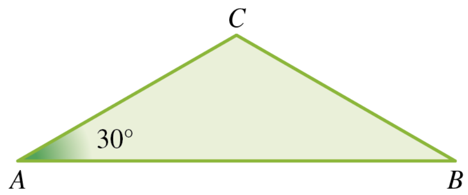
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1. Na figura está representado um triângulo isósceles $[ABC]$.

Sabe-se que:

- $B\hat{A}C = 30^{\circ}$
- $\overline{AC} = \overline{CB}$
- $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ cm



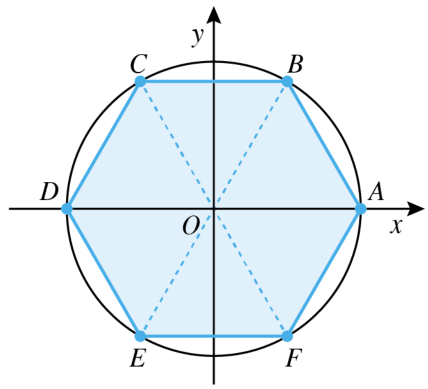
Determina, em cm^2, o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.

2. Na figura está representado, em referencial o. n. Oxy, um hexágono inscrito numa circunferência de centro O.

Qual é a imagem do ponto B pela rotação de centro O e amplitude -1920° ?

(A) Ponto C **(B)** Ponto D

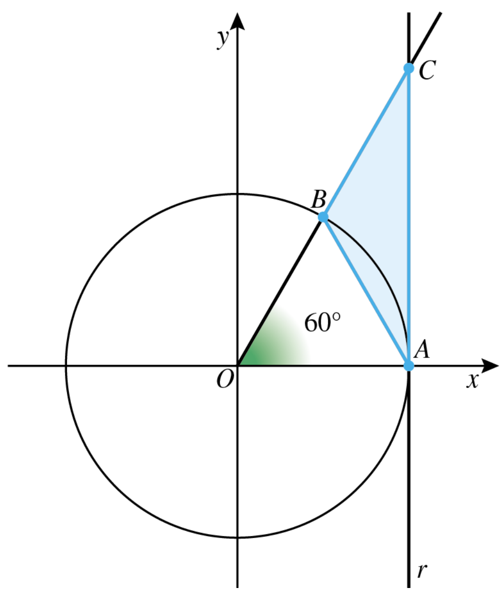
(C) Ponto E **(D)** Ponto F



3. Na figura estão representados, em referencial o. n. Oxy, a circunferência trigonométrica, o triângulo $[ABC]$ e a reta r de equação $x = 1$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas (1,0);
- o ponto C pertence à reta r;
- o ponto B é o ponto de interseção da semirreta $\dot{O}C$ com a circunferência trigonométrica;
- $A\hat{O}C = 60^{\circ}$



Qual é o valor exato da medida da área do triângulo $[ABC]$?

(A) $\frac{-3+2\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **(D)** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

4. Numa dada circunferência, considera um ângulo ao centro com $4,2$ radianos de amplitude.

Sabe-se que o arco que lhe corresponde tem 7 cm de comprimento.

Qual é o comprimento, em centímetros, do raio dessa circunferência?

(A) $0,6$ **(B)** $\frac{5}{3}$ **(C)** $0,6\pi$ **(D)** $\frac{5}{3}\pi$

5. Considera as afirmações:

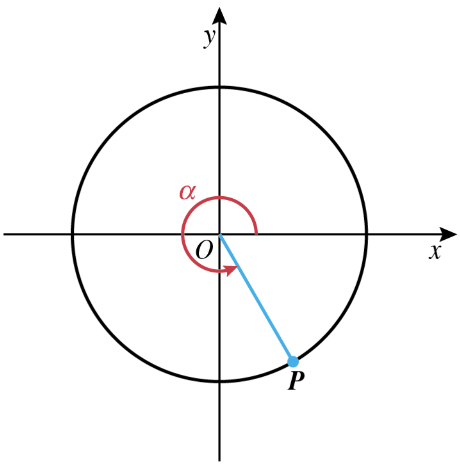
I. Se $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então $\sin\alpha = \sqrt{2}$ e $\cos\alpha = 2$.

