Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

exame de recurso Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue o formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Considere o integral duplo

$$I = \int_0^1 \int_0^x dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{x}} dy\, dx.$$

   (a) Esboce o respectivo domínio de integração.

   (b) Inverta a ordem de integração.

   (c) Calcule o valor de I.

2. Determine

$$\iint_S (xy^2, xz, x^2 z) \cdot \hat{n}\, dS,$$

   onde S é a superfície que delimita o sólido

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, z - 1 \leq -\frac{x^2+y^2}{4}\}$$

   e onde $\hat{n}$ aponta para fora de V.

3. Determine e classifique os pontos críticos de

$$f(x,y) := \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y, \quad x, y \neq 0.$$

2ª parte

4. Considere, para cada $k \in \mathbb{R}$, a expressão

$$f_k(x,y) := \left(\sqrt{xy + k^2 \frac{x}{y}}, \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

   (a) Descreva analiticamente o domínio D_k de definição de f_k usando condições tão simples quanto possível.

(b) Esboce D_k e classifique-o em termos das noções de aberto e de fechado. Não se esqueça de justificar.

(c) Calcule, caso exista, o limite de $f_k(x,y)$ quando (x,y) tende para $(0,0)$.

5. Dê dois exemplos de parametrizações em que, por motivos diferentes, não seja possível determinar, através dessas parametrizações e usando a *definição* indicada no livro, a recta tangente à respectiva curva C, suposta gráfico de uma função $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, i.e.,

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]a,b[\wedge y = f(x)\}, \tag{1}$$

num ponto $(x_0, y_0) \in C$, com x_0 um ponto de diferenciabilidade de f.

Nota: Pode concretizar a função f, i.e., não se exige que considere toda e qualquer função f nas condições dadas.

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada no texto de apoio; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

coordenadas esféricas: $x = \rho \cos\theta \sin\varphi$; $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$; $z = \rho \cos\varphi$

T. Green: $\displaystyle\iint_D g_x(x,y) - f_y(x,y)\, dx\, dy = \int_r f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy.$

T. Stokes: $\displaystyle\iint_r \operatorname{rot} f \cdot \hat{n}\, dS = \int_{r\circ\alpha} f \cdot d(r \circ \alpha).$

T. Gauss: $\displaystyle\iiint_Q \operatorname{div} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_r f \cdot \hat{n}\, dS.$

Cotação:

1.(a) 2; (b) 2; (c) 1; 2. 5; 3. 5; 4.(a) 1; (b) 1; (c) 2; 5. 4.