quadrados, de modo a obter, por exemplo, vários tipos de rectângulos e também triângulos. Neste processo o professor deve, nomeadamente fazer deslizar um quadrado sobre outro e efectuar rotações de modo a ajudar os alunos a compreender que estes movimentos são possíveis. Além disso, convém clarificar que embora a sobreposição dos quadrados possa ser total, uma vez que são geometricamente iguais, o que interessa explorar são as figuras obtidas quando a sobreposição é parcial, pois no 1º caso apenas se obtém uma única figura geométrica: o quadrado.

Esta fase pode ser usada para recordar a designação de algumas figuras geométricas de modo a facilitar, posteriormente, a comunicação. É, ainda, importante que o professor sensibilize os alunos para a relevância de registarem as figuras que vão obtendo e os

informe que haverá uma fase de trabalho de grupo e outra de com a turma destinada a partilharem e discutirem as descobertas feitas.

*Realização.* Esta fase inicia-se com a organização dos alunos em grupos e a entrega, a cada aluno, de um par de quadrados transparentes. Numa primeira etapa, o professor deve incentivar os alunos a descobrirem vários polígonos através da sobreposição de quadrados, a desenharem estes polígonos nas suas folhas de registo e a escreverem sob cada um a designação correcta. No caso de não a conhecerem devem registar todas as características das figuras obtidas usando terminologia matemática ou outra (por exemplo, tem sete lados, tem três “bicos”, etc).

Numa segunda etapa, o professor distribui a cada grupo uma grande folha de papel (formato A3 ou superior). Em seguida, faz uma intervenção para toda a turma destinada a informar os alunos que devem dobrar a folha ao meio três vezes de modo a que ao desdobrá-la, fiquem com oito células (outra hipótese é distribuir uma cartolina em que estejam demarcada oito zonas). Cada uma das células deve ter um título: rectângulo, quadrado, triângulo, quadrilátero, pentágono, hexágono, figuras com sete lados e figuras com oito lados.

Os alunos de cada grupo devem fazer um cartaz em que sob o título de cada célula representem as figuras descobertas, de tal modo que esse título descreva *o melhor possível* as figuras que estão representadas na célula. A expressão *o melhor possível* é muito importante e o professor deve enfatizá-la. Por exemplo, um quadrado é, por definição, também um rectângulo, No entanto, o termo “quadrado” é mais preciso para designar um quadrilátero que tem quatro lados iguais e quatro ângulos iguais. E o mesmo acontece relativamente a quadrilátero. Tanto o quadrado como o rectângulo são quadriláteros. Contudo, a palavra rectângulo descreve melhor um polígono com quatro lados e quatro ângulos rectos.

Embora haja vantagens na separação dos quadriláteros por três células, este é um ponto crítico da aula. É importante que o professor tenha em atenção este aspecto, de modo a reforçar a ideia de que um quadrado é um caso particular de um rectângulo. Na fase da discussão esta ideia poderá ser retomada e introduzirem-se nos cartazes dos alunos elementos gráficos (por exemplo, setas) que contribuam para minimizar riscos dos alunos desenvolverem concepções erradas.

*Discussão.* É importante que o professor durante a fase do trabalho de grupo recolha informações que lhe permitam decidir criteriosamente que grupos, e porque ordem, irão apresentar o seu trabalho. As apresentações serão feitas a partir dos cartazes elaborados que serão afixados de modo a serem visíveis por todos os alunos. É desejável que o espaço de afixação de cartazes seja suficientemente grande para os já apresentados poderem permanecer afixados durante a fase de apresentação de outros.

No âmbito da apresentação de cada cartaz o professor deve incentivar os restantes elementos da turma a analisá-lo e a interpelar os “apresentadores” sobre algo que não compreendam ou de que discordem. Simultaneamente deve, ele próprio, ir colocando questões que permitam clarificar as características das várias figuras.

No caso do conjunto dos alunos não ter descoberto figuras geométricas correspondentes ao título de alguma das células, é importante que o professor as faça surgir de modo a que nenhuma célula fique vazia em todos os cartazes. Se o considerar adequado, pode aproveitar a ocasião para referir que um polígono de sete lados se designa por heptágono e um de oito por octógono.

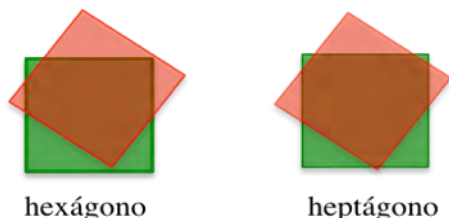
No decurso ou no final da discussão podem ser colocadas questões do tipo:

- Como devemos sobrepor os quadrados para termos a certeza que a figura obtida é um quadrado? E um rectângulo não quadrado?
- Comparem os vários triângulos obtidos e agrupem os triângulos em que os lados/os ângulos sejam todos diferentes. Há triângulos com dois lados iguais? Se sim, como podemos ter a certeza de que são iguais? E com três lados iguais?
- Que figuras são mais fáceis de obter? E mais difíceis? Porque serão umas figuras mais fáceis de obter e outras mais difíceis?
- Conseguem desenhar alguma figura com quatro lados com a forma que ninguém tenha conseguido descobrir? Se sim, conseguiremos obtê-la por sobreposição dos quadrados? Porquê?
- Qual a figura com um maior número de lados que se consegue obter? Porquê?
- Se um dos quadrados for muito pequeno e o outro muito grande, conseguiremos obter um polígono com 8 lados? Porque sim ou porque não?

Algumas destas questões têm um grau de dificuldade elevado tendo em conta o nível de escolaridade dos alunos. Cabe ao professor decidir que questões colocar e quando as colocar



Por exemplo, mesmo que os alunos conheçam a designação “hexágono” habitualmente a imagem que têm é a de um hexágono regular. Podem não reconhecer que a primeira figura apresentada em seguida é um hexágono nem compreender que o que caracteriza um hexágono é o facto de ser um polígono com seis lados.



Não é complicado para os alunos obter triângulos de lados todos diferentes (escalenos). As dificuldades surgem quando se trata de triângulos com dois lados iguais (isósceles) e, sobretudo, de enunciar algum procedimento que permita obter, sem ser por tentativas, triângulos isósceles. Acrescem ainda mais quando se trata de descobrir triângulos equiláteros pois é matematicamente impossível (todos os triângulos que podem formar-se têm um ângulo recto, pelo que o lado oposto ao ângulo recto é maior do que qualquer dos outros lados).

Também não é possível obter quadriláteros do tipo dos apresentados em seguida, precisamente devido à existência dos ângulos rectos nos quadrados de que se parte.



A exploração desta tarefa em sala de aula pode possibilitar discussões matematicamente muito ricas. Se o professor decidir aprofundar esta discussão, é vantajoso repartir o trabalho por dois dias consecutivos, deixando para o segundo a fase de apresentação dos cartazes e sua discussão (neste dia, cerca de 60 minutos)

*Extensão.* Uma possível extensão desta tarefa é investigar o que acontece quando se sobrepõem dois triângulos. Esta extensão introduz desafios adicionais uma vez que, diferentemente dos quadrados, os triângulos têm várias formas, no sentido em que não são matematicamente semelhantes. Por exemplo, dois triângulos equiláteros e dois triângulos rectângulos podem sobrepor-se de modos muito diferentes.