II. Se α e β são dois ângulos de amplitudes pertencentes ao intervalo $\left]\frac{21\pi}{2}, 11\pi\right[$ tais que $\alpha < \beta$, então $\cos\alpha < \cos\beta$.

III. $\sin^2(\alpha) + \sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

Para cada uma das três afirmações, indica uma razão que justifique que são falsas.

6. Na figura estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica e um ângulo α, cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}P$.



Sabe-se que o ponto P tem coordenadas $\left(k, -\sqrt{3}k\right)$, $k \in \mathbb{R}^+$.

Em qual das opções se encontra, em função de k, o valor de $\cos\alpha \times \sin\alpha - \tan\alpha$?

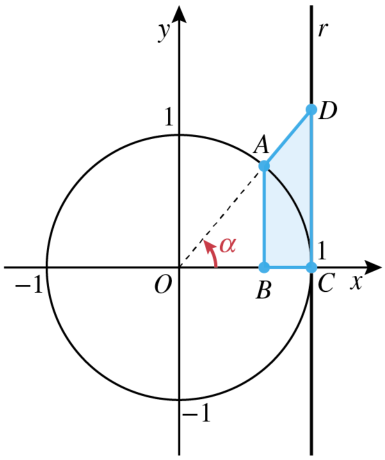
(A) $-\sqrt{3}\left(k^2-1\right)$ **(B)** $-\sqrt{3}\left(k^2+1\right)$ **(C)** $\sqrt{3}\left(k^2-1\right)$ **(D)** $\sqrt{3}\left(k^2+1\right)$

7. Seja a um número real tal que $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=a$.

Determina, em função de a, o valor de $\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)$.

Apresenta todos os cálculos e justificações necessários.

8. No referencial o. n. Oxy da figura estão representados a circunferência trigonométrica e o quadrilátero $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- A é um ponto móvel pertencente à circunferência trigonométrica;
- B pertence a Ox e tem abcissa igual à de A;
- C tem coordenadas $(1,0)$;
- D é a interseção de $\dot{O}A$ com a reta r de equação $x=1$.

Para cada posição do ponto A, seja α a amplitude do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade e semirreta $\dot{O}A$, com $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

8.1. Mostra que a medida da área do quadrilátero $[ABCD]$, em função da área, é dada por:

$$A(\alpha)=\frac{\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

8.2. Recorre ao resultado anterior e determina a medida da área do quadrilátero $[ABCD]$, no caso $\tan\alpha=2$.

8.3. Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina o valor de α, em radianos, arredondado às centésimas, para o qual a medida da área do quadrilátero $[ABCD]$ é igual ao triplo da medida da área do triângulo $[AOB]$.

Na tua resolução deves apresentar:

- uma equação que traduza o problema;
- num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões), visualizado(s) na calculadora, que te permite(m) resolver a equação, incluindo a janela de visualização;
- a resposta com o arredondamento indicado.

9. Sabe-se que $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$ e que $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Determina, sem recorrer à calculadora, o valor exato de $\sin\left(-\frac{13\pi}{2}+\alpha\right)-4\tan(3\pi-\alpha)$.

Apresenta o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, com $a \in \mathrm{IR}$ e $b, c \in \mathrm{IR}^+$.

10. Mostra que, para qualquer valor da variável x em que as expressões têm significado, é válida a seguinte igualdade:

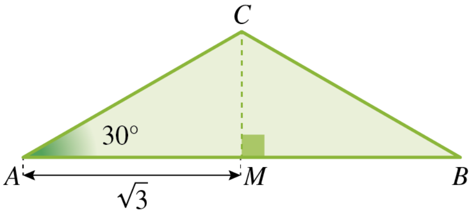
$$\frac{1-\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin x}{1+\cos x}$$

FIM

Cotações

Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	
Cotação (pontos)	18	14	14	14	18	14	
Questões	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	**9.**	**10.**	**Total**
Cotação (pontos)	18	18	18	18	18	18	**200**

1. Seja M o ponto médio de $[AB]$.



$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

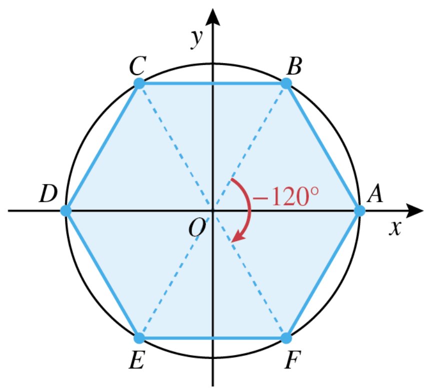
$$\tan 30° = \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{CM}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3} = \overline{CM} \Leftrightarrow \overline{CM} = 1$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{MC}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 1}{2} = \sqrt{3}$$, ou seja, $\sqrt{3}$ cm^2.

