Teste de Matemática A

2019 / 2020

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ______________________________________ N.º: ___ Turma: ___

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Sejam a e b dois números reais, com $a \neq -b$. Sabe-se que $a + b = -8(a - b)$.

Qual é o valor de $\sqrt[3]{a^2 - b^2} : \left(\sqrt[3]{a + b}\right)^2$?

(A) -2

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 2

2. A expressão racionalizada de $\frac{6}{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$ é:

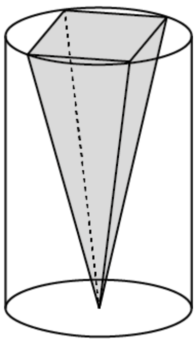
(A) $\frac{\sqrt{15}+3}{6}$

(B) $\sqrt{15} - 3$

(C) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{6}$

(D) $\sqrt{15} + 3$

3. Na figura está representada uma peça constituída por um cilindro e uma pirâmide quadrangular regular. A base da pirâmide está inscrita numa das bases do cilindro e o vértice da pirâmide é o centro da outra base do cilindro.

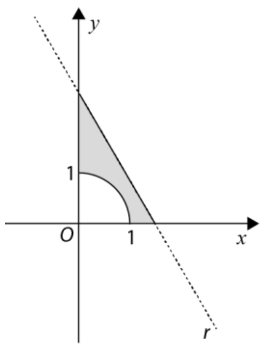


Sabe-se que:

- o raio da base do cilindro mede r unidades de comprimento;
- a altura do cilindro é o triplo do raio da sua base.

Prove que a área da superfície total da pirâmide é igual a $\left(2 + 2\sqrt{19}\right)r^2$ unidades de área.

4. Num referencial cartesiano do plano, considere a representação gráfica da figura.



Na figura está representado:

- um arco de circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a 1;
- a reta r, mediatriz do segmento de reta de extremos $A(-2, 2)$ e $B(2, 4)$.

Qual das seguintes expressões define a região a sombreado?

(A) $y \geq -2x + 3 \ \wedge\ x^2 + y^2 \geq 1 \ \wedge\ x \geq 0 \ \wedge\ y \geq 0$

(B) $y \leq -2x + 3 \ \wedge\ x^2 + y^2 \geq 1 \ \wedge\ x \geq 0 \ \wedge\ y \geq 0$

(C) $y \leq -2x + 3 \ \wedge\ x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge\ x \geq 0 \ \wedge\ y \geq 0$

(D) $y \leq -2x + 3 \ \vee\ x^2 + y^2 \geq 1 \ \vee\ x \geq 0 \ \vee\ y \geq 0$

5. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy, os pontos $P(2,-1)$, $Q(12,4)$ e $R(14,15)$.

5.1. Escreva a equação reduzida da circunferência de diâmetro $[PQ]$.

5.2. Determine as coordenadas do ponto S, de modo que $[PQRS]$ seja um losango.

5.3. Determine as coordenadas do vetor colinear com $\overrightarrow{PQ}$, de sentido contrário ao de $\overrightarrow{PQ}$ e de norma 5.

6. A expressão $\sqrt[6]{18a^3} \times (2a^{-3}b^{12})^{-\frac{1}{6}}$ é igual, para quaisquer números reais positivos a e b, a:

(A) $\sqrt[3]{3}ab^2$

(B) $\frac{\sqrt[3]{3}b}{a^2}$

(C) $\frac{\sqrt[3]{3}a}{b^2}$

(D) $\frac{\sqrt[3]{3}}{a\,b^2}$

7. Considere, num referencial o.n. Oxy, a região definida pela condição:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \ \wedge y + x \leq 0$$

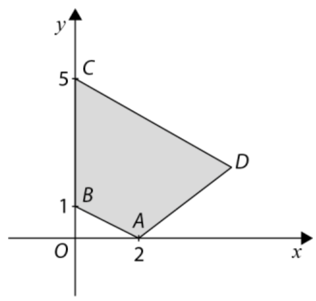
Qual é a área dessa região?

(A) $\frac{\pi}{4}$ **(B)** $\frac{\pi}{2}$ **(C)** π **(D)** 2π

8. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy, o trapézio $[ABCD]$.

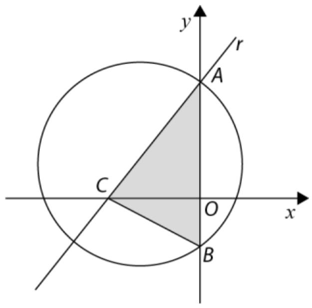
Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(2,0)$;
- o ponto B tem coordenadas $(0,1)$;
- o ponto C tem coordenadas $(0,5)$;
- o ponto D tem coordenadas $\left(a,\frac{a}{3}\right)$, com $a \in \mathbb{R}$;
- as retas AB e CD são paralelas.