2. $1920° = 5 \times 360° + 120°$

$-1920° = -5 \times 360° - 120°$

$$\begin{array}{r|l} 1920 & 360 \\ \hline -1800 & 5 \\ \hline 120 & \end{array}$$



O ângulo de amplitude $-1920°$ corresponde ao ângulo generalizado $(-5, -120°)$.

Assim, a imagem do ponto B pela rotação de centro O e amplitude $-120°$ é o ponto F.

Opção (D)

3. $A(1,0)$

$B(\cos 60°, \sin 60°)$, ou seja, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

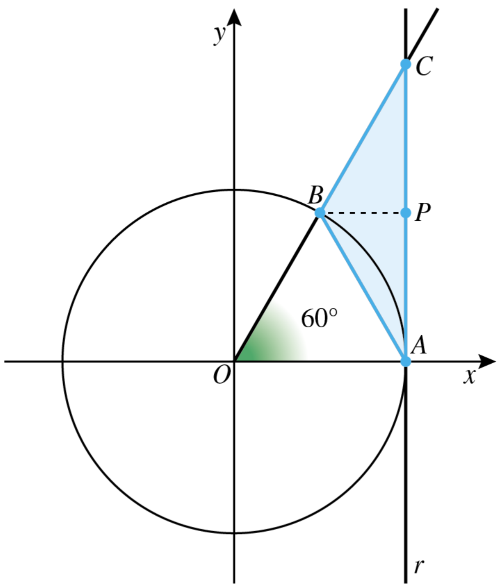
$C(1, \tan 60°)$, ou seja, $C\left(1, \sqrt{3}\right)$.

$$\overline{AC} = \tan 60° = \sqrt{3}$$

Seja P a projeção ortogonal de B sobre a reta r .

$$\overline{BP} = 1 - \cos 60° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BP}}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



Opção (C)

4. Um radiano é a amplitude do ângulo ao centro que determina na circunferência um arco de comprimento igual ao raio.

Assim, $r=\frac{7}{4,2}=\frac{5}{3}$, ou seja, $\frac{5}{3}$cm .

Opção (B)

5. A **afirmação I** é falsa uma vez que $-1\leq\cos\alpha\leq 1,\forall\alpha\in\mathrm{IR}$ pelo que, $\cos\alpha$ não poderá tomar o valor 2.

A **afirmação II** é falsa uma vez que se α e β são dois ângulos de amplitudes pertencentes ao intervalo $\left]\frac{21\pi}{2},11\pi\right[$, como $\frac{21\pi}{2}=5\times\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$ e $11\pi=5\times 2\pi+\pi$, conclui-se que α e β são dois ângulos com lado extremidade no 2.º quadrante. Neste quadrante, o cosseno é decrescente. Logo, se $\alpha<\beta$, então $\cos\alpha>\cos\beta$.

A **afirmação III** é falsa pois $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$, pelo que:

$\sin^2\alpha+(-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (fórmula fundamental da trigonometria)

6. $P(k,-\sqrt{3}k)$, $k\in IR^+$ de onde se pode concluir que $\cos\alpha=k$ e $\sin\alpha=-\sqrt{3}k$.