Determina o valor de a.

9. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a circunferência definida pela condição $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4$, uma reta r e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se ainda que:

- A e B são os pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy, sendo B o ponto de menor ordenada;
- a reta r passa no ponto A e no centro da circunferência;
- o ponto C é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox.

9.1. Prove que o centro da circunferência tem coordenadas $(-2,1)$.

9.2. Prove que a reta r pode ser definida vetorialmente por $(x, y) = \left(0,1+\sqrt{5}\right) + k\left(2, \sqrt{5}\right), k \in \mathbb{R}$.

9.3. Determine a área do triângulo $[ABC]$.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.**	
8	8	20	8	20	20	20	8	8	20	20	20	20	**200**

Teste N.º 1 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

Sabe-se que $a+b=-8(a-b)$ e $a \neq -b$, isto é, $\frac{a-b}{a+b}=-\frac{1}{8}$. Então:

$$\sqrt[3]{a^2-b^2}:\left(\sqrt[3]{a+b}\right)^2=\sqrt[3]{a^2-b^2}:\sqrt[3]{(a+b)^2}=\sqrt[3]{\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a+b)}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a-b}{a+b}}=$$

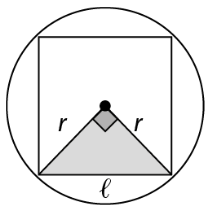
$$=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=$$

$$=-\frac{1}{2}$$

2. Opção (D)

$$\frac{6}{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{6}{\sqrt{15}-3}=\frac{6(\sqrt{15}+3)}{15-9}=\frac{6(\sqrt{15}+3)}{6}=\sqrt{15}+3$$

3. Seja r o raio da base do cilindro.

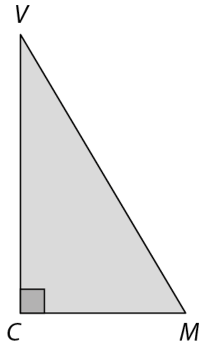


Seja l o lado do quadrado, base da pirâmide:

$r^2+r^2=l^2 \Leftrightarrow 2r^2=l^2 \Leftrightarrow l=\pm\sqrt{2}r$

Como $l>0$, então $l=\sqrt{2}r$.

Consideremos V o vértice da pirâmide, C o centro da base superior do cilindro e M o ponto médio de um dos lados da base da pirâmide:



$\overline{CV}=3r$

$\overline{CM}=\frac{\sqrt{2}}{2}r$

Então:

$$\overline{VM}^2=(3r)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 \Leftrightarrow \overline{VM}^2=9r^2+\frac{1}{2}r^2 \Leftrightarrow \overline{VM}^2=\frac{19}{2}r^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{VM}=\pm\sqrt{\frac{19}{2}}r$$

Como $\overline{VM}>0, \overline{VM}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}}r$.

Assim, a área da superfície total da pirâmide é igual a:

$$l^2+4\times\frac{l\times\overline{VM}}{2}=2r^2+2\times\sqrt{2}r\times\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}}r=2r^2+2\sqrt{19}r^2=\left(2+2\sqrt{19}\right)r^2$$

4. Opção (B)

Comecemos por definir a mediatriz do segmento de reta de extremos $A(-2,2)$ e $B(2,4)$:

$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-4y+4=x^2-4x+4+y^2-8y+16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y=-8x+12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-2x+3$

Uma vez que o semiplano representado é fechado e é inferior em relação à reta de equação $y=-2x+3$, então concluímos que é definido por $y \leq -2x+3$.

O domínio plano representado corresponde à conjunção de condições e não à disjunção de condições. O exterior do círculo é definido por $x^2+y^2 \geq 1$. O semiplano fechado à direita da reta de equação $x=0$ é definido por $x \geq 0$ e o semiplano fechado superior em relação à reta de equação $y=0$ é definido por $y \geq 0$.

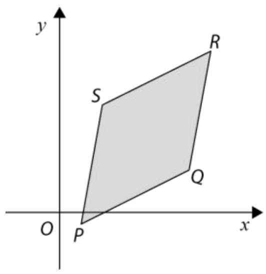
5.

5.1. Comecemos por determinar as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[PQ]$:

$\left(\frac{2+12}{2},\frac{-1+4}{2}\right)=\left(7,\frac{3}{2}\right)$

O raio da circunferência é igual à distância do ponto médio do segmento de reta $[PQ]$ ao ponto P: $\sqrt{(7-2)^2+\left(\frac{3}{2}+1\right)^2}=\sqrt{25+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{125}{4}}$

Assim, a equação pedida é $(x-7)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$.