Assim, $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\sqrt{3}k}{k}=-\sqrt{3}$

$\cos\alpha\times\sin\alpha-\tan\alpha=k\times\left(-\sqrt{3}k\right)-\left(-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}k^2+\sqrt{3}=-\sqrt{3}\left(k^2-1\right)$

Opção (A)

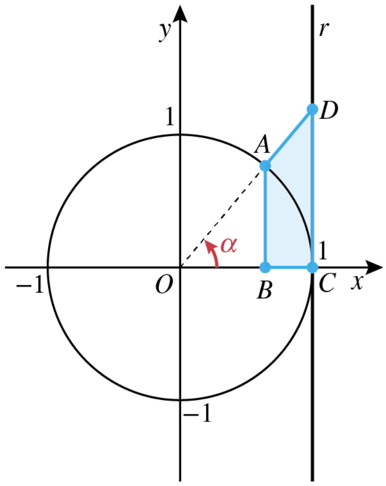
7. $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=a$ e $\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)=\sin\left(\frac{14\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)=1 &\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+a^2=1\\ &\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)=1-a^2\\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=\pm\sqrt{1-a^2},\quad \frac{\pi}{7}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\\ &\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=\sqrt{1-a^2}\end{aligned}$$

Logo, $\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)=\sqrt{1-a^2}$.

8.

8.1. A medida da área do trapézio $[ABCD]$ é dada por:



$$A(\alpha)=\frac{\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\times\overline{BC}}{2}$$

$$A(\alpha)=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{2}\times(1-\cos\alpha)$$

$$=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{2}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

8.2. $\tan\alpha=2$

$$\tan\alpha=2\wedge\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$2^2+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}\quad,\quad\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

Assim, $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Como $\sin\alpha=\tan\alpha\times\cos\alpha$, então $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$$A(\alpha)=\frac{\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

$$A(\alpha)=\frac{2-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}=\frac{2-\frac{2}{5}}{2}=\frac{4}{5}$$

Neste caso, a medida da área é $\frac{4}{5}$.

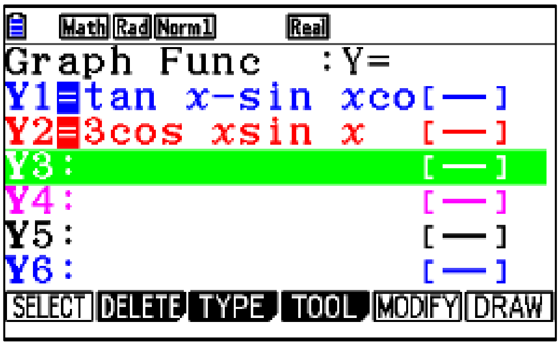
8.3. Pretendemos determinar o valor de α para o qual a medida da área do quadrilátero $[ABCD]$ é igual ao triplo da medida da área do triângulo $[ABC]$.

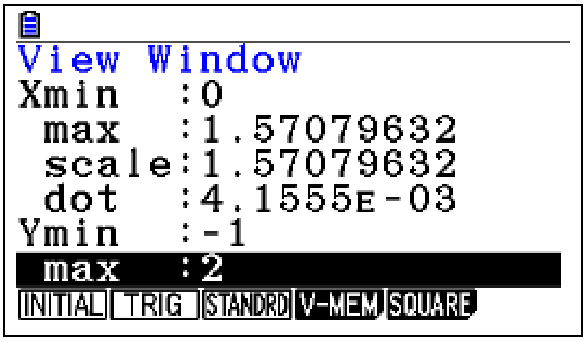
A solução do problema é o valor de $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ que é solução da equação:

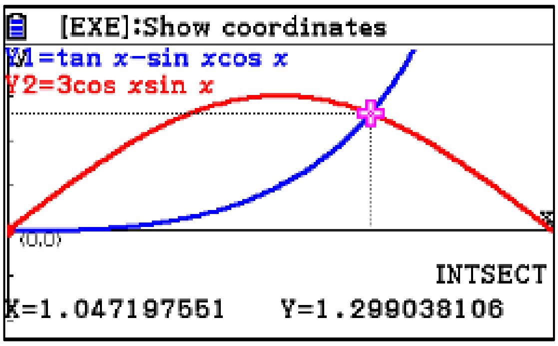
$$A(\alpha)=3\times\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}=\frac{3\cos\alpha\sin\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=3\cos\alpha\sin\alpha$$







$\alpha \approx 1{,}05 \text{ rad}$

9. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin(\alpha)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(\alpha)=-\frac{1}{3}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{8}{9}} \quad ,\alpha\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \tan\alpha=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} \Leftrightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(-\frac{13\pi}{2}+\alpha\right)-4\tan(3\pi-\alpha)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+4\tan(\alpha)=-\cos(\alpha)+4\tan(\alpha)=$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}+4\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$

10.

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{2\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{2\sin x}{1+\cos x}$$