5.2. $S=P+\overrightarrow{QR}$, pois $[PQRS]$ é um losango.

$\overrightarrow{QR}=R-Q=(14,15)-(12,4)=(2,11)$

Logo, $S=(2,-1)+(2,11)=(4,10)$.

5.3. $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(12,4)-(2,-1)=(10,5)$

Um vetor colinear com $\overrightarrow{PQ}$: $(10k,5k)$, com $k \in \mathbb{R}$

Como pretendemos que o vetor tenha norma 5, vem que:

$\sqrt{(10k)^2+(5k)^2}=5 \Leftrightarrow \sqrt{100k^2+25k^2}=5 \Leftrightarrow \sqrt{125k^2}=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{125}|k|=5 \Leftrightarrow 5\sqrt{5}|k|=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |k|=\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Como pretendemos um vetor de sentido contrário ao de $\overrightarrow{PQ}$, então $k=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

As coordenadas do vetor pedido são $\left(-2\sqrt{5},-\sqrt{5}\right)$.

6. Opção (C)

$$\sqrt[6]{18a^3} \times (2a^{-3}b^{12})^{-\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{18a^3} : \sqrt[6]{2a^{-3}b^{12}} = \sqrt[6]{\frac{18a^3}{2a^{-3}b^{12}}} =$$

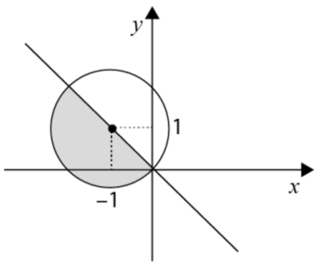
$$= \sqrt[6]{\frac{9a^6}{b^{12}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{9} \times a}{\sqrt[6]{b^{12}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3}a}{b^2}$$

7. Opção (C)

A condição $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \ \wedge \ y + x \leq 0$ define o semicírculo:



$$A_{\text{semicírculo}} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 2}{2} = \pi$$

8. Comecemos por definir a reta AB:

$m = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$ (declive de AB)

$b = 1$ (ordenada na origem)

$AB: y = -\frac{1}{2}x + 1$

Como a reta CD é paralela à reta AB, então tem o mesmo declive: $-\frac{1}{2}$

$CD: y = -\frac{1}{2}x + 5$

Como o ponto $D\left(a, \frac{a}{3}\right)$ pertence à reta CD, vem que:

$$\frac{a}{3} = -\frac{1}{2}a + 5 \Leftrightarrow \frac{a}{3} + \frac{a}{2} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6}a = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 6$$

Logo, $a = 6$.

9.

9.1. $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + \mathbf{4} + y^2 - 2y + \mathbf{1} = 4 + \mathbf{4} + \mathbf{1}$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

Seja D o centro da circunferência. Então, $D(-2, 1)$.

9.2. Determinemos as coordenadas do ponto A:

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ 4 + (y-1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ y - 1 = \sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} \overline{} \\ y - 1 = -\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Note-se que os pontos de abcissa 0 que pertencem à circunferência são A e B, sendo que $A(0, 1+\sqrt{5})$ e $B(0, 1-\sqrt{5})$.

Seja D o centro da circunferência, $D(-2, 1)$.

$\overrightarrow{DA} = A - D = \left(0,\ 1+\sqrt{5}\right) - (-2, 1) = (2, \sqrt{5})$

A reta r pode ser definida vetorialmente por:

$$(x, y) = \left(0, 1+\sqrt{5}\right) + k\left(2, \sqrt{5}\right), k \in \mathbb{R}$$

9.3. Sabemos que $C(c, 0)$, com $c \in \mathbb{R}$ e que C é um ponto da reta r.

Assim:

$$(c, 0) = \left(0, 1+\sqrt{5}\right) + k\left(2, \sqrt{5}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2k \\ 0 = 1 + \sqrt{5} + k\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ k\sqrt{5} = -1 - \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ k = \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ k = \frac{-\sqrt{5}-5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{-2\sqrt{5}-10}{5} \\ \overline{} \end{cases}$$

$C\left(\frac{-2\sqrt{5}-10}{5}, 0\right)$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times |\text{abcissa de } C|}{2} = \frac{\left(1+\sqrt{5}+(-1+\sqrt{5})\right) \times \frac{2\sqrt{5}+10}{5}}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}+10}{5}}{2} =$$

$$= \frac{10+10\sqrt{5}}{5} =$$

$= 2 + 2\sqrt{5}$ unidades